УДК 532.546; 533.15

ОСОБЕННОСТИ ЗОН ВНЕДРЕНИЯ ПРИ БУРЕНИИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКВАЖИН

В. В. Шелухин, И. Н. Ельцов*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
* Институт геофизики СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mails: shelukhin@hydro.nsc.ru, yeltsov@uiggm.nsc.ru

Предложена математическая модель зоны проникновения бурового раствора при бурении горизонтальных скважин. Основное предположение — малое различие плотностей внедряемой и пластовой жидкостей. Определена гравитационная асимметрия фронта внедрения и установлено, что со временем одна из его точек становится аномальной и вся зона внедрения теряет выпуклость. Показано, что основная причина асимметрии — различие плотностей. Если закачивается более легкий раствор, то фронт "всплывает"; если раствор тяжелее, то фронт "оседает". Аномальная точка фронта появляется под скважиной или над ней в зависимости от удельного веса бурового раствора. В случае, когда буровой раствор легче пластовой жидкости, особое свойство точки фронта, лежащей непосредственно под центром скважины, проявляется в том, что со временем она оказывается продвинутой вниз менее, чем соседние точки фронта слева и справа, если продвижение отсчитывать от горизонтальной оси, проходящей через центр скважины. Эта особенность наиболее ярко выражена при небольшом перепаде давления в скважине и пласте, равном некоторому критическому значению: в таких условиях указанная точка фронта вообще является неподвижной. При больших перепадах давления расширение фронта во всех направлениях происходит практически одинаково.

Ключевые слова: фильтрация, горизонтальная скважина, фронт вытеснения.

Введение. При вскрытии нефтяных пластов-коллекторов в прискважинную область внедряется буровой раствор, который имеет, как правило, иные физические свойства, чем пластовые флюиды. В результате образуется зона проникновения, характеристики которой отличаются от неизменной части пласта. В этой области наблюдается неоднородное распределение электрического сопротивления, нефтенасыщености, концентрации солей и других важных характеристик. Практически для всех современных средств геофизических исследований скважин зона проникновения является мешающим объектом. Для корректного определения параметров пласта необходимо знать свойства зоны проникновения. Для вертикальных скважин в случае применения буровых растворов на глинистой основе создана совместная геофизическая и гидродинамическая модель прискважинной области. Предложена концепция комплексной интерпретации данных электромагнитных методов каротажа и технологических параметров бурения на основе гидродинамического моделирования проникновения [1].

Однако в последнее десятилетие широкое распространение на практике получило горизонтальное бурение. Причем помимо традиционных применяются буровые растворы на

Работа выполнена в рамках междисциплинарного интеграционного проекта № 61 СО РАН (2003 г.) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 03-05-65299, 03-05-64210).

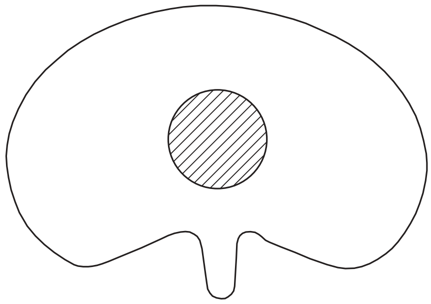


Рис. 1

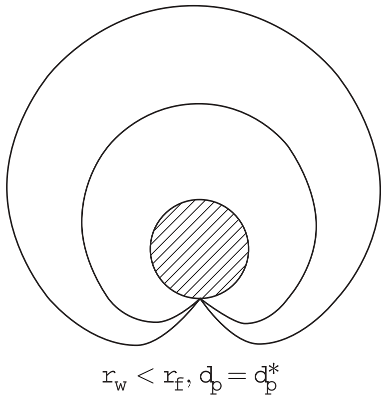


Рис. 2

нефтяной основе, а превышение давления в скважине над пластовым может быть незначительным или даже нулевым. В этом случае внедрение бурового раствора в пласт из-за влияния сил гравитации может быть существенно несимметричным. Как показывают физические эксперименты и компьютерное моделирование, такая асимметрия действительно имеет место [2]. Визуальные наблюдения и измерения с помощью промышленного радара в экспериментах с водонасыщенным песком [3] выявили необычную аномалию фронта при внедрении соляного раствора (рис. 1). Ее причины пока неясны, поэтому требуются дальнейшие исследования, в том числе теоретические.

