

УДК 539.311:58:376+621.77

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ СЖИМАЕМОГО ГИПЕРУПРУГОГО ПОЛОГО ШАРА

Е. Б. Осипова

Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН,  
690041 Владивосток, Россия  
E-mail: osipov@poi.dvo.ru

Предложен аналитический алгоритм исследования устойчивости равновесия сжимаемого гиперупругого шара с использованием переменных Лагранжа. Задача решена в сферической системе координат в общей трехмерной постановке с использованием линеаризованной теории устойчивости и метода разделения переменных относительно радиального перемещения, перемещения вследствие поворота и результирующей по главным направлениям деформации. Результаты численно-графического анализа напряженно-деформированного состояния для трехслойного шара применены для анализа гравитационного напряженно-деформированного состояния литосферы Курильской островодужной системы.

Ключевые слова: сжимаемый гиперупругий шар, устойчивость равновесия.

DOI: 10.15372/PMTF20150415

**Введение.** Исследование источников и механизмов формирования напряженно-деформированного состояния геологической среды является актуальной задачей тектонофизики и геодинамики [1, 2]. В качестве одного из таких источников рассматривается гравитационное поле, существование которого обусловлено неоднородным структурно-плотностным распределением масс в геосферах Земли при отсутствии каких-либо иных тектонических воздействий. Возникающее в этих условиях гравитационное напряженно-деформированное состояние [3] обусловлено действием массовых сил в гравитационном поле, характеризуется накоплением деформаций и формированием остаточных напряжений в земной коре. При этом деформирование представляет собой перемещения среды без нарушения сплошности, включает сдвиг и поворот текущих точек [4]. Деформирование моделируется с использованием теории подобия реологических процессов в кусочно-однородных многослойных средах, подвергаемых конечным деформациям [5].

В общей трехмерной постановке линеаризованной теории устойчивости предложен аналитический алгоритм исследования с использованием переменных Лагранжа состояния устойчивого равновесия полого шара для произвольной формы представления упругого потенциала. Рассматривается класс изотропных гиперупругих сред, которые деформируются без разрушения, допускают большие деформации и характеризуются сохранением упругих свойств и потенциальной энергии внутренних сил [6]. Кинематическое состояние среды описывается с помощью компонент тензора деформаций Грина, напряженное

состояние — с помощью несимметричного тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа. С использованием метода разделения переменных относительно радиального перемещения, перемещения вследствие поворота и результирующей по главным направлениям деформации получено решение задачи в сферической системе координат.

При моделировании используется сферически-симметричная параметрическая трехкомпонентная модель Земли РЕМ (parametric Earth model) [7], которая отражает различия в строении коры и верхней мантии океанических и континентальных регионов. Численно-графический анализ, выполненный для трехслойного шара, применяется для анализа тектонических последствий воздействия гравитации и внутреннего “следящего” давления на границе геосфер: литосферы, астеносферы и подастеносферной мантии, общая толщина которых составляет 420 км. Геофизические свойства слоев литосферы и астеносферы взяты из [8]. Закон состояния геосфер определяется потенциалом Мурнагана [9]. Полученные результаты используются для оценки напряженно-деформированного состояния литосферы одного из районов зоны перехода от Тихого океана к азиатскому континенту — Курильской островодужной системы.

**1. Основные соотношения линеаризованной теории устойчивости в ортогональных криволинейных координатах.** Динамика неоднородных упругих сред с произвольным расположением твердых компонентов рассматривается в лагранжевых координатах. Состояние устойчивости равновесия условно делится на основное (невозмущенное) состояние и возмущенное напряженно-деформированное, которое представляет собой устойчивую форму равновесия и описывается соответствующими линеаризованными соотношениями [10, 11]. Используются соотношения теории конечных деформаций и их линеаризованные выражения в произвольной ортогональной криволинейной системе координат  $q_i$ . Величинам, относящимся к основному состоянию, соответствует индекс “о”, величины, не имеющие индекса “о”, относятся к возмущенному состоянию. Определяющие соотношения для возмущенного состояния линеаризуются в окрестности значений соответствующих величин невозмущенного состояния. Ковариантные составляющие тензора деформаций Грина для основного  $\varepsilon_{ij}^o$  и возмущенного  $\varepsilon_{ij}$  состояний запишем в виде

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{ij}^o &= \nabla_i u_j^o + \nabla_j u_i^o + \nabla_i u_m^o \cdot \nabla_j u_o^m, \\ 2\varepsilon_{ij} &= (g_i^m + \nabla_i u_o^m) \cdot \nabla_j u_m + (g_j^m + \nabla_j u_o^m) \cdot \nabla_i u_m, \end{aligned}$$

где  $\nabla_i u_j^o$ ,  $\nabla_j u_o^m$  — ковариантные производные от ковариантных и контравариантных составляющих вектора перемещений в основном состоянии соответственно;  $\nabla_j u_m$  — ковариантная производная от ковариантных составляющих вектора перемещений;  $g_i^m$  — метрический тензор в недеформированном состоянии.

