

УДК 532.582.2

## ОТРЫВНОЙ УДАР КРУГЛОГО ДИСКА, ПЛАВАЮЩЕГО НА ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

М. В. Норкин

Южный федеральный университет, 344090 Ростов-на-Дону  
E-mail: norkin@math.rsu.ru

Рассматривается пространственная смешанная задача об отрывном ударе круглого диска, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой неограниченной жидкости. Положение и форма области контакта тела с жидкостью (так же как и зоны отрыва) заранее неизвестны и зависят от соотношения между поступательной и угловой скоростями, приобретенными диском в результате удара. Вследствие этого данная задача является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами. Для решения поставленной задачи применяется метод нелинейных граничных интегральных уравнений типа уравнений Гаммерштейна. Такой подход позволяет одновременно определять течение жидкости после удара и неизвестную заранее зону отрыва частиц жидкости.

Ключевые слова: идеальная жидкость, круглый диск, удар с отрывом, линия отрыва.

Исследования нелинейных задач гидродинамического удара начаты в работе [1], где найдено точное решение плоской задачи о горизонтальном ударе пластины, и продолжены в работах [2–4], в которых рассматривались задачи о горизонтальном и косом боковом ударе эллипса. В первых работах, посвященных изучению удара с отрывом, отмечалось, что неучет явления отрыва при определении точки отрыва, а также импульсных сил и момента приводит к большим погрешностям. Результаты специально поставленного эксперимента подтвердили основное теоретическое предположение о наличии отрыва частиц жидкости от поверхности эллипса [2]. Численный анализ плоской задачи об отрывном ударе плавающих тел проведен в [5]. Во всех указанных исследованиях жидкость предполагалась идеальной, несжимаемой, однородной и неограниченной.

Плоские задачи об ударе с отрывом в случае ограниченной области жидкости рассматривались в работе [6], в которой предложены следующие методы решения задач об отрывном ударе пластины: 1) прямой асимптотический метод, основанный на предположении о том, что стенки бассейна удалены от плавающего тела на большие расстояния; 2) метод, базирующийся на использовании техники конформных отображений и математического аппарата парных интегральных уравнений. Следует отметить, что во втором методе для определения неизвестной заранее точки отрыва пластины применен вариационный принцип Огазо. На основе этих методов исследован ряд задач для ограниченных областей классической формы (слой, усеченная круговая лунка).

В [7] изучена задача об отрывном ударе эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. С помощью метода нелинейных граничных интегральных уравнений типа уравнений Гаммерштейна данная

задача сводится к одному нелинейному интегральному уравнению, для решения которого применяется метод М. А. Красносельского [8]. Отметим, что такой подход позволяет одновременно определить потенциал скоростей и неизвестную заранее зону отрыва частиц жидкости.

В работе [9] метод нелинейных интегральных уравнений типа уравнений Гаммерштейна предложен для решения статических контактных задач теории упругости с неизвестными заранее областями контакта. Подробные обзоры контактных задач, для решения которых применялся этот метод, приводятся в [10, 11].

Следует отметить работу [12], в которой предложена математическая модель удара с отрывом в неоднородной несжимаемой жидкости. Важным результатом, полученным в [12], является доказательство теоремы существования и единственности решения задачи об ударе с отрывом.

Отметим также, что близкая по математической постановке задача о быстром входе тела в воду рассматривалась в работе [13]. Данная задача сводится к вариационному неравенству, которое решается численно для произвольной формы тела.

Во всех перечисленных работах задача об ударе с отрывом рассматривалась в плоской постановке, где неизвестными оказывались точки отрыва, отделяющие на поверхности плавающего тела зоны безотрывного удара от зон отрыва. Особенность настоящей работы заключается в том, что здесь неизвестной является кривая, вследствие чего скалярная задача становится бесконечномерной.