Данная работа посвящена изучению особенностей проникновения бурового раствора при бурении горизонтальных скважин. Основное внимание сосредоточено на том, как влияет разница давлений в скважине и пласте на геометрию фронта внедрения. Поэтому мы не рассматриваем случай многофазной фильтрации, не учитываем анизотропию пласта и предполагаем, что плотности бурового раствора и пластовой жидкости различаются незначительно.

Показывается, что даже в этих предположениях зона проникновения бурового раствора со временем теряет выпуклость. При этом точка фронта, удаляющаяся от центра скважины медленнее других, оказывается в результате наименее продвинутой (по сравнению с соседними точками слева и справа) не только от центра скважины, но и от горизонтальной оси, проходящей через центр скважины. Отметим, что данный результат получен главным образом средствами теоретического анализа. Кроме того, устанавливается наличие некоторого критического перепада давлений в скважине и пласте δ_p^*. Так, если удельный вес пластовой жидкости превышает удельный вес бурового раствора и $\delta_p = \delta_p^*$, то фронт в нижней точке скважины не движется, т. е. через эту точку скважины не происходит внедрения бурового раствора (рис. 2). При $\delta_p > \delta_p^*$ вторжение через нижнюю точку происходит, но медленнее, чем через соседние точки скважины. Наоборот, если удельный вес пластовой жидкости меньше удельного веса бурового раствора, то при $\delta_p = \delta_p^*$ фронт не движется в самой верхней точке скважины; при $\delta_p > \delta_p^*$ вторжение через эту точку происходит, но медленнее, чем через соседние точки скважины.

1. Математическая модель. Предлагаемая ниже математическая модель описывает наиболее простую ситуацию, когда внедряемая и пластовая жидкости имеют одинаковую вязкость, а плотность бурового раствора ρ_w мало отличается от плотности пластовой жидкости ρ_f. При этом внедряемая в пласт жидкость теряет глинистые частицы на стенке скважины, преодолевает дополнительное сопротивление образующейся корки и входит в пласт, имея ту же плотность, что и пластовая жидкость [4].

Картина течения предполагается одинаковой в каждой плоскости поперечного сечения с координатами x_1, x_2. Сечением скважины является круг радиуса ε, его центр совпадает с началом системы отсчета. Ось x_2 направлена вертикально вверх, а ось x_1 — вправо параллельно касательной плоскости к поверхности земли. Рассматривается течение в области, отстоящей от центра скважины на расстояние не более чем R, поэтому далее используются цилиндрические координаты (r, φ), угол φ откладывается от оси x_1 вверх.

Так как плотность пластовой жидкости постоянна, то распространение соли в пористой среде описывается системой уравнений (см. [5])

$$\Phi c_t + \operatorname{div}(\boldsymbol{q}c) = 0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{q} = 0, \qquad \boldsymbol{q} = -k(\nabla p + \gamma_f \nabla z), \qquad \gamma_f = \rho_f g. \tag{1.1}$$

Течение рассматривается в кольце $\varepsilon < r < R$. Первое уравнение является уравнением переноса, второе — условие несжимаемости, третье — закон фильтрации Дарси. Приняты следующие обозначения: Φ — пористость; c — массовая концентрация соли; $\boldsymbol{q}$ — вектор скорости фильтрации; p — давление; k — коэффициент фильтрации; g — ускорение свободного падения; γ_f — удельный вес пластовой жидкости; z — функция глубины ($z = x_2$).