Компоненты симметричного тензора обобщенных напряжений для сжимаемого нелинейно-упругого тела в невозмущенном  $s^{ijo}$  и возмущенном  $s^{in}$  состояниях соответственно представим в общем виде [11]

$$\begin{aligned} s^{ijo} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}^o} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ji}^o} \right) \Psi^o(A_1^o, A_2^o, A_3^o), & s^{in} &= \lambda^{in\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha, \\ \lambda^{in\alpha\beta} &= \frac{1}{4} (g_m^\alpha + \nabla_m u^{\alpha o}) \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{m\beta}^o} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta m}^o} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{in}^o} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ni}^o} \right) \Psi^o(A_1^o, A_2^o, A_3^o), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\lambda^{in\alpha\beta}$  — тензор четвертого ранга.

Закон состояния  $\Psi^o(A_1^o, A_2^o, A_3^o)$  представляет собой упругий потенциал и является дважды непрерывно-дифференцируемой функцией базисных алгебраических инвариантов  $A_i^o$  тензора деформаций Грина в невозмущенном состоянии [11]:

$$A_1^o = \varepsilon_n^o, \quad A_2^o = \varepsilon_n^{mo} \varepsilon_m^{no}, \quad A_3^o = \varepsilon_n^{mo} \varepsilon_m^{ko} \varepsilon_k^{no}.$$

Напряженное состояние описывается с помощью несимметричного тензора Пиолы — Кирхгофа, полученного путем дифференцирования энергии системы по градиенту вектора перемещений и характеризующего силу, действующую на элементарной площадке в отсчетной конфигурации [11]:

$$t^{im} = (g_n^m + \nabla_n u^{mo}) \cdot s^{in} + s_o^{in} \cdot \nabla_n u^m,$$

где тензоры обобщенных напряжений в возмущенном  $s^{in}$  и невозмущенном  $s^{ij^o}$  состояниях определяются соответственно формулой (1) и соотношением

$$s^{i\beta o} = \left( g^{i\beta} \frac{\partial}{\partial A_1^o} + 2\varepsilon_o^{i\beta} \frac{\partial}{\partial A_2^o} + 3\varepsilon_o^{ik} \varepsilon_k^{\beta o} \frac{\partial}{\partial A_3^o} \right) \Psi^o(A_1^o, A_2^o, A_3^o).$$

Линеаризованное уравнение равновесия объемного элемента в контравариантных компонентах несимметричного тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа принимает вид [10, 11]

$$\nabla_i t^{ij} + F^j = 0, \quad (2)$$

где  $F^j$  — массовые силы.

**2. Постановка и решение задачи.** В соответствии с общей постановкой задачи с использованием линеаризованной теории устойчивости равновесия рассмотрим неоднородное напряженно-деформированное состояние трехслойного сжимаемого полого шара, который подвергается воздействию гравитации и внутреннего “следящего” давления  $\tilde{p}$ , при этом внешняя поверхность шара свободна от нагружения, на поверхностях контакта слоев принимаются условия скольжения. Задача решается в географической системе координат  $O_{\rho\varphi\lambda}$  ( $\varphi$  — широта,  $\lambda$  — долгота) с использованием физических составляющих (им соответствуют нижние индексы в скобках) компонент тензора деформаций Грина  $\varepsilon_{(ij)}$ , несимметричного тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа  $t_{(ij)}$ , физических составляющих вектора перемещений  $u_k$ , параметра удлинения  $\delta_k$  вдоль координатных линий  $q_i$  ( $q_1 = \rho$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = \lambda$ ). Будем полагать, что интенсивность внутреннего “следящего” давления на единице площади в недеформированном состоянии соответствует значениям на заданной глубине. Поскольку “следящее” давление не является консервативной нагрузкой, для исследования устойчивости равновесия в гравитационном поле используется динамический метод [12]. В предположении, что существование основного радиально-симметричного состояния с пренебрежимо малыми напряжениями и деформациями возможно и обусловлено наличием малого поля гравитационных сил [2, 13], при деформации произвольная точка переходит в точку того же слоя среды. Таким образом, имеем распределения удлинений  $\delta^o(\rho)$ , перемещений, деформаций и напряжений для каждого слоя в основном состоянии.

В случае радиально-симметричной деформации в основном состоянии физические составляющие тензора деформаций Грина  $\varepsilon_{ij}^o$ , симметричного тензора обобщенных напряжений  $s_{(ij)}^o$  и несимметричного тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа  $t_{(ij)}^o$  имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(11)}^o &= \frac{1}{2} \left[ \left( \rho \frac{\partial \delta^o}{\partial \rho} + \delta^o \right)^2 - 1 \right], \quad \varepsilon_{(22)}^o = \frac{1}{2} ((\delta^o)^2 - 1) = \varepsilon_{(33)}^o, \quad \varepsilon_{ij}^o = 0, \quad i \neq j, \\ s_{(11)}^o &= \frac{\partial \Psi^o}{\partial A_1^o} + \left[ \left( \rho \frac{\partial \delta^o}{\partial \rho} + \delta^o \right)^2 - 1 \right] \frac{\partial \Psi^o}{\partial A_2^o} + \frac{3}{4} \left[ \left( \rho \frac{\partial \delta^o}{\partial \rho} + \delta^o \right)^2 - 1 \right]^2 \frac{\partial \Psi^o}{\partial A_3^o}, \quad (3) \\ s_{(22)}^o &= s_{(33)}^o = \frac{\partial \Psi^o}{\partial A_1^o} + ((\delta^o)^2 - 1) \frac{\partial \Psi^o}{\partial A_2^o} + \frac{3}{4} ((\delta^o)^2 - 1)^2 \frac{\partial \Psi^o}{\partial A_3^o}, \quad s_{(ij)}^o = s_{(ji)}^o = 0, \quad i \neq j, \\ t_{(11)}^o &= s_{(11)}^o \left( \rho \frac{\partial \delta^o}{\partial \rho} + \delta^o \right), \quad t_{(22)}^o = t_{(33)}^o = s_{(22)}^o \delta^o, \quad t_{(ij)}^o = 0, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

