

УДК 539.3; 539.5

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ КОНСОЛИ ИЗ МАТЕРИАЛА, СВОЙСТВА КОТОРОГО ИЗМЕНЯЮТСЯ ПО ТОЛЩИНЕ БАЛКИ ПО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМУ ЗАКОНУ

С. Бенгуедаб*, А. Тунси^{*,**}, Х. Х. Абделаиз^{*,***}, М. А. А. Мезиане^{***}

* Алжирский университет им. Сиди Бель Аббеса, Сиди Бель Аббес, Алжир

** Алжирский национальный комитет по науке и технике, Алжир, Алжир

*** Университет им. Ибн Хальдуна, 14000 Тиарет, Алжир

E-mails: benguediabs@yahoo.fr, tou_abdel@yahoo.com, hadjhenni09@gmail.com, mohamed_docs@hotmail.com

В предположении, что модуль Юнга материала изменяется по толщине пластины по экспоненциальному закону, а коэффициент Пуассона является постоянным, с использованием функции напряжений построено аналитическое решение плоской задачи об изгибе консоли из функционально-градиентного материала под действием равномерной нагрузки. Получены выражения для смещений, деформаций и напряжений.

Ключевые слова: плоская задача, функция напряжений, функционально-градиентный материал, экспоненциальный закон, аналитическое решение.

DOI: 10.15372/PMTF20170221

Введение. В последние годы возрос интерес к исследованию функционально-градиентных материалов (ФГМ). Функционально-градиентные материалы, свойства которых изменяются по пространственным координатам, можно использовать при моделировании поведения конструкций из армированных композитных материалов. В настоящее время ФГМ используются в различных областях науки и техники (электронике, оптике, химии, биомедицине и т. д.), что обуславливает необходимость создания новых методов исследования свойств ФГМ и методов моделирования поведения конструкций из таких материалов [1–5]. Существует небольшое количество работ, посвященных исследованию поведения балок из ФГМ, находящихся под действием как механических нагрузок, так и нагрузок другого типа. В работах [6–8] изучалось поведение балок из ФГМ. В работах [9–11] развиты аналитические методы решения контактных задач и задач термоупругости для балок из ФГМ и трехслойных балок с наполнителем из ФГМ. В этих работах предполагалось, что термодинамические свойства материала изменяются по толщине балки по экспоненциальному закону. В [12] с использованием рядов Фурье и метода Галеркина решались двумерные задачи для упругих балок из ФГМ, находящихся под действием поперечной нагрузки. Предполагалось, что модуль Юнга изменяется по толщине пластины по степенному закону, а коэффициент Пуассона является постоянным. В [13, 14] при решении задач термоупругости для балок из ФГМ предложено использовать балочный конечный элемент, построенный на основе теории балок с учетом поперечного сдвига. В этих

Работа выполнена при финансовой поддержке Алжирского национального комитета по науке и технике и Алжирского университета им. Сиди Бель Аббеса.

© Бенгуедаб С., Тунси А., Абделаиз Х. Х., Мезиане М. А. А., 2017

работах использовался как экспоненциальный, так и степенной закон изменения свойств материала по толщине балки. В [15, 16] получены аналитические решения двумерных задач для пластин и балок. В работах [17–20] в предположении, что осевые смещения по толщине балки изменяются по степенному закону, предложены уточненные уравнения теории балок, учитывающие поперечный сдвиг. В [21] исследовались закритическое поведение и нелинейные свободные колебания лежащих на упругих основаниях балок из ФГМ, имеющих геометрические несовершенства. В [22] изучена трехмерная задача о колебаниях трехслойной балки из ФГМ. В [23] с помощью метода Ритца исследованы свободные колебания пластины из ФГМ. Изгиб и свободные колебания пластин из ФГМ изучались в работе [24] с использованием теории балок высшего порядка, учитывающей поперечный сдвиг. В [25] с использованием аналитического метода и теории первого порядка, учитывающей поперечный сдвиг, решалась задача о свободных колебаниях балки из ФГМ с трещиной на ее конце. В [26] с учетом положения нейтральной поверхности [27] предложена теория первого порядка, учитывающая поперечный сдвиг, для решения задач об изгибе и свободных колебаниях балок из ФГМ. В [28] также решена задача об изгибе и колебаниях балок из ФГМ с учетом поперечного сдвига. В [27, 29–31] для решения задач об изгибе и колебаниях балок из ФГМ предложена теория, учитывающая как поперечный сдвиг, так и обжатие. Обзор работ, посвященных исследованию поведения пластин из ФГМ, приведен в [32].