Вдали от скважины давление распределено по гидростатическому закону, поэтому выполняется краевое условие

$$r = R: \qquad H \equiv p + \gamma_f z = p_f = \text{const}. \tag{1.2}$$

Равенство

$$r = \varepsilon: \qquad \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} = -\beta[p] \tag{1.3}$$

есть краевое условие на стенке скважины, где $\boldsymbol{n}$ — вектор внешней нормали к окружности $r = \varepsilon$. Здесь β^{-1} — коэффициент сопротивления; $[p]$ — скачок давления,

$$[p] = \lim_{\delta \to 0} \big(p(1 + \delta, \varphi) - p(1 - \delta, \varphi)\big).$$

Условие (1.3) означает, что скорость внедрения жидкой фракции бурового раствора линейно зависит от скачка давления. Как следует из (1.2), p_f есть давление в пласте на уровне центра скважины на расстоянии R от нее.

Еще одно предположение заключается в том, что величина напора $H_w \equiv p + \rho_w g z$ на стенке скважины одинакова для всех частиц бурового раствора. Так, в частности, будет, если циркулирующий в затрубном пространстве буровой раствор описывается гидродинамическими уравнениями Эйлера безвихревого движения. В этом случае имеет место интеграл Бернулли, т. е.

$$\rho_w \boldsymbol{v}^2/2 + p + \rho_w g z = \text{const},$$

поэтому напор одинаков для всех частиц, имеющих одинаковую скорость $|\boldsymbol{v}|$. Таким образом, на стенке скважины имеет место условие постоянства напора

$$r = \varepsilon: \qquad \lim_{\delta \to 0} p(1 - \delta, \varphi) + \gamma_w z = p_w \equiv \text{const}, \quad \gamma_w = \rho_w g,$$

и поэтому равенство (1.3) можно записать в виде

$$r = \varepsilon: \qquad H_r - \beta_1 H + \beta_1(\delta_\gamma r \sin\varphi + p_w) = 0, \quad \beta_1 = \beta/k, \quad \delta_\gamma = \gamma_f - \gamma_w. \tag{1.4}$$

Систему уравнений (1.1) необходимо дополнить краевым и начальным условиями для концентрации солей

$$c\big|_{r=\varepsilon} = c_1, \qquad c\big|_{t=0} = c_0. \tag{1.5}$$

Заметим, что первое из условий (1.5) для c имеет смысл только для тех точек круга $r = \varepsilon$, в которых вектор скорости $\boldsymbol{q}$ направлен в пласт, т. е. должно выполняться неравенство

$$\frac{\partial H}{\partial n} \leqslant 0 \qquad \text{при} \quad r = \varepsilon. \tag{1.6}$$

Ниже это условие будет сформулировано в терминах параметра δ_p.

2. Уравнения для фронта вторжения. Напор H не зависит от времени и находится как решение следующей краевой задачи в полярных переменных:

$$\Delta H \equiv r(rH_r)_r + H_{\varphi\varphi} = 0, \quad H\big|_{r=R} = p_f, \quad H_r - \beta_1 H + \beta_1(\delta_\gamma r \sin\varphi + p_w)\big|_{r=\varepsilon} = 0.$$

Методом разделения переменных находим, что

$$H = p_f - b_3 \ln(r/R) + (-b_1 r + b_2 r^{-1})\sin\varphi, \tag{2.1}$$

где

$$b_1 = \frac{\beta_1\varepsilon\delta_\gamma}{(1-\beta_1\varepsilon) + (1+\beta_1\varepsilon)(R/\varepsilon)^2}, \quad b_2 = b_1 R^2, \quad b_3 = \frac{\delta_p}{(\beta_1\varepsilon)^{-1} + \ln(R/\varepsilon)}, \quad \delta_p \equiv p_w - p_f.$$

Из этого решения видно, что картина течения симметрична относительно вертикальной оси. Найдем функцию тока ψ из условий $\psi_{x_1} = kH_{x_2}$, $\psi_{x_2} = -kH_{x_1}$ с помощью криволинейного интеграла

$$\psi(x_1,x_2) = \int\limits_{(x_1^0,x_2^0)}^{(x_1,x_2)} -kH_{x_1}\,dx_2 + kH_{x_2}\,dx_1 = \int\limits_{L_1} \ldots + \int\limits_{L_2} \cdots, \qquad (x_1,x_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Здесь $(x_1^0, x_2^0) = (\varepsilon, 0)$. Отрезок L_1 соединяет точку (x_1^0, x_2^0) с точкой $(x_1^*, x_2^*) = (r, 0)$. Параметрическое задание отрезка L_1 дается в виде

$$L_1\colon \qquad x_1 = \varepsilon + \mu(r-\varepsilon), \quad x_2 = 0, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1.$$