В возмущенном состоянии физические составляющие тензора деформаций Грина  $\varepsilon_{(ij)}$  принимают вид

$$\varepsilon_{(ij)} = (g_j^m + e_{(mj)}^o + \varepsilon_{jmk}\omega_{(k)}^o)(e_{(mi)}^o + \varepsilon_{jmk}\omega_{(k)}) + (g_i^m + e_{(mi)}^o + \varepsilon_{imk}\omega_{(k)}^o)(e_{(mj)}^o + \varepsilon_{imk}\omega_{(k)}).$$

Физические составляющие  $e_{(ij)}$ ,  $e_{(mj)}^o$  компонент тензора деформаций и поворота  $\omega_{(k)}$ ,  $\omega_{(k)}^o$  в возмущенном и основном состояниях, определенные с использованием физических составляющих вектора перемещений  $u_i$ ,  $u_i^o$ , имеют вид

$$e_{(ij)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{H_i \partial q^i} + \frac{\partial u_i}{H_j \partial q^j} - \frac{u_i}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial q^j} - \frac{u_j}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial q^i} + 2\delta_{ij} \frac{u_k}{H_i H_k} \frac{\partial H_i}{\partial q^k} \right),$$

$$2\omega_{(k)} = \frac{\varepsilon_{kij}}{2H_i H_j} \left( \frac{\partial (H_j u_j)}{\partial q^i} - \frac{\partial (H_i u_i)}{\partial q^j} \right),$$

где  $\varepsilon_{kij}$  — кососимметричный тензор Леви-Чивиты;  $H_i$  — параметры Ламе;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. В возмущенном состоянии физические составляющие несимметричного тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа определяются следующим образом:

$$t_{(11)} = \left( \rho \frac{\partial \delta^o}{\partial \rho} + \delta^o \right) s_{(11)} + e_{(11)} s_{(11)}^o, \quad t_{(22)} = \delta^o s_{(22)} + e_{(22)} s_{(22)}^o,$$

$$t_{(33)} = \delta^o s_{(33)} + e_{(33)} s_{(33)}^o, \quad t_{(12)} = \delta^o s_{(12)} + (e_{(21)} + \omega_{(3)}) s_{(11)}^o,$$

$$t_{(13)} = \delta^o s_{(13)} + (e_{(31)} + \omega_{(2)}) s_{(11)}^o, \quad t_{(23)} = \delta^o s_{(23)} + (e_{(32)} + \omega_{(1)}) s_{(22)}^o, \quad (4)$$

$$t_{(21)} = \left( \rho \frac{\partial \delta^o}{\partial \rho} + \delta^o \right) s_{(12)} + (e_{(12)} - \omega_{(3)}) s_{(22)}^o,$$

$$t_{(31)} = \left( \rho \frac{\partial \delta^o}{\partial \rho} + \delta^o \right) s_{(13)} + (e_{(13)} - \omega_{(2)}) s_{(33)}^o, \quad t_{(32)} = \delta^o s_{(23)} + (e_{(23)} - \omega_{(1)}) s_{(33)}^o.$$

Здесь  $s_{(ij)}^o$ ,  $s_{(ij)}$  — физические составляющие симметричного тензора напряжений, определенные в основном (3) и возмущенном состояниях:

$$s_{(11)} = (e_{(11)} + e_{(22)} + e_{(33)})(a + c) + e_{(11)}(c + f + b + p) + e_{(11)} \frac{\rho}{\delta^o} \frac{\partial \delta^o}{\partial \rho} (a + 2c + f + b + p),$$

$$s_{(22)} = s_{(33)} = (e_{(11)} + e_{(22)} + e_{(33)})a + e_{(11)}c + e_{(22)}b + e_{(11)} \frac{\rho}{\delta^o} \frac{\partial \delta^o}{\partial \rho} (a + c), \quad (5)$$

$$s_{(12)} = s_{(21)} = \frac{1}{2} (e_{(12)} - \omega_{(3)}) \frac{\rho}{\delta^o} \frac{\partial \delta^o}{\partial \rho} \left( b + \frac{p}{2} \right) + e_{(12)} \left( b + \frac{p}{2} \right),$$

$$s_{(13)} = s_{(31)} = \frac{1}{2} (e_{(13)} + \omega_{(2)}) \frac{\rho}{\delta^o} \frac{\partial \delta^o}{\partial \rho} \left( b + \frac{p}{2} \right) + e_{(13)} \left( b + \frac{p}{2} \right),$$

$$s_{(23)} = s_{(32)} = e_{(23)}b.$$

В (5) величины  $a, b, c, f, p$  являются функциями параметров невозмущенного состояния и упругого потенциала  $\Psi(A_1, A_2, A_3)$ .