**1. Постановка задачи и ее сведение к нелинейному интегральному уравнению типа уравнения Гаммерштейна.** Рассматривается задача о вертикальном ударе круглого абсолютно твердого диска, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, занимающей все нижнее полупространство. Предполагается, что в результате удара происходит отрыв частиц жидкости от поверхности диска (удар с отрывом). Согласно [1, 12] потенциал скоростей  $\Phi$ , приобретенных частицами жидкости в результате удара, определяется решением смешанной краевой задачи теории потенциала с неизвестной априори областью контакта:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= 0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} &= V_n, \quad \Phi \leq 0, \quad r \in S_{11}, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} &\geq V_n, \quad \Phi = 0, \quad r \in S_{12}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\Phi = 0, \quad r \in S_2,$$

$$\Phi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty;$$

$$V_n = v_0 - \omega x;$$

$$\int_D (\nabla\Phi)^2 dD < \infty. \tag{1.2}$$

Здесь  $v_0, \omega$  — поступательная и угловая скорости, приобретенные диском в результате удара;  $S_1 = \{z = 0, 0 < r < a\} = S_{11} \cup S_{12}$  — поверхность диска;  $S_{11}$  — часть границы, на которой не происходит отрыва частиц жидкости;  $S_{12}$  — зона отрыва;  $S_2 = \{z = 0, a < r < \infty\}$  — свободная поверхность жидкости;  $a$  — радиус диска;  $D = \{-\infty < x, y < \infty, z > 0\}$  — область, занятая жидкостью (рис. 1). Декартовы координаты  $x, y, z$  введены таким образом, что оси  $x$  и  $y$  расположены в плоскости свободной поверхности жидкости, ось  $z$  направлена вертикально вниз в глубь жидкости; начало координат находится

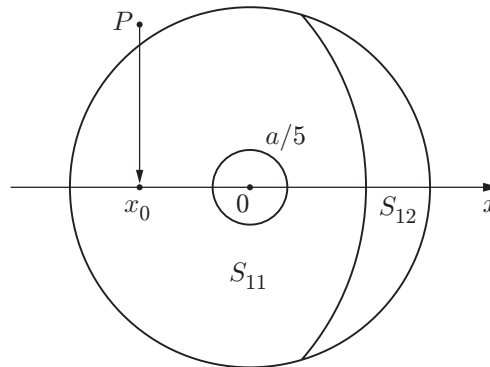


Рис. 1. Постановка задачи:

$S_{11}$  — зона, в которой не происходит отрыва частиц жидкости;  $S_{12}$  — зона отрыва

в центре диска. Не уменьшая общности рассуждений, будем считать, что вращение диска происходит вокруг оси  $y$  ( $\omega > 0$ ).

Условие (1.2), постулирующее конечность кинетической энергии течения жидкости после удара, замыкает математическую постановку задачи. Теорема существования и единственности решения задачи об ударе с отрывом доказана в работе [12].

Для полного решения задачи необходимо также учесть уравнения изменения импульса и момента импульса круглого диска при ударе. С помощью этих уравнений устанавливается связь между внешним ударным импульсом  $P = (0, 0, P_z)$  и точкой его приложения  $R_0 = (x_0, 0, 0)$ , с одной стороны, и поступательной и угловой скоростями  $v_0$  и  $\omega$ , приобретенными диском в результате удара, — с другой. В пренебрежении массой и моментом инерции диска из указанных уравнений следуют соотношения

$$I = -P_z, \quad M = x_0 P_z, \quad I = \rho \iint_{S_1} \Phi ds, \quad M = -\rho \iint_{S_1} x \Phi ds, \quad (1.3)$$

где  $I$ ,  $M$  — импульс и момент импульса, полученные плавающим диском в результате удара со стороны жидкости;  $\rho$  — плотность жидкости.

Рассматриваемая задача осложнена тем, что линия отрыва, отделяющая на поверхности диска зону безотрывного удара от зоны отрыва, заранее неизвестна и подлежит определению в процессе решения задачи. Вследствие этого данная задача является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами.

Отметим, что условие отрыва частиц жидкости от поверхности диска (так же как и условие безотрывности удара) определяется точно на основе решения соответствующей линейной задачи о безотрывном ударе круглого диска. Согласно [14] это условие имеет вид

$$3v_0/(2\omega a) < 1.$$

Данное неравенство означает, что точка приложения внешнего ударного импульса находится вне круга радиусом  $a/5$  с центром в центре диска (см. рис. 1). В противном случае удар является безотрывным.

Для решения поставленной задачи применяется метод нелинейных граничных интегральных уравнений типа уравнений Гаммерштейна [7–11]. Такой подход позволяет одновременно определить потенциал скоростей и неизвестную заранее линию отрыва, отделяющую на поверхности диска зону безотрывного удара от зоны отрыва. В [7] с помощью этого метода решены некоторые плоские задачи о гидродинамическом ударе. В соответствии с [7] задачу (1.1), (1.2) можно свести к нелинейному интегральному уравнению.