Криволинейный отрезок L_2 представляет собой часть окружности с параметрическим заданием

$$L_2\colon \qquad x_1 = r\cos(\mu\varphi), \quad x_2 = r\sin(\mu\varphi), \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{x_1}{x_2}, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1.$$

Каждый интеграл $\int\limits_{L_i}$ вычисляется по формуле

$$\int\limits_{L_i} \ldots = \int\limits_0^1 -kH_{x_1}(x_1(\mu),x_2(\mu))x_2'(\mu) + kH_{x_2}(x_1(\mu),x_2(\mu))x_1'(\mu)\ d\mu,$$

где $x_1 = x_1(\mu)$, $x_2 = x_2(\mu)$ — параметрическое задание отрезка L_i. Окончательно получаем представление для функции ψ тока в полярных координатах

$$\psi(r,\varphi) = kb_3\varphi - k(b_1 r + b_2/r)\cos\varphi + \mathrm{const}\,.$$

Теперь траектория каждой жидкой частицы, выходящей из точки скважины (ε, φ_0), задается равенством $\psi(r,\varphi) = \psi(\varepsilon,\varphi_0)$.

Уравнение переноса в полярных координатах имеет вид

$$c_t - \lambda(c_r H_r + r^{-2} c_\varphi H_\varphi) = 0, \qquad \lambda = k/\Phi,$$

или

$$c_t + \lambda[b_3 r^{-1} + (b_1 + b_2 r^{-2})\sin\varphi]c_r - \lambda\cos\varphi(-b_1 r^{-1} + b_2 r^{-3})c_\varphi = 0.$$

Известно, что решение подобных уравнений сводится к построению характеристик, вдоль которых значение решения не изменяется. В пространстве переменных r, φ, t характеристики задаются уравнениями

$$\frac{dr}{dt} = \lambda[b_3 r^{-1} + (b_1 + b_2 r^{-2})\sin\varphi], \qquad r(0) = \varepsilon,$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda[b_1 r^{-1} - b_2 r^{-3}]\cos\varphi, \qquad \varphi(0) = \varphi_0 \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big]. \tag{2.2}$$

Для построения фронта внедрения достаточно найти решение системы (2.2):

$$r = r(t, \varphi_0), \qquad \varphi = \varphi(t, \varphi_0), \qquad \varphi_0 \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big]. \tag{2.3}$$

Равенства (2.3) представляют собой параметрическое задание этого фронта с параметром φ_0. Исключение параметра φ_0 и дает уравнение самого фронта

$$r = r(t, \varphi). \tag{2.4}$$

Перейдем к безразмерным переменным. Пусть τ — характерное время процессов распространения, например одни сутки. Обозначим $r = \varepsilon\hat{r}$, $t = \tau\hat{t}$. Тогда безразмерные функции $\hat{r}(\hat{t})$, $\varphi(\hat{t})$ (далее знак “$\wedge$” у безразмерных величин опущен) удовлетворяют системе

$$\frac{dr}{dt} = B_3 r^{-1} + (B_1 + B_2 r^{-2})\sin\varphi, \qquad r(0) = 1,$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = (B_1 r^{-1} - B_2 r^{-3})\cos\varphi, \qquad \varphi(0) = \varphi_0 \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big], \tag{2.5}$$

где безразмерные параметры B_i заданы формулами

$$B_1 = \frac{k\tau\beta_1\delta_\gamma}{\Phi[(1-\beta_1\varepsilon) + (1+\beta_1\varepsilon)(R/\varepsilon)^2]},$$
$$B_2 = \frac{k\tau\beta_1\delta_\gamma R^2}{\Phi\varepsilon^2[(1-\beta_1\varepsilon) + (1+\beta_1\varepsilon)(R/\varepsilon)^2]}, \qquad B_3 = \frac{k\tau\delta_p}{\Phi\varepsilon^2[(\beta_1\varepsilon)^{-1} + \ln(R/\varepsilon)]}.$$