Используя физические составляющие тензора напряжений (4), оператор Бельтрами [13] и введя переменные  $\theta, \chi$  в виде

$$\theta = \rho \frac{\partial u_1}{\partial \rho} + \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + 2u_1 + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial u_3}{\partial \lambda} + u_2 \operatorname{tg} \varphi; \quad (6)$$

$$\chi = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} + u_3 \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial u_2}{\partial \lambda} \right), \quad (7)$$

проведем ряд тождественных преобразований уравнения (2). При произвольной форме представления нелинейно-упругого потенциала получаем линеаризованное уравнение движения (2) полого шара в виде системы уравнений относительно переменных  $u_1$ ,  $\theta$ ,  $\chi$  и их производных:

$$\begin{aligned} A_1 \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + A_2 \theta + (A_3(\nabla^2 + 2) + \gamma \omega^2 \rho) u_1 + A_4 \frac{\partial u_1}{\partial \rho} + A_5 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \rho^2} = 0, \\ \nabla^2 \theta + K_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + K_2 \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + K_3 \theta + (K_4(\nabla^2 + 2) + K_5) u_1 + \\ + (K_6(\nabla^2 + 3) + K_7) \frac{\partial u_1}{\partial \rho} + K_8 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \rho^2} + K_9 \frac{\partial^3 u_1}{\partial \rho^3} = 0, \\ \nabla^2 \chi + L_1 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \rho^2} + L_2 \frac{\partial \chi}{\partial \rho} + L_3 \chi = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

(верхний индекс, обозначающий принадлежность к  $i$ -му слою, опущен). Линеаризованная система (8) является системой уравнений в частных производных относительно переменных, определяющих для каждого слоя радиальное перемещение точки  $u_1^{(i)} = u_1^{(i)}(\rho, \varphi, \lambda)$ , результирующую по главным направлениям деформацию точки (6) с точностью до значения радиуса  $\theta^{(i)}(\rho, \varphi, \lambda)/\rho$ , радиальное перемещение вследствие поворота вокруг точки (7)  $\chi^{(i)} = \chi^{(i)}(\rho, \varphi, \lambda)$ , которые находятся с точностью до постоянных. Выбор постоянных величин в выражениях для  $u_1^{(i)}$ ,  $\theta^{(i)}$ ,  $\chi^{(i)}$  проводится путем присоединения граничных условий, соответствующих состоянию устойчивого равновесия:

$$\begin{aligned} t_{(11)}^{(3)} = t_{(12)}^{(3)} = t_{(13)}^{(3)} \Big|_{\rho=\rho_4} = 0, \\ t_{(11)}^{(3)} = t_{(11)}^{(2)} \Big|_{\rho=\rho_3}, \quad u_1^{(3)} = u_1^{(2)} \Big|_{\rho=\rho_3}, \quad t_{(12)}^{(3)} = t_{(12)}^{(2)} = t_{(13)}^{(3)} = t_{(13)}^{(2)} \Big|_{\rho=\rho_3} = 0, \\ t_{(11)}^{(2)} = t_{(11)}^{(1)} \Big|_{\rho=\rho_2}, \quad u_1^{(2)} = u_1^{(1)} \Big|_{\rho=\rho_2}, \quad t_{(12)}^{(2)} = t_{(12)}^{(1)} = t_{(13)}^{(2)} = t_{(13)}^{(1)} \Big|_{\rho=\rho_2} = 0, \\ t_{(11)}^{(1)} = -\tilde{p}(\delta^0)^{(1)}(e_{(22)}^{(1)} + e_{(33)}^{(1)}) \Big|_{\rho=\rho_1}, \quad t_{(12)}^{(1)} = t_{(13)}^{(1)} \Big|_{\rho=\rho_1} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Система (8) решается методом разделения переменных [14]:

$$\begin{aligned} \theta^{(i)} = \sum_{m=0}^n \theta_{om}^{(i)}(\rho) M_m(\alpha) \cos m\lambda, \quad \alpha = \sin \varphi, \\ u_1^{(i)} = \sum_{m=0}^n u_{1om}^{(i)}(\rho) M_m(\alpha) \cos m\lambda, \\ \chi^{(i)} = \sum_{m=0}^n \chi_{om}^{(i)}(\rho) M_m(\alpha) \sin m\lambda, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Соответствующее разделение переменных можно также провести в граничных условиях.