Наряду с исходной нелинейной задачей будем рассматривать линейную смешанную краевую задачу в полупространстве с круговой областью раздела граничных условий:

$$\Delta W = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_{S_1} = f(x, y), \quad (W)_{S_2} = 0, \quad (W)_\infty = 0. \quad (1.4)$$

Здесь  $f(x, y)$  — четная по переменной  $y$  непрерывная функция.

В дальнейшем важную роль будет играть линейный оператор  $K$ , ставящий в соответствие нормальной производной функции  $W$  на  $S_1$  решение задачи (1.4) на  $S_1$ :

$$K(f) = W. \quad (1.5)$$

С учетом (1.5) задача об отрывном ударе круглого диска сводится к следующей системе односторонних ограничений для новой функции  $u$ , определенной на  $S_1$ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial n} - V_n; \\ -K(u) &\geq K(V_n), \quad u = 0, \quad r \in S_{11}, \\ -K(u) &= K(V_n), \quad u \geq 0, \quad r \in S_{12}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Линию отрыва можно определить из условия, содержащегося в системе (1.6), которая может быть сведена к одному нелинейному интегральному уравнению вида [7–11]

$$Tv = 0, \quad Tv = \mu v^- - K(v^+) - K(V_n). \quad (1.7)$$

Здесь  $\mu$  — произвольный положительный параметр; нелинейные операторы  $v^-$  и  $v^+$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} v^- &= v^-(M) = \inf \{v(M), 0\}, \quad v^+ = v^+(M) = \sup \{v(M), 0\}, \\ v(M) &= v^-(M) + v^+(M). \end{aligned}$$

Связь между решениями системы (1.6) и нелинейным уравнением (1.7) имеет вид

$$u = (v^*)^+, \quad S_{12} = \{(x, y) \in S_1: v^*(x, y) \geq 0\}.$$

Таким образом, для решения системы (1.6) достаточно найти решение  $v^*$  нелинейного уравнения (1.7). При этом неизвестная априори зона отрыва  $S_{12}$  определяется как множество всех точек  $(x, y) \in S_1$ , для которых выполняется неравенство  $v^*(x, y) \geq 0$ . Представляет интерес определение линии отрыва, разделяющей множества  $S_{12}$  и  $S_{11} = S_1 \setminus S_{12}$ .

Решив уравнение (1.7), потенциал скоростей  $\Phi$  на границе  $S_1$  можно найти по формуле

$$\Phi = K((v^*)^+ + V_n).$$

**2. Построение оператора  $K$ .** Согласно [15] решение задачи (1.4) будем искать в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  в виде косинус-ряда Фурье по угловой координате  $\varphi$ :

$$W(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\varphi \int_0^{\infty} A_n(\lambda) e^{-\lambda z} J_n(\lambda r) d\lambda, \quad (2.1)$$

где  $A_n(\lambda)$  — произвольные функции;  $J_n(\lambda r)$  — функции Бесселя. Тогда уравнение Лапласа и условие на бесконечности будут выполнены. Далее, удовлетворяя смешанным краевым условиям при  $z = 0$ , для определения неизвестных функций  $A_n(\lambda)$  получаем систему парных уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\varphi \int_0^{\infty} \lambda A_n(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda = -f_0(r, \varphi), \quad 0 < r < a; \quad (2.2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\varphi \int_0^{\infty} A_n(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda = 0, \quad a < r < \infty, \quad (2.3)$$

где  $f_0(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ . Решение системы (2.2), (2.3) основано на использовании разрывных интегралов вида [15]

$$\int_0^{\infty} \sqrt{\lambda} J_{n+1/2}(\lambda t) J_n(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < r, \\ \frac{\sqrt{2} r^n}{\sqrt{\pi} t^{n+1/2} \sqrt{t^2 - r^2}}, & 0 < r < t; \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\int_0^{\infty} \sqrt{\lambda} J_{n+1}(\lambda r) J_{n+1/2}(\lambda t) d\lambda = \begin{cases} 0, & 0 < r < t, \\ \frac{\sqrt{2} t^{n+1/2}}{\sqrt{\pi} r^{n+1} \sqrt{r^2 - t^2}}, & r > t. \end{cases} \quad (2.5)$$

Полагая

$$A_n(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi \lambda}{2}} \int_0^a \sqrt{t} \varphi_n(t) J_{n+1/2}(\lambda t) dt \quad (2.6)$$