Обозначим $v = \sin\varphi$. Тогда (2.5) эквивалентна следующей задаче:

$$\frac{dr}{dt} = B_3 r^{-1} + (B_1 + B_2 r^{-2})v, \qquad r(0) = 1,$$
$$\frac{dv}{dt} = (1 - v^2)(B_1 r^{-1} - B_2 r^{-3}), \qquad v(0) = v_0 \in [-1, 1]. \tag{2.6}$$

3. Качественный анализ фронта вторжения. Поведение фронта определяется главным образом параметрами δ_p и δ_γ. В зависимости от знака δ_γ возможны три случая: $\delta_\gamma = 0$, $\delta_\gamma > 0$ и $\delta_\gamma < 0$. Рассмотрим их последовательно.

3.1. Пусть $\delta_\gamma = 0$, тогда $B_1 = B_2 = 0$ и фронт определяется уравнениями

$$\dot{r} = B_3/r, \qquad \dot{v} = 0, \qquad r(0) = 1, \qquad v(0) = v_0 \in [-1, 1]. \tag{3.1}$$

Так как при $r = \varepsilon$

$$H_r = -\frac{\beta_1\delta_p}{1 + \beta_1\varepsilon\ln(R/\varepsilon)},$$

то необходимое условие вторжения (1.6) приводит к неравенству $\delta_p \geqslant 0$. Поэтому $B_3 \geqslant 0$ и решение задачи (3.1) дается равенствами

$$r(t) = \sqrt{1 + 2tB_3}, \qquad v(t) = v_0, \qquad B_3 = \frac{k\tau\delta_p}{\Phi\varepsilon^2((\beta_1\varepsilon)^{-1} + \ln(R/\varepsilon))}. \tag{3.2}$$

Значит, фронт является окружностью с центром в начале координат и радиусом, задаваемым формулой (3.2).

3.2. Пусть $\delta_\gamma > 0$. Прежде всего выясним условия выполнения неравенства (1.6). С помощью (1.4) и (2.1) данное неравенство записывается в виде

$$-\delta_p - b_3 \ln(\varepsilon/R) + \max_\varphi (\sin\varphi[-b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^{-1} - \delta_\gamma\varepsilon]) \leqslant 0,$$

т. е.

$$\frac{\delta_p}{\varepsilon\delta_\gamma} \geqslant \frac{(1+(R/\varepsilon)^2)(1+(\beta_1\varepsilon)\ln(R/\varepsilon))}{(1-\beta_1\varepsilon)+(1+\beta_1\varepsilon)(R/\varepsilon)^2} \equiv \frac{\delta_p^*}{\varepsilon\delta_\gamma}. \tag{3.3}$$

В терминах B_i неравенство (3.3) принимает простую форму

$$B_3 \geqslant B_1 + B_2. \tag{3.4}$$

Неравенство (3.4) есть условие на давление в скважине p_w, при котором происходит внедрение жидкой фракции бурового раствора в пласт по всему периметру скважины. В дальнейшем предполагается, что неравенство (3.4) выполнено.

Анализ фронта внедрения будет базироваться на следующем математическом утверждении: *при каждом $t > 0$ функция $r(t,\varphi)$ в (2.4), задающая фронт, монотонно возрастает с ростом φ, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. При этом*

$$r_\varphi > 0, \quad \textit{если} \quad -\pi/2 < \varphi < \pi/2, \quad \textit{а если} \quad \varphi = \pm\pi/2, \quad \textit{то} \quad r_\varphi = 0. \tag{3.5}$$

Докажем это утверждение. Так как $r_\varphi = r_v \cos\varphi$, то достаточно установить, что

$$r_v(t,v) > 0 \qquad \text{при} \quad t > 0, \quad -1 \leqslant v \leqslant 1, \tag{3.6}$$

где

$$r = r(t,v) \tag{3.7}$$

есть уравнение границы фронта внедрения в переменных (v,r) при фиксированном $t > 0$.