Выполнив тождественные преобразования, для каждого слоя шара получаем систему дифференциальных уравнений с граничными условиями (9). При этом коэффициенты  $\theta_{om}^{(i)}(\rho)$ ,  $u_{1om}^{(i)}(\rho)$ ,  $\chi_{om}^{(i)}(\rho)$  являются собственными функциями для множества собственных

Таблица 1

Средние значения плотности и коэффициентов упругости и жесткости для различных слоев шара

Слой	$\lambda^{(i)}$ , ГПа	$\mu^{(i)}$ , ГПа	$\rho^{(i)*}$ , кг/м <sup>3</sup>
Внутренний ( $i = 1$ )	110,80	75,00	3300
Средний ( $i = 2$ )	83,56	63,80	3200
Внешний ( $i = 3$ )	39,65	42,73	3100

значений  $\omega_k^{(i)}$ . Соответствующие системы уравнений относительно коэффициентов перемещений вследствие поворота  $\chi_{om}^{(i)}(\rho)$  и коэффициентов радиальных перемещений  $u_{1om}^{(i)}(\rho)$  и результирующей деформации  $\theta_{om}^{(i)}(\rho)$  решаются методом Фробениуса.

Перемещения  $u_2^{(i)} = u_2^{(i)}(\rho, \varphi, \lambda)$ ,  $u_3^{(i)} = u_3^{(i)}(\rho, \varphi, \lambda)$  определяются из системы (6), (7), (10). Имеем

$$u_2^{(i)} = \sum_{m=0}^n u_{2om}^{(i)}(\rho) R_2[P_n^m(\alpha)] \cos m\lambda, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{11}$$

$$u_3^{(i)} = \sum_{m=0}^n u_{3om}^{(i)}(\rho) R_3[P_n^m(\alpha)] \sin m\lambda, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где  $R_2[P_n^m(\alpha)]$ ,  $R_3[P_n^m(\alpha)]$  — дробно-рациональные функции присоединенных функций Лежандра  $P_n^m(\alpha)$ , имеющие устранимые разрывы в точках, в которых их знаменатели равны нулю.

Конкретизируя закон состояния  $\Psi(A_1, A_2, A_3)$  для каждого слоя шара, можно получить и решить системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения (10). Каждая из полученных систем линейных уравнений имеет ненулевое решение, если соответствующий определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю. Исследование множества собственных значений  $\omega_n^{(i)}$  позволяет определить возможные поля перемещений, деформаций и напряжений устойчивого равновесия для каждого слоя шара.

**3. Результаты численно-графического анализа.** Численно-графический анализ выполнен для модели РЕМ-А [7] с выделением трех слоев. Верхний слой моделирует литосферу толщиной  $h_3 = 80$  км, радиусом  $6291 \div 6371$  км, средний слой — астеносферу толщиной  $h_2 = 140$  км, радиусом  $6151 \div 6291$  км, нижний слой — подастеносферную мантию толщиной  $h_1 = 200$  км, радиусом  $5951 \div 6151$  км,  $H = h_1 + h_2 + h_3 = 420$  км,  $R_0 = 6371$  км. Для расчетов ограничимся основной частью потенциала Мурнагана [9], записанного с использованием алгебраических инвариантов:

$$\Psi^{(i)} = \lambda^{(i)}(A_1^{(i)})^2/2 + \mu^{(i)}A_2^{(i)}.$$

В соответствии с [7] используем в расчетах средние значения плотности  $\rho^{(i)*}$ , коэффициентов упругости  $\lambda^{(i)}$  и жесткости  $\mu^{(i)}$  для различных слоев шара при  $\tilde{p} = 15,98$  ГПа (табл. 1).

В основном состоянии движение среды является устойчивым и характеризуется радиально-симметричной деформацией [13, 15]. В общем случае малое перемещение среды как твердого тела является геометрической суммой линейного перемещения  $u_i$  точки и перемещения  $\chi$  вследствие поворота вокруг этой точки [13]. В радиально-симметричном основном состоянии составляющие перемещения вследствие поворота равны нулю. Распределение параметра  $\chi^{(i)} = \chi^{(i)}(\rho, \varphi, \lambda)$  характеризует перемещение вследствие поворота

Таблица 2

Амплитуды значений радиальной деформации  
и результирующей по главным направлениям деформации  
в состоянии устойчивого равновесия для различных слоев шара

Слой	$\varepsilon_{(11)}^{(i)}$	$\theta^{(i)}$
Внутренний ( $i = 1$ )	$0 \leq  \varepsilon_{(\rho\rho)}^{(1)}  \leq 10^{-9}$	$0 \leq  \theta^{(1)}  \leq 10^{-9}$
Средний ( $i = 2$ )	$0 \leq  \varepsilon_{(\rho\rho)}^{(2)}  \leq 1,5 \cdot 10^{-9}$	$0 \leq  \theta^{(2)}  \leq 10^{-9}$
Внешний ( $i = 3$ )	$0 \leq  \varepsilon_{(\rho\rho)}^{(3)}  \leq 2,5 \cdot 10^{-10}$	$0 \leq  \theta^{(3)}  \leq 10^{-9}$