и учитывая (2.4), можно удовлетворить второму уравнению системы (2.3) для любых непрерывных функций  $\varphi_n(t)$ . Затем, находя коэффициенты разложения функции  $f_0(r, \varphi)$  в ряд Фурье по косинусам, на основе (2.6) получаем равенство

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \lambda^{3/2} J_n(\lambda r) d\lambda \int_0^a \sqrt{t} \varphi_n(t) J_{n+1/2}(\lambda t) dt = F_n(r), \quad 0 < r < a,$$

$$F_0(r) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f_0(r, \varphi) d\varphi, \quad F_n(r) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_0(r, \varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Используя известное соотношение [15]

$$\lambda J_n(\lambda r) = r^{-n-1} [r^{n+1} J_{n+1}(\lambda r)]'_r,$$

последнее уравнение запишем в виде

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dr} \int_0^{\infty} r^{n+1} J_{n+1}(\lambda r) \sqrt{\lambda} d\lambda \int_0^a \sqrt{t} \varphi_n(t) J_{n+1/2}(\lambda t) dt = r^{n+1} F_n(r).$$

Интегрируя данное равенство по переменной  $r$ , а затем меняя порядок интегрирования и используя разрывный интеграл (2.5), получим интегральное уравнение Шлемильха

$$\int_0^r \frac{t^{n+1} \varphi_n(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \int_0^r F_n(\rho) \rho^{n+1} d\rho,$$

решение которого имеет вид

$$t^{n+1} \varphi_n(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \int_0^r F_n(\rho) \rho^{n+1} d\rho.$$

Интегрируя это решение по частям и внося производную под знак интеграла, для функции  $\varphi_n(t)$  получим следующее выражение:

$$t^n \varphi_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{r^{n+1} F_n(r) dr}{\sqrt{t^2 - r^2}}. \quad (2.7)$$

Таким образом, решением задачи (1.4) являются формулы (2.1), (2.6), (2.7). Для построения оператора  $K$  остается найти функцию  $W$  на поверхности диска. Подставляя (2.6) в (2.1) и используя разрывный интеграл (2.4), имеем

$$W(r, \varphi, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\varphi \int_r^a \frac{r^n \varphi_n(t) dt}{t^n \sqrt{t^2 - r^2}}.$$

Выражая функции  $\varphi_n(t)$  через интегралы, содержащие функцию  $f_0(r, \varphi)$ , получим равенство

$$\begin{aligned} W(r, \varphi, 0) = & -\frac{2}{\pi^2} \int_r^a \frac{dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \int_0^t \frac{s ds}{\sqrt{t^2 - s^2}} \int_0^\pi f_0(s, \theta) d\theta - \\ & - \frac{4}{\pi^2} \int_r^a \frac{dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \int_0^t \frac{s ds}{\sqrt{t^2 - s^2}} \int_0^\pi f_0(s, \theta) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{rs}{t^2}\right)^n \cos n\varphi \cos n\theta d\theta, \end{aligned}$$

которое после преобразования произведения косинусов в их сумму и суммирования ряда [16]

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{rs}{t^2}\right)^n [\cos n(\varphi - \theta) + \cos n(\varphi + \theta)] = \\ = \frac{t^4 - t^2 rs \cos(\varphi - \theta)}{t^4 - 2t^2 rs \cos(\varphi - \theta) + r^2 s^2} + \frac{t^4 - t^2 rs \cos(\varphi + \theta)}{t^4 - 2t^2 rs \cos(\varphi + \theta) + r^2 s^2} - 2 \end{aligned}$$

принимает вид

$$\begin{aligned} W(r, \varphi, 0) = & -\frac{2}{\pi^2} \int_r^a \frac{dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \int_0^t \frac{s ds}{\sqrt{t^2 - s^2}} \int_0^\pi f_0(s, \theta) \times \\ & \times \left[ \frac{t^4 - t^2 rs \cos(\varphi - \theta)}{t^4 - 2t^2 rs \cos(\varphi - \theta) + r^2 s^2} + \frac{t^4 - t^2 rs \cos(\varphi + \theta)}{t^4 - 2t^2 rs \cos(\varphi + \theta) + r^2 s^2} - 1 \right] d\theta. \end{aligned}$$