В данной работе с использованием функции напряжений строится решение задачи об изгибе консольной балки из ФГМ, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки. Полученное аналитическое решение может быть модифицировано для случая однородной балки.

1. ФГМ, свойства которых изменяются по экспоненциальному закону. ФГМ можно создавать, непрерывно изменяя концентрации компонентов многофазных материалов по объему в соответствии с заданным законом. Особенностью ФГМ является неоднородность их микроструктуры, вследствие чего их макроскопические свойства непрерывно изменяются по объему. В данной работе исследуются ФГМ, механические свойства которых изменяются либо по степенному закону, либо по экспоненциальному (ЭФГМ).

На верхней и нижней поверхностях балки из ФГМ задаются различные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона. Внутри балки эти величины непрерывно изменяются по ее толщине: $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. В работе [33] отмечается, что изменение коэффициента Пуассона влияет на напряженно-деформированное состояние балки менее существенно, чем изменение модуля Юнга. Поэтому в данной работе предполагается, что коэффициент Пуассона является постоянным, а модуль Юнга изменяется по экспоненциальному закону. Модуль Юнга изменяется по толщине балки из ЭФГМ в соответствии с законом [18, 33]

$$E(z) = A e^{B(z+h/2)},$$

где

$$A = E_b, \quad B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_t}{E_b} \right),$$

E_t , E_b — модули Юнга на нижней ($z = +h/2$) и верхней ($z = -h/2$) поверхностях балки соответственно.

2. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим консольную балку из ЭФГМ, имеющую постоянную толщину h (рис. 1). Используется декартова система координат, причем на нижней поверхности балки $z = h/2$, на верхней $z = -h/2$. Размеры балки в направлениях координат x , y обозначены L и b соответственно. Предполагается, что балка, находящаяся в плоском напряженном состоянии, нагружена равномерно распределенной нагрузкой q , приложенной к верхней поверхности.

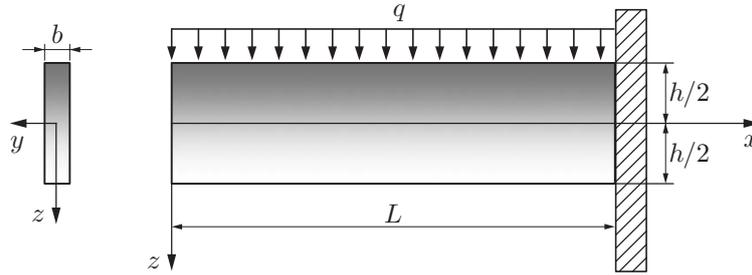


Рис. 1. Схема задачи

В случае отсутствия массовых сил уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

где $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ — компоненты тензора напряжений.

Деформации выражаются через перемещения в соответствии с соотношениями

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

где u, w — компоненты вектора перемещения; $\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz}$ — компоненты тензора деформаций. Уравнение совместности деформаций имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = 0. \quad (2)$$

Определяющие соотношения для ФГМ записываются следующим образом:

$$\varepsilon_x = S_{11}\sigma_x + S_{13}\sigma_z, \quad \varepsilon_z = S_{13}\sigma_x + S_{33}\sigma_z, \quad \gamma_{xz} = S_{44}\tau_{xz}. \quad (3)$$

Здесь $S_{11}, S_{33}, S_{13}, S_{44}$ — коэффициенты податливости:

$$S_{11} = S_{33} = \frac{1}{E(z)}, \quad S_{13} = -\frac{\nu}{E(z)}, \quad S_{44} = \frac{2(1+\nu)}{E(z)}.$$

На верхней и нижней поверхностях ставятся краевые условия

$$\sigma_z(x, -h/2) = -q, \quad \sigma_z(x, +h/2) = 0, \quad \tau_{xz}(x, \pm h/2) = 0, \quad (4)$$

на левом свободном конце балки ($x = 0$) —

$$N_0 = 0, \quad M_0 = 0, \quad Q_0 = 0 \quad (5)$$

(N_0, M_0, Q_0 — осевая сила, изгибающий момент и перерезывающая сила соответственно), на правом защемленном конце балки — краевые условия

$$x = L, z = 0: \quad u = w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

3. Общее решение задачи. Введем функцию напряжений Эйри $\Phi(x, z)$:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}. \quad (7)$$