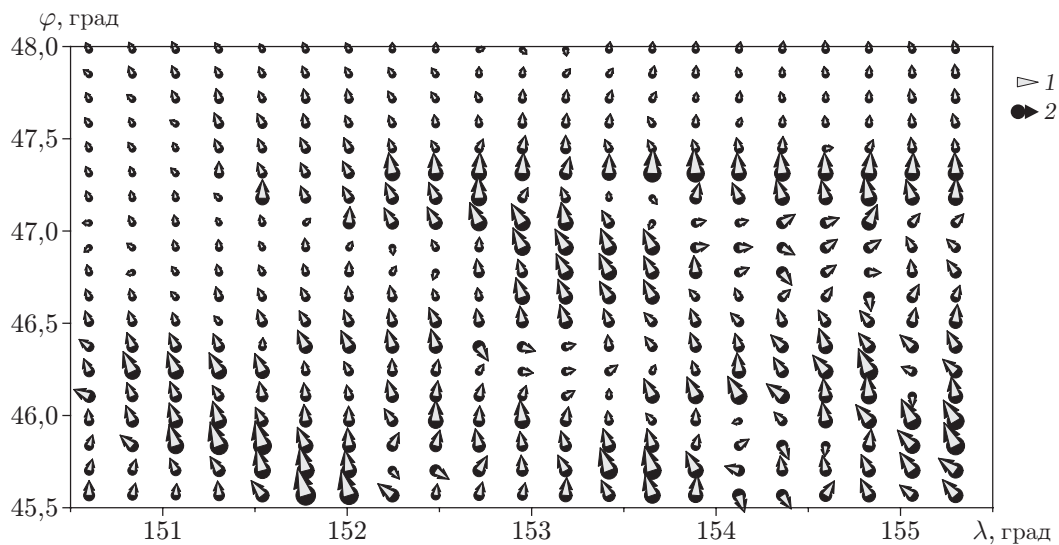


Рис. 1. Распределение градиентов интенсивности деформаций в области  $45,5 \div 48,0^\circ$  с. ш.,  $150,5 \div 155,5^\circ$  в. д. при  $\tau = 2 \cdot 10^6$  лет в слое, моделирующем литосферу: 1 — на глубине 20 км, 2 — на дневной поверхности при  $\rho = 6371$  км

точек в возмущенном состоянии. Абсолютные значения амплитуд перемещений вследствие поворота имеют тот же порядок, что и линейные перемещения точек [15].

В табл. 2 приведены амплитуды радиальных деформаций  $\varepsilon_{(\rho\rho)}^{(i)} = \varepsilon_{(\rho\rho)}^{(i)}(\rho, \varphi, \lambda)$  и результирующей по главным направлениям деформации  $\theta^{(i)} = \theta^{(i)}(\rho, \varphi, \lambda)/\rho$  в точках слоев шара за время  $\tau = 2 \cdot 10^6$  лет в возмущенном состоянии. Порядок значений радиальных деформаций позволяет определить расположение зон утончения слоев и искривления контура шара. При этом радиальная деформация в точках среднего слоя, моделирующего астеносферу, достигает значений порядка  $10^{-9}$ , максимальные значения радиальных деформаций в точках внешнего слоя, моделирующего литосферу, меньше: до  $10^{-10}$ . Во внешнем слое, моделирующем литосферу, результирующая по главным направлениям деформация  $\theta^{(i)} = \theta^{(i)}(\rho, \varphi, \lambda)/\rho$  на порядок больше радиальной составляющей деформации. Следовательно, при устойчивом равновесии в этом слое результирующая по главным направлениям деформация определяется компонентами  $\varepsilon_{(\varphi\varphi)}^{(3)}$ ,  $\varepsilon_{(\lambda\lambda)}^{(3)}$ ; а сдвиговая — компонентами  $\varepsilon_{(\rho\varphi)}^{(3)}$ ,  $\varepsilon_{(\varphi\lambda)}^{(3)}$ .

В качестве примера рассмотрим результаты расчета возможных полей деформаций и напряжений в слое, моделирующем литосферу в области Центральных Курил ( $45,5 \div 48,0^\circ$  с. ш.,  $150,5 \div 155,5^\circ$  в. д.). На рис. 1 показано векторное поле градиентов