Продифференцируем равенство (3.7) по v_0:

$$\frac{dr}{dv_0} = \frac{dr}{dv}\frac{dv}{dv_0}, \qquad \frac{dr}{dv} = \frac{\alpha}{\omega}, \qquad \alpha = \frac{dr}{dv_0}, \qquad \omega = \frac{dv}{dv_0}.$$

Функции $\alpha(t,v_0)$, $\omega(t,v_0)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{d\alpha}{dt} = -B_3 r^{-2}\alpha - 2B_2 r^{-3} v\alpha + (B_1 + B_2 r^{-2})\omega, \qquad \alpha(0,v_0) = 0,\\ \frac{d\omega}{dt} = (1-v^2)(-B_1 r^{-2} + 3B_2 r^{-4})\alpha - 2(B_1 r^{-1} - B_2 r^{-3})v\omega, \qquad \omega(0,v_0) = 1,\end{gathered} \tag{3.8}$$

которые получаются дифференцированием равенств (2.6) по v_0.

Пусть $[0,T]$ — интервал времени, на котором определено решение задачи (2.6) и значение r не превосходит R/ε. Покажем, что α и ω строго положительны на всем интервале $(0,T]$. Пусть $T_1(v_0)$ — первый момент времени, когда $\omega(t,v_0)$ обращается в нуль. Допустим, что $T_1(v_0) < T$. Рассматривая первое уравнение системы (3.8) как обыкновенное дифференциальное уравнение для α, получаем следующее представление:

$$\begin{gathered}\alpha(t,v_0) = A_1 \int_0^t \omega(s,v_0) G_1(s,v_0)\,ds, \qquad A_1(t,v_0) = \exp\Big(\int_0^t F_1(s,v_0)\,ds\Big),\\ F_1(t,v_0) = -B_3 r^{-2} - 2B_2 r^{-3} v, \qquad G_1(t,v_0) = (B_1 + B_2 r^{-2}) A_1^{-1}(t,v_0).\end{gathered} \tag{3.9}$$

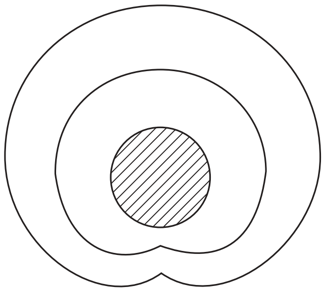


Рис. 3

Поэтому $\alpha \geqslant 0$ на интервале $[0, T_1(v_0)]$. Аналогично из второго уравнения системы (3.8) получаем

$$\omega(t, v_0) = A_2 + A_2 \int\limits_0^t \alpha(s, v_0) G_2(s, v_0)\, ds, \qquad A_2 = \exp\Big(\int\limits_0^t F_2(s, v_0)\, ds\Big),$$
$$F_2(t, v_0) = -2(B_1 r^{-1} - B_2 r^{-3}) v, \qquad G_2(t, v_0) = (1 - v^2) r^{-4} A_2^{-1} (3B_2 - B_1 r^2). \qquad (3.10)$$

Так как

$$3B_2 - B_1 r^2 = B_1(3(R/\varepsilon)^2 - r^2) \geqslant 2B_1 (R/\varepsilon)^2 \geqslant 0,$$

то $\omega(T_1(v_0), v_0) > 0$, что является противоречием. Таким образом, $\omega(t, v_0)$ строго положительна на всем интервале $[0, T]$. Из (3.9) и (3.10) нетрудно заключить, что $\alpha(t, v_0) > 0$ на $(0, T]$. Поэтому неравенство (3.6) и соотношения (3.5) выполняются.

Доказанное утверждение означает, что в каждый фиксированный момент времени фронт менее всего вытянут в направлении $\varphi = -\pi/2$ от центра скважины, т. е. вниз, и наиболее продвинут в направлении $\varphi = \pi/2$, т. е. вверх