При этом уравнение (1) удовлетворяется тождественно. Примем далее

$$\Phi(x, z) = \Phi_0(z) + x\Phi_1(z) + x^2\Phi_2(z) \quad (8)$$

$(\Phi_0(z), \Phi_1(z), \Phi_2(z))$ — функции, подлежащие определению). Подставляя (8) в (7), получаем

$$\sigma_x = \Phi_0'' + x\Phi_1'' + x^2\Phi_2''; \quad (9)$$

$$\sigma_z = 2\Phi_2; \quad (10)$$

$$\tau_{xz} = -(\Phi_1' + 2x\Phi_2'). \quad (11)$$

Подставляя (9)–(11) в соотношения (3), а выражения для деформаций — в уравнение совместности деформаций (2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , находим

$$(S_{11}\Phi_2'')'' = 0; \quad (12)$$

$$(S_{11}\Phi_1'')'' = 0; \quad (13)$$

$$(S_{11}\Phi_0'' + 2S_{13}\Phi_2'')' + (2S_{44}\Phi_2')' + 2S_{13}\Phi_2'' = 0. \quad (14)$$

Интегрируя уравнение (12), получаем

$$\Phi_2'' = a_1A_1 + a_2A_2; \quad (15)$$

$$\Phi_2' = a_1A_1^0 + a_2A_2^0 + a_3, \quad \Phi_2 = a_1A_1^1 + a_2A_2^1 + a_3z + a_9, \quad (16)$$

где a_i ($i = 1, 2, \dots$) — константы интегрирования,

$$A_1 = \frac{z}{S_{11}}, \quad A_2 = \frac{1}{S_{11}}, \quad A_i^n(z) = \frac{1}{n!} \int_{-h/2}^z (z - \xi)^n A_i d\xi, \quad i = 1, 2, \quad n = 0, 1.$$

Интегрируя уравнение (13), имеем

$$\Phi_1'' = a_4B_4 + a_5B_5; \quad (17)$$

$$\Phi_1' = a_4B_4^0 + a_5B_5^0 + a_6; \quad (18)$$

$$\Phi_1 = a_4B_4^1 + a_5B_5^1 + a_6z + a_7, \quad (19)$$

где

$$B_4 = A_1, \quad B_5 = A_2, \quad B_i^n(z) = \frac{1}{n!} \int_{-h/2}^z (z - \xi)^n B_i d\xi, \quad i = 4, 5, \quad n = 0, 1.$$

Подставляя соотношения (15)–(19) в уравнение (14) и дважды интегрируя, находим

$$\Phi_0'' = \sum_{i=1}^9 a_i C_i, \quad (20)$$

где

$$C_1 = -\frac{2}{S_{11}} \left(\int_{-h/2}^z (z - \xi) S_{13} A_1 d\xi + \int_{-h/2}^z S_{44} A_1^0 d\xi + S_{13} A_1^1 \right),$$

$$C_2 = -\frac{2}{S_{11}} \left(\int_{-h/2}^z (z - \xi) S_{13} A_2 d\xi + \int_{-h/2}^z S_{44} A_2^0 d\xi + S_{13} A_2^1 \right),$$

$$C_3 = -\frac{2}{S_{11}} \left(S_{13}z + \int_{-h/2}^z S_{44} d\xi \right), \quad C_4 = C_5 = C_6 = 0, \quad C_7 = A_1,$$

$$C_8 = A_2, \quad C_9 = -\frac{2S_{13}}{S_{11}}, \quad C_i^n(z) = \frac{1}{n!} \int_{-h/2}^z (z - \xi)^n C_i d\xi, \quad i = 1, 2, \dots, 9, \quad n = 0, 1.$$

Выражения для осевой силы N_0 , изгибающего момента M_0 и перерезывающей силы Q_0 на левом конце балки получаются путем интегрирования уравнений (9), (11):

$$N_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(0, z) dz = \sum_{i=1}^9 a_i C_i^0 \left(\frac{h}{2} \right),$$

$$M_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(0, z) z dz = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^9 a_i C_i^0 \left(\frac{h}{2} \right) - \sum_{i=1}^9 a_i C_i^1 \left(\frac{h}{2} \right), \quad (21)$$

$$Q_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}(0, z) dz = - \left(a_4 B_4^1 \left(\frac{h}{2} \right) + a_5 B_5^1 \left(\frac{h}{2} \right) \right) - a_6 h.$$