Отсюда, меняя порядок интегрирования по переменным  $t$  и  $s$  и преобразуя выражение в квадратных скобках с помощью некоторых элементарных операций, получим следующее представление оператора  $K$ :

$$\begin{aligned} K(f)(r, \varphi) = W(r, \varphi, 0) = & \frac{1}{\pi^2} \int_0^a \int_0^\pi s f_0(s, \theta) K(r, \varphi; s, \theta) ds d\theta, \\ K(r, \varphi; s, \theta) = & \int_r^a \frac{r^2 s^2 - t^4}{\sqrt{(t^2 - r^2)(t^2 - s^2)}} K_1(t, r, s, \varphi, \theta) dt, \end{aligned}$$

$$K_1(t, r, s, \varphi, \theta) = \frac{1}{t^4 - 2t^2rs \cos(\varphi - \theta) + r^2s^2} + \frac{1}{t^4 - 2t^2rs \cos(\varphi + \theta) + r^2s^2}.$$

Здесь  $p = r$  при  $s < r$  и  $p = s$  при  $s > r$ . В случае  $s = r$ ,  $\varphi \neq \theta$  выражение для ядра получается предельным переходом при  $s \rightarrow r$ .

**3. Численная реализация и анализ результатов.** Для численного решения нелинейного интегрального уравнения (1.7) применяется модифицированный метод Ньютона — Канторовича:

$$v_{n+1} = v_n - (T'v_0)^{-1}T'v_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Здесь в качестве начального приближения выбирается функция  $v_0(x) \equiv -c$  ( $c = \text{const}$ ,  $c > 0$ ). В этом случае производная Фреше  $T'v_0$  оператора  $T: C(S_1) \rightarrow C(S_1)$  существует и представляет собой линейный оператор вида

$$T'v_0 = \mu E,$$

где  $E$  — единичный оператор. В результате решение нелинейного интегрального уравнения (1.7) сводится к явному итерационному процессу

$$v_{n+1} = v_n - \mu^{-1}T'v_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.1)$$

Алгоритм данного метода позволяет одновременно находить потенциал скоростей  $\Phi$  и неизвестную заранее линию отрыва, отделяющую зону безотрывного удара  $S_{11}$  от зоны отрыва  $S_{12}$ . Дискретизация уравнения осуществляется с учетом симметрии решения  $v^*$  относительно оси  $x$ , при этом рассматривается только верхняя половина диска. Особенность в ядре интегрального оператора  $K$  сглаживается по формулам

$$\begin{aligned} f_0(s, \theta) &= [f_0(s, \theta) - f_0(r, \theta)] + [f_0(r, \theta) - f_0(r, \varphi)] + f_0(r, \varphi), \\ K(f)(r, \varphi) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^a \int_0^\pi s [f_0(s, \theta) - f_0(r, \theta)] K(r, \varphi; s, \theta) d\theta ds + \\ &+ \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi [f_0(r, \theta) - f_0(r, \varphi)] \int_0^a s K(r, \varphi; s, \theta) ds d\theta - \frac{2}{\pi} f_0(r, \varphi) \sqrt{a^2 - r^2}. \end{aligned}$$

Отметим, что при любом фиксированном  $s \neq r$  внутренний интеграл по угловой координате  $\theta$  особенности не имеет, а при  $s \rightarrow r$  он стремится к нулю. Другой внутренний интеграл по переменной  $s$  при любом фиксированном  $\theta \neq \varphi$  также не имеет особенности, а при  $\theta \rightarrow \varphi$  этот интеграл как функция параметров  $\theta$  и  $\varphi$  имеет слабую логарифмическую особенность, которая сглаживается разностью  $f_0(r, \theta) - f_0(r, \varphi)$ . Для вычисления повторных интегралов используется формула средних прямоугольников.

При численной реализации метода нелинейных интегральных уравнений решается задача определения ядра  $K(r, \varphi; s, \theta)$ , не связанная с итерационным процессом (3.1). После перехода к полярным координатам и замены переменных  $\varphi \rightarrow \pi\varphi$ ,  $r \rightarrow ar$  вводится равномерная сетка:  $\varphi_m = (2m - 1)/(2m)$ ,  $r_k = (2k - 1)/(2k)$ ,  $m, k = 1, \dots, n$ . По окончании итерационного процесса находится приближенное решение  $v^*(\varphi, r)$  нелинейного интегрального уравнения (1.7), определяемое в узлах сетки. Это решение отрицательно в зоне безотрывного удара  $S_{11}$  и положительно в зоне отрыва  $S_{12}$ . Для определения линии отрыва, отделяющей на поверхности диска зону безотрывного удара от зоны отрыва, фиксируется угловая координата  $\varphi = \varphi_m$  и находится значение  $r$ , при котором меняется знак функции  $v^*(\varphi_m, r)$ . Затем в окрестности предполагаемого корня строится интерполяционный многочлен Лагранжа, корень которого определяется методом половинного деления. Таким