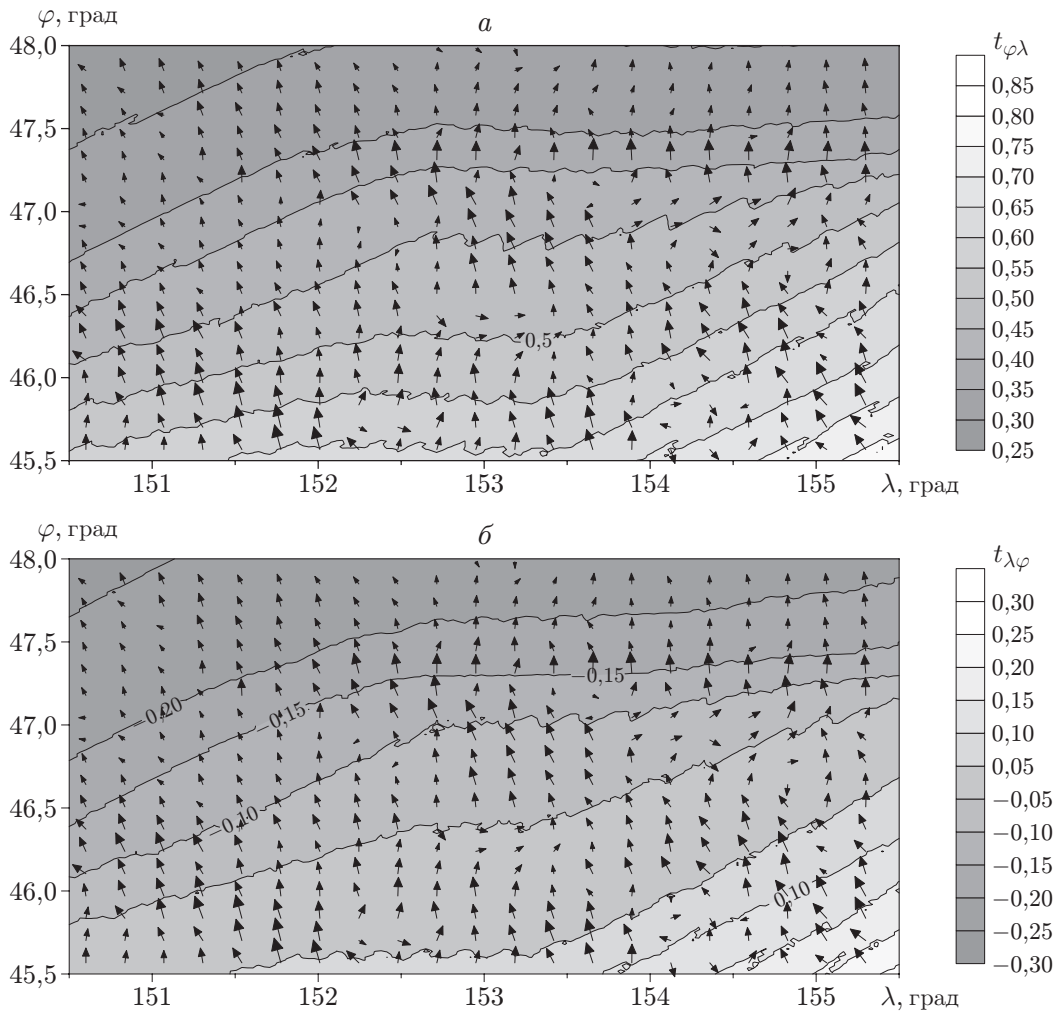


Рис. 2. Контурное распределение касательных напряжений и векторное распределение их градиентов в области  $45,5 \div 48,0^\circ$  с. ш.,  $150,5 \div 155,5^\circ$  в. д. при  $\tau = 2 \cdot 10^6$  лет на дневной поверхности слоя, моделирующего литосферу:  
*a* —  $t_{\varphi\lambda}$ , *б* —  $t_{\lambda\varphi}$

интенсивности деформаций в этой области на дневной поверхности при  $\rho = R_0 = 6371$  км и на глубине 20 км. Интенсивность деформации — это положительно определенный безразмерный результирующий параметр для всех компонент тензора деформаций в текущей точке [11]. На дневной поверхности максимальное значение интенсивности деформации равно 0,3663, минимальное — 0,0027; на глубине 20 км максимальное значение интенсивности деформации равно 0,7086, минимальное — 0,0026. На рис. 1 максимальная длина вектора соответствует градиенту интенсивности деформации, который достигает значения 0,217. Чем больше длина вектора, тем бóльшая деформация возможна в этой зоне. Активные зоны определяются на глубине 20 км, по структурным изменениям на дневной поверхности можно судить о наличии этих зон.

Результаты расчетов показывают, что ближе к поверхности нормальные компоненты тензора напряжений на порядок меньше касательных напряжений (4)  $t_{\varphi\lambda} = t_{(23)}$  и  $t_{\lambda\varphi} = t_{(32)}$  на дневной поверхности (рис. 2). На рис. 2 видно, что компонента  $t_{\varphi\lambda}$  является положительно определенной ( $0,25 \div 0,85$  ГПа), а компонента  $t_{\lambda\varphi}$  — отрицательно