Подставляя соотношения (15)–(20) в (9)–(11), полученные соотношения — в (3) и интегрируя, находим выражения для компонент вектора перемещений

$$u = x(S_{11}\Phi_0'' + 2S_{13}\Phi_2) + \frac{x^2}{2} S_{11}\Phi_1'' + \frac{x^3}{3} S_{11}\Phi_2'' - \int_{-h/2}^z S_{44}\Phi_1' d\xi - \int_{-h/2}^z (z - \xi) S_{13}\Phi_1'' d\xi - \omega z + u_0,$$

$$w = \int_{-h/2}^z (s_{13}\Phi_0'' + 2S_{33}\Phi_2) d\xi - \frac{a_1}{12} x^4 - \frac{a_4}{6} x^3 + \left(\int_{-h/2}^z S_{13}\Phi_2'' d\xi - \frac{a_7}{2} \right) x^2 + \quad (22)$$

$$+ \left(\int_{-h/2}^z S_{13}\Phi_1'' d\xi + \omega \right) x + w_0,$$

где u_0, w_0, ω — константы интегрирования. Подставляя соотношения (16), (18) в (10), (11), полученные соотношения — в (4), имеем

$$a_3 = 0, \quad a_6 = 0, \quad a_9 = -\frac{q}{2}, \quad \sum_{i=1}^2 a_i A_i^0 \left(\frac{h}{2} \right) = 0, \quad 2 \sum_{i=1}^2 a_i A_i^1 \left(\frac{h}{2} \right) - q = 0, \quad (23)$$

$$a_4 B_4^0 \left(\frac{h}{2} \right) + a_5 B_5^0 \left(\frac{h}{2} \right) = 0.$$

В результате подстановки (21) в (5) получаем

$$\sum_{i=1}^9 a_i C_i^0 \left(\frac{h}{2} \right) = 0, \quad \sum_{i=1}^9 a_i C_i^1 \left(\frac{h}{2} \right) = 0, \quad a_4 B_4^1 \left(\frac{h}{2} \right) + a_5 B_5^1 \left(\frac{h}{2} \right) = 0. \quad (24)$$

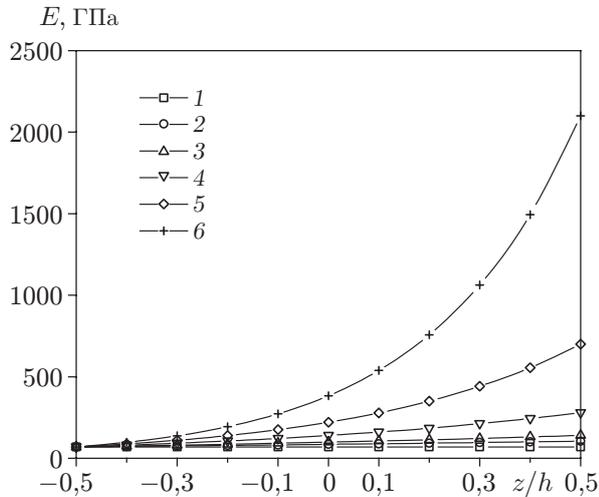


Рис. 2

Рис. 2. Распределение модуля Юнга ЭФГМ по толщине пластины при различных значениях E_t/E_b :

1 — $E_t/E_b = 1$, 2 — $E_t/E_b = 1,5$, 3 — $E_t/E_b = 2$, 4 — $E_t/E_b = 4$, 5 — $E_t/E_b = 10$, 6 — $E_t/E_b = 30$

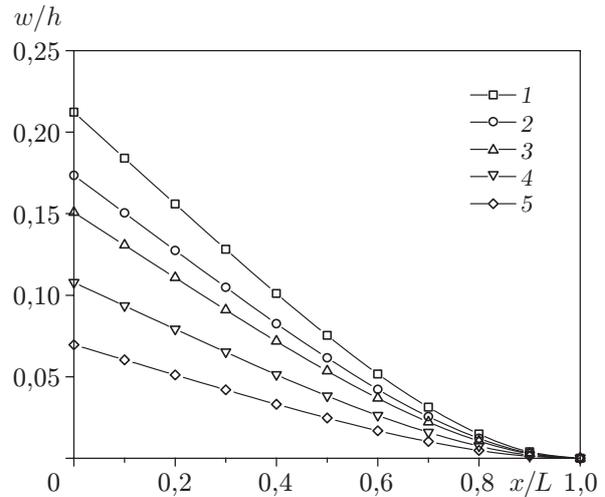


Рис. 3

Рис. 3. Прогиб срединной линии при различных значениях E_t/E_b :