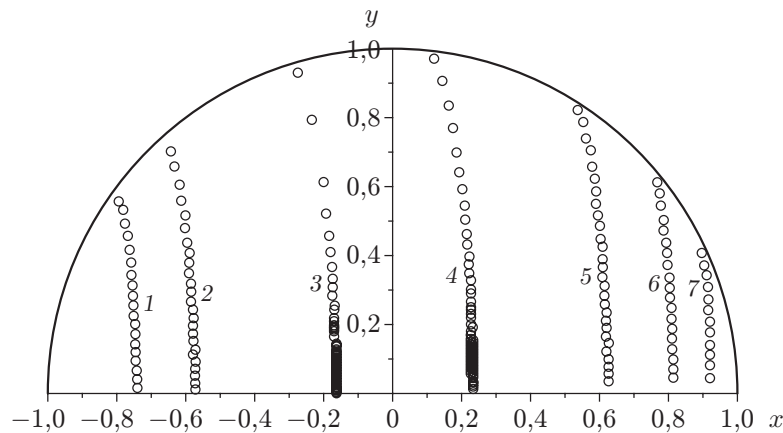


Рис. 2. Верхние половины линий отрыва диска:  
 1 —  $\alpha = -0,8$ ; 2 —  $\alpha = -2/3$ ; 3 —  $\alpha = -1/3$ ; 4 —  $\alpha = 0$ ; 5 —  $\alpha = 1/3$ ; 6 —  $\alpha = 0,5$ ;  
 7 —  $\alpha = 0,6$

Таблица 1  
 Значения компонент полного ударного импульса и момента

$\alpha$	$I$	$M$	$x_0$	$\alpha$	$I$	$M$	$x_0$
-0,80	-0,001	-0,001	-0,954	0,50	-0,674	-0,174	-0,258
-2/3	-0,006	-0,005	-0,828	0,60	-0,801	-0,177	-0,222
-1/3	-0,056	-0,036	-0,645	0,66	-0,881	-0,178	-0,202
0	-0,203	-0,097	-0,478	2/3	-0,889	-0,178	-0,200
1/3	-0,484	-0,157	-0,326				

образом получают точки отрыва, соответствующие узлам  $\varphi_m$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ), т. е. находится параметрическое уравнение линии отрыва в полярных координатах  $r = r_*(\varphi)$ , заданное в узлах  $\varphi_m$ . После этого непрерывная кривая  $r = r_*(\varphi)$  может быть восстановлена с помощью графической интерполяции. Отметим, что точность вычислений зависит, главным образом, от количества  $n$  точек разбиения отрезка  $[0; 1]$  и от количества итераций  $p$ . В расчетах полагалось  $n = 94$ ,  $p = 200$ ,  $\mu = 1$ .

Переход к безразмерным переменным осуществлялся по формулам

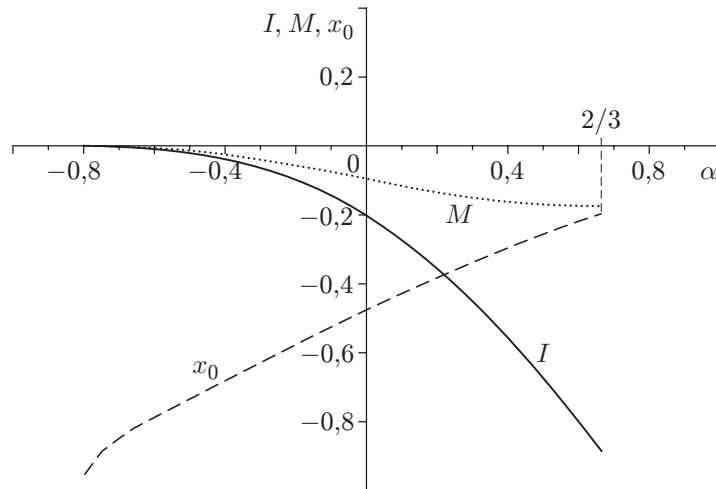
$$\begin{aligned} x &\rightarrow ax, & y &\rightarrow ay, & z &\rightarrow az, \\ x_0 &\rightarrow ax_0, & \Phi &\rightarrow \omega a^2 \Phi, & f &\rightarrow \omega a f, \\ K &\rightarrow aK, & I &\rightarrow \rho \omega a^4 I, & M &\rightarrow \rho \omega a^5 M. \end{aligned}$$

Заметим, что формально безразмерные величины получаются, если положить  $a = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $\rho = 1$ .