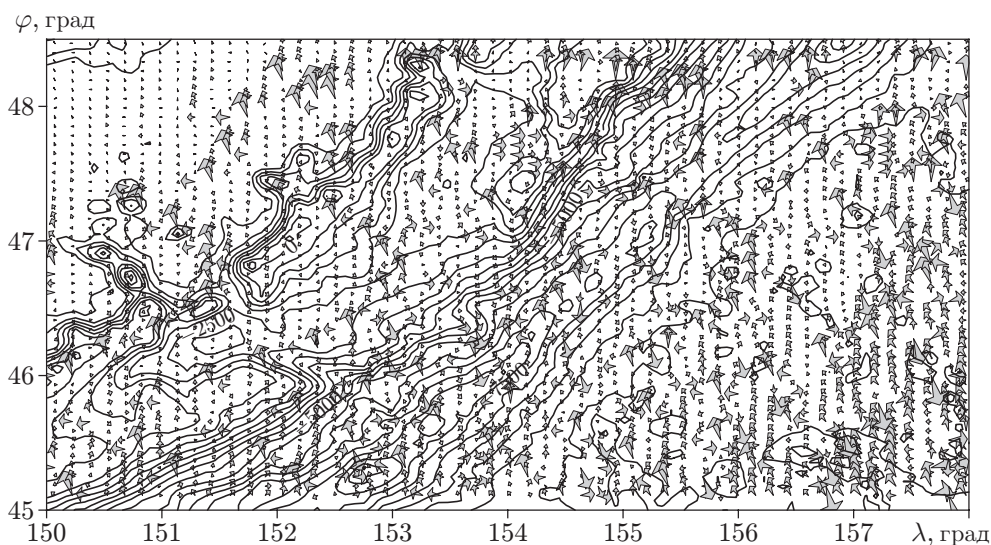


Рис. 3. Рельеф поверхности (линии) [16] и распределение градиентов результирующего поля напряжений (стрелки) в области  $45,0 \div 48,5^\circ$  с. ш.,  $150,0 \div 158,0^\circ$  в. д. при  $\tau = 2 \cdot 10^6$  лет на дневной поверхности слоя, моделирующего литосферу

определенной ( $-0,3 \div 0,3$  ГПа) на большей части расчетной области. На рис. 2 показаны активные зоны с максимальными значениями разности напряжений в соседних точках расчетной сетки  $0,868$  и  $0,834$  ГПа. Поскольку каждая из активных зон имеет разный градиент напряжений, при любом тектоническом воздействии на область деформационный отклик в указанных зонах будет различаться по величине и направлению. В некоторых из указанных зон напряжения могут релаксировать и достигнуть одинаковых значений, в других зонах моделируемой области градиент напряжений может увеличиваться. Закономерности релаксации и увеличения напряжений в указанных зонах можно моделировать дополнительно с учетом направленности и механизма тектонического действия. На рис. 3 показаны рельеф поверхности по данным ETOPO2 [16] и распределение градиентов результирующего поля напряжений, полученные на другой расчетной сетке и в другом масштабе ( $45,0 \div 48,5^\circ$  с. ш.,  $150,0 \div 158,0^\circ$  в. д.) на дневной поверхности. Повышение точности расчетов позволяет получить более детальное распределение активных зон.

**Заключение.** Полученное решение позволяет детально описать напряженно-деформированное состояние шара в каждой текущей точке и таким образом определить возможный вклад каждой компоненты вектора и тензора в результирующие параметры. Полученные поля перемещений, поворотов и деформаций определяются заданными физико-механическими свойствами и граничными условиями. Поведение параметров описывает состояние устойчивого равновесия, которое характеризуется наличием зон искривления контура шара, полей поворотов, результирующего поля градиентов напряжений, преобладанием горизонтальных перемещений над вертикальными, взаимосвязью деформирования на поверхностных и глубинных уровнях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Деформация упругой сферы в связи с вопросом о строении Земли // Собрание трудов АН СССР. М.: Изд-во АН СССР, 1955. Т. 4. С. 186–266.
2. Баев Л. В., Солодовников В. Н. Решение задачи о гравитационном сжатии слоистого шара (на примере Земли) // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 6. С. 103–115.

3. **Ребецкий Ю. Л., Михайлова А. В.** Роль силы гравитации в формировании глубинной структуры сдвиговых зон // Геодинамика и тектонофизика. 2011. Т. 2, № 1. С. 45–67.
4. **Панин В. Е.** Основы физической мезомеханики // Физ. мезомеханика. 1998. № 1. С. 5–22.
5. **Гуревич Г. И.** Об исходных предпосылках подхода к моделированию в тектонике // Некоторые вопросы механики деформируемых сред: Сб. науч. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 75–144.
6. **Черных К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988.
7. **Dziewonski A. M., Hales A. L., Lapwood E. R.** Parametrically simple Earth models consistent with geophysical data // Phys. Earth Planet. Interiors. 1975. V. 10. P. 12–48.
8. **Birch F.** Elasticity and constitution of the Earth's interior // J. Geophys. Res. 1952. V. 57. P. 227–286.
9. **Murnaghan F. D.** Finite deformation of an elastic solid. N. Y.: John Wiley and Sons, 1951.
10. **Biot M. A.** Non-linear theory of elasticity and the linearized case for a body under initial stress // Philos. Mag. 1939. V. 27. P. 89–115.
11. **Гузь А. Н.** Основы теории упругой устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища шк., 1986.
12. **Болотин В. В.** Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961.
13. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.
14. **Морс Ф. М.** Методы теоретической физики / Ф. М. Морс, Г. Фешбах. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. Т. 1.
15. **Осипова Е. Б.** Конечные деформации и устойчивость равновесия сжимаемого упругого полого шара при следящем внутреннем давлении // Физ. мезомеханика. 2009. Т. 12, № 6. С. 79–86.
16. **Цифровая** модель рельефа ETOPO2 (National Geophysical Data Center, 1988). [Электрон. ресурс]. Режим доступа: [http://topex.ucsd.edu/cgi-bin/get\\_data.cgi](http://topex.ucsd.edu/cgi-bin/get_data.cgi).

*Поступила в редакцию 28/VIII 2013 г.,  
в окончательном варианте — 30/VI 2014 г.*

---