1 — $E_t/E_b = 1$, 2 — $E_t/E_b = 1,5$, 3 — $E_t/E_b = 2$, 4 — $E_t/E_b = 4$, 5 — $E_t/E_b = 10$

Определив константы a_i в уравнениях (23), (24), можно найти функцию напряжений Φ . Компоненты тензора напряжений определяются из соотношений (9)–(11). Подставляя (22) в (6), получаем три уравнения, из которых можно найти u_0 , w_0 , ω , а затем — компоненты вектора перемещения u , w .

4. Результаты исследования и их обсуждение. Рассмотрим консоль из ФГМ, нагруженную на верхней поверхности равномерным давлением q . Расчеты проводились для балки с параметрами $L = 1$ м, $h = 0,1$ м, $q = 10^6$ Н/м². Модуль Юнга алюминия равен $E_b = 70$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. На рис. 2 представлены зависимости модуля Юнга ЭФГМ от координаты z/h при различных значениях отношения E_t/E_b .

На рис. 3 показан прогиб срединной линии консоли при различных значениях отношения E_t/E_b . Видно, что максимальный прогиб имеет место для консоли из однородного материала ($E_t/E_b = 1$). С увеличением отношения E_t/E_b прогиб уменьшается.

На рис. 4 представлены распределения осевого напряжения σ_x и напряжения сдвига τ_{xz} по толщине балки при различных значениях E_t/E_b . При $E_t/E_b \neq 1$ закон изменения осевого напряжения по толщине балки из ЭФГМ не является линейным, в отличие от случая балки из однородного материала ($E_t/E_b = 1$). Максимальные значения растягивающего и сжимающего осевых напряжений существенно зависят от отношения E_t/E_b (см. рис. 4, а). При $E_t/E_b = 1$ кривая распределения напряжения сдвига τ_{xz} по толщине балки является параболой и максимальное значение τ_{xz} достигается при $z = 0$ (см. рис. 4, б). При $E_t/E_b \neq 1$ соответствующая кривая не является параболой и точка, в которой достигается максимальное напряжение сдвига, смещается по направлению к верхней поверхности. Максимальное значение τ_{xz}/q увеличивается с увеличением E_t/E_b . На верхней и нижней поверхностях балки напряжение сдвига обращается в нуль, что соответствует поставленным краевым условиям.

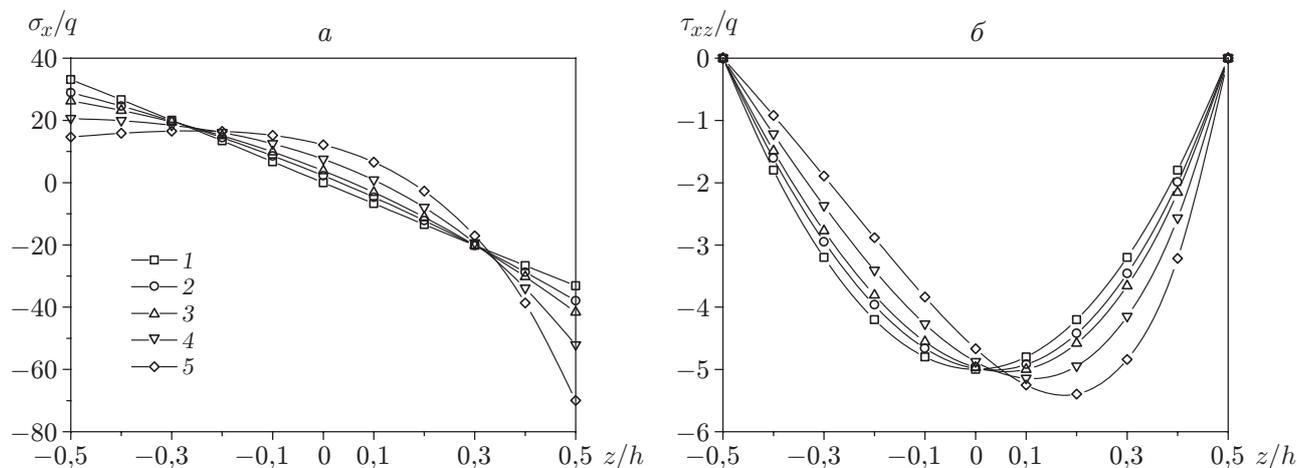


Рис. 4. Распределения осевого напряжения σ_x (а) и напряжения сдвига τ_{xz} (б) по толщине балки из ЭФГМ при $x = L/3$ и различных значениях E_t/E_b (обозначения те же, что на рис. 3)