На рис. 2 представлены верхние половины линий отрыва для различных значений  $\alpha = v_0/(\omega a)$ . В табл. 1 приведены безразмерные компоненты полного ударного импульса и момента, полученные плавающим диском в результате удара со стороны жидкости, а также соответствующие значения безразмерных координат точек приложения внешнего ударного импульса. Более наглядно зависимости величин  $I$ ,  $M$ ,  $x_0$  от параметра  $\alpha$  показаны на рис. 3.

Отметим, что при  $\alpha \rightarrow 2/3$  полученные результаты хорошо согласуются с известным точным решением задачи о безотрывном ударе круглого диска (случай  $\alpha \geq 2/3$ ) [14].



Рис. 3. Зависимости величин  $I$ ,  $M$ ,  $x_0$  от параметра  $\alpha$ 

В этом случае для безразмерных величин  $I$  и  $M$  имеют место следующие соотношения:

$$I = -4\alpha/3, \quad M = -8/45.$$

При  $\alpha < 2/3$  данная задача становится нелинейной и чрезвычайно усложняется, ее решение можно получить лишь с помощью предлагаемого метода.

Определим линию отрыва в предельном случае  $\alpha \rightarrow -1$ , соответствующем сильному отрыву диска. После перехода в задаче (1.1) к цилиндрическим координатам зафиксируем полярный угол  $\varphi$  и рассмотрим сечение  $r > 0$ ,  $z > 0$ . Затем, перенося начало координат в середину области контакта (в середину отрезка  $[r_*(\varphi), a]$ ), выполняя растяжение координат и вводя малый параметр, характеризующий размер области контакта:

$$r \rightarrow \frac{a - r_*}{2} r + \frac{a + r_*}{2}, \quad z \rightarrow \frac{a - r_*}{2} z, \quad \Phi \rightarrow \frac{a - r_*}{2} \Phi,$$

перейдем к пределу при  $r_* \rightarrow a$ . В результате получаем плоскую задачу, которая, по сути, совпадает с задачей об отрывном ударе пластины. Используя явное выражение для точки отрыва пластины, найдем главный член асимптотики линии отрыва диска:

$$r_*(\varphi) = \frac{4}{3 \cos \varphi} \frac{v_0}{\omega a} - \frac{1}{3}. \quad (3.2)$$

Сравнение численных результатов, полученных по асимптотической формуле (3.2), с соответствующими результатами, найденными с помощью метода нелинейных интегральных уравнений, показывает, что они хорошо согласуются в широком диапазоне значений характерного параметра задачи  $\alpha$ . В табл. 2 приведены результаты сравнения для случая  $\alpha = -0,8$  (относительная погрешность составляет не более 1,2 %). По мере приближения к значению  $\alpha = -1$  точность вычислений по асимптотической формуле (3.2) возрастает. Следует отметить, что даже при  $\alpha = -2/3$  относительная погрешность составляет не более 3,5 %.

При решении уравнения (1.7) предполагается, что скорости, приобретенные диском в результате удара, известны, а компоненты полного ударного импульса и его момента найдутся как интегралы, содержащие потенциал скоростей  $\Phi$ . Затем по явным формулам (1.3) определяются величина импульса внешней ударной силы  $P_z$  и точка его приложения  $x_0$ .

Таблица 2

Координаты точки отрыва, определенные по формуле (3.2)  
и в результате решения задачи (1.1)

$\varphi$	$r(\varphi)$	$r_*(\varphi)$	$\varphi$	$r(\varphi)$	$r_*(\varphi)$
2,557	0,942	0,946	2,958	0,761	0,752
2,690	0,855	0,852	3,091	0,743	0,735
2,824	0,794	0,789			

Таблица 3

Зависимость параметра  $\alpha$  от координаты  
точки приложения ударного импульса

$x_0$	$\alpha$	$x_0$	$\alpha$
-0,25	0,521	-0,70	-0,438
-0,30	0,394	-0,80	-0,620
-0,40	0,166	-0,90	-0,762
-0,50	-0,044		