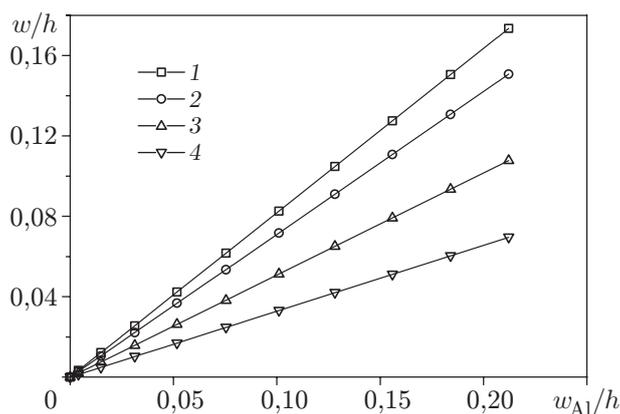


Рис. 5. Зависимость между прогибом балки из ЭФГМ и прогибом балки из однородного материала (алюминия) при различных значениях E_t/E_b :
1 — $E_t/E_b = 1,5$, 2 — $E_t/E_b = 2$, 3 — $E_t/E_b = 4$, 4 — $E_t/E_b = 10$

На рис. 5 показана зависимость между прогибом срединной линии балки из ЭФГМ и прогибом однородной алюминиевой балки w_{Al} . Из анализа приведенных на рис. 5 линейных зависимостей следует, что прогибы балки из ЭФГМ можно определить по прогибам однородной балки.

Заключение. С использованием полуобратного метода получено аналитическое решение задачи об изгибе консоли из ЭФГМ в предположении, что балка находится в плоском напряженном состоянии, а модуль Юнга изменяется по толщине пластины по экспоненциальному закону. Установлено, что напряженно-деформированное состояние балки из ЭФГМ существенно зависит от отношения E_t/E_b . Полученное решение можно использовать для построения упрощенных теорий изгиба балок из ФГМ. Также данный подход можно использовать для построения решений других задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bouderba B., Houari M. S. A., Tounsi A.** Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler — Pasternak elastic foundations // *Steel Composite Structures*. 2013. V. 14, N 1. P. 85–104.
2. **Tounsi A., Houari M. S. A., Benyoucef S., Adda Bedia E. A.** A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates // *Aerospace Sci. Technol.* 2013. V. 24. P. 209–220.
3. **Zidi M., Tounsi A., Houari M. S. A., et al.** Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory // *Aerospace Sci. Technol.* 2014. V. 34. P. 24–34.
4. **Meziane M. A. A., Abdelaziz H. H., Tounsi A.** An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions // *J. Sandwich Structures Materials*. 2014. V. 16, N 3. P. 293–318.
5. **Yahia S. A., Atmane H. A., Houari M. S. A., Tounsi A.** Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories // *Struct. Engng Mech.* 2015. V. 53, N 6. P. 1143–1165.
6. **Shi Z. F.** General solution of a density functionally gradient piezoelectric cantilever and its applications // *Smart Materials Structures*. 2002. V. 11. P. 122–129.
7. **Shi Z. F., Chen Y.** Functionally graded piezoelectric cantilever beam under load // *Arch. Appl. Mech.* 2004. V. 74. P. 237–247.
8. **Zhang L. N., Shi Z. F.** Analytical solution of a simply supported piezoelectric beam subjected to a uniformly distributed loading // *Appl. Math. Mech.* 2003. V. 24. P. 1215–1223.
9. **Sankar B. V.** An elasticity solution for functionally graded beams // *Composites Sci. Technol.* 2001. V. 61. P. 689–696.
10. **Sankar B. V., Taeng J. T.** Thermal stresses in functionally graded beams // *AIAA J.* 2002. V. 40. P. 1228–1232.
11. **Venkataraman S., Sankar B. V.** Elasticity solution for stresses in a sandwich beam with functionally graded core // *AIAA J.* 2003. V. 41. P. 2501–2505.
12. **Zhu H., Sankar B. V.** A combined Fourier series — Galerkin method for the analysis of functionally graded beams // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 2004. V. 71. P. 421–424.
13. **Chakraborty A., Gopalakrishnan S.** A spectrally formulated finite element for wave propagation analysis in functionally graded beams // *Intern. J. Solids Structures*. 2003. V. 40. P. 2421–2448.
14. **Chakraborty A., Gopalakrishnan S., Reddy J. N.** A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials // *Intern. J. Mech. Sci.* 2003. V. 45. P. 519–539.
15. **Ding H. J., Huang D. J., Chen W. Q.** Elasticity solutions for plane anisotropic functionally graded beams // *Intern. J. Solids Structures*. 2007. V. 44, N 1. P. 176–196.
16. **Huang D. J., Ding H. J., Chen W. Q.** Piezoelectricity solutions for functionally graded piezoelectric beams // *Smart Materials Structures*. 2007. V. 16, N 3. P. 387–395.
17. **Kadoli R., Akhtar K., Ganesan N.** Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory // *Appl. Math. Modelling*. 2008. V. 32, N 12. P. 2509–2525.
18. **Sallai B.-O., Tounsi A., Bachir Bouiadjra M., et al.** A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al₂O₃ S-FGM thick beams // *Comput. Materials Sci.* 2009. V. 44. P. 1344–1350.
19. **Li X. F., Wang B. L., Han J. C.** A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams // *Arch. Appl. Mech.* 2010. V. 80, N 10. P. 1197–1212.

20. **Attanasakulpong N., Gangadhara Prusty B., Kelly D. W.** Thermal buckling and elastic vibration of third-order shear deformable functionally graded beams // Intern. J. Mech. Sci. 2011. V. 53, N 9. P. 734–743.
21. **Yaghoobi H., Torabi M.** Post-buckling and nonlinear free vibration analysis of geometrically imperfect functionally graded beams resting on nonlinear elastic foundation // Appl. Math. Modelling. 2013. V. 37, N 18/19. P. 8324–8340.
22. **Li Q., Iu V. P., Kou K. P.** Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates // J. Sound Vibrat. 2008. V. 311, N 1/2. P. 498–515.
23. **Zhao X., Lee Y. Y., Liew K. M.** Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method // J. Sound Vibrat. 2009. V. 319, N 3–5. P. 918–939.
24. **Talha M., Singh B. N.** Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory // Appl. Math. Modelling. 2010. V. 34, N 12. P. 3991–4011.
25. **Wei D., Liu Y., Xiang Z.** An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams with edge cracks // J. Sound Vibrat. 2012. V. 331, N 7. P. 1686–1700.
26. **Bouremana M., Houari M. S. A., Tounsi A., et al.** A new first shear deformation beam theory based on neutral surface position for functionally graded beams // Steel Composite Structures. 2013. V. 15, N 5. P. 467–479.
27. **Fekrar A., Houari M. S. A., Tounsi A., Mahmoud S. R.** A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates // Meccanica. 2014. V. 49. P. 795–810.
28. **Ould Larbi L., Kaci A., Houari M. S. A., Tounsi A.** An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams // Mech. Based Design Structures Machines. 2013. V. 41. P. 421–433.
29. **Bourada M., Kaci A., Houari M. S. A., Tounsi A.** A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams // Steel Composite Structures. 2015. V. 18, N 2. P. 409–423.
30. **Belabed Z., Houari M. S. A., Tounsi A., et al.** An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates // Composites. B. 2014. V. 60. P. 274–283.
31. **Hebali H., Tounsi A., Houari M. S. A., et al.** New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates // J. Engng Mech. (ASCE). 2014. V. 140. P. 374–383.
32. **Jha D. K., Kant T., Singh R. K.** A critical review of recent research on functionally graded plates // Composite Structures. 2013. V. 96. P. 833–849.
33. **Delale F., Erdogan F.** The crack problem for a nonhomogeneous plane // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1983. V. 50. P. 609–614.

*Поступила в редакцию 8/1 2015 г.,
в окончательном варианте — 13/VII 2015 г.*