Рассмотрим другую постановку задачи, когда заданы величины  $P_z$  и  $x_0$ . Заметим, что положение линии отрыва не зависит от величины импульса внешней ударной силы, а зависит только от точки его приложения  $x_0$ . Задавая  $x_0$  и используя определяющие соотношения (1.3), для величины  $\alpha = v_0/(\omega a)$  получим нелинейное уравнение

$$F(\alpha) = 0, \quad F(\alpha) = x_0 + M/I.$$

Для решения данного уравнения применяется метод секущих. Следует отметить, что зависимость  $F(\alpha)$  задается системой односторонних ограничений (1.6). Поэтому на каждом шаге рассматриваемого итерационного процесса необходимо решить нелинейное интегральное уравнение (1.7). Как показывают численные расчеты, метод секущих сходится достаточно быстро. Пусть, например,  $x_0 = -0,3$ . Тогда, задавая начальные приближения  $\alpha_0 = 0,6$ ,  $\alpha_1 = 0,62$ , получим следующие значения  $\alpha$ :  $\alpha_2 = 0,366\ 69$ ,  $\alpha_3 = 0,396\ 88$ ,  $\alpha_4 = 0,394\ 34$ ,  $\alpha_5 = 0,394\ 32$ ,  $\alpha_6 = 0,394\ 32$ . В табл. 3 приведены значения параметра  $\alpha$ , соответствующие различным значениям  $x_0$ .

Следует также отметить, что пренебрежение массой и моментом инерции диска при определении величины  $\alpha = \alpha(x_0)$  приводит к погрешности порядка  $O(h)$ ,  $h \rightarrow 0$  ( $h$  — толщина диска).

**Заключение.** С помощью метода нелинейных интегральных уравнений типа уравнений Гаммерштейна исследована пространственная задача об отрывном ударе круглого диска, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины. Изучено влияние различных режимов движения диска на форму и положение образующейся на его поверхности линии отрыва, отделяющей зону безотрывного удара от зоны отрыва. Предложен алгоритм, позволяющий определить линию отрыва по заданной точке приложения внешнего ударного импульса. Кроме того, найдены компоненты полного ударного импульса и его момента, полученные плавающим диском в результате удара.

Отметим, что к нелинейному интегральному уравнению типа уравнения Гаммерштейна может быть сведена более общая задача об отрывном ударе твердого тела, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, наполняющей ограниченный бассейн. При этом основная трудность состоит в построении и аппроксимации оператора  $K$  соответствующей линейной смешанной краевой задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
2. **Кудрявцева Н. А.** Горизонтальный удар плавающего эллипса о несжимаемую жидкость // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24. С. 258–261.
3. **Корчагин В. С.** Отрывной удар по цилиндру, полупогруженному в жидкость // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк. Естеств. науки. 1978. № 4. С. 25–27.
4. **Корчагин В. С.** Об отрывном ударе тела о несжимаемую жидкость // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк. Естеств. науки. 1989. № 3. С. 30–33.
5. **Дворак А. В., Теселкин Д. А.** Численное исследование двумерных задач об импульсивном движении плавающих тел // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 1. С. 144–150.
6. **Норкин М. В.** Методы решения нелинейных задач гидродинамического удара в ограниченных областях // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 4. С. 135–147.
7. **Норкин М. В.** Отрывной удар эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2008. № 1. С. 120–132.
8. **Красносельский М. А.** Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рунтцкий, В. Я. Степенко. М.: Наука, 1969.
9. **Галанов Б. А.** Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 5. С. 827–835.
10. **Александров В. М.** Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел / В. М. Александров, Д. А. Пожарский. М.: Факториал, 1998.
11. **Александров В. М.** Аналитические методы в контактных задачах теории упругости / В. М. Александров, М. И. Чебаков. М.: Физматлит, 2004.
12. **Юдович В. И.** Однозначная разрешимость задачи об ударе с отрывом твердого тела о неоднородную жидкость // Владикавк. мат. журн. 2005. Т. 7, № 3. С. 79–91.
13. **Коробкин А. А.** Постановка задачи проникания в виде вариационного неравенства // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1982. Вып. 58. С. 73–79.
14. **Ворович И. И., Юдович В. И.** Удар круглого диска о жидкость конечной глубины // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21. С. 525–532.
15. **Уфлянд Я. С.** Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1977.
16. **Прудников А. П.** Интегралы и ряды. Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. М.: Наука, 1981.

*Поступила в редакцию 26/II 2008 г.,  
в окончательном варианте — 10/VI 2008 г.*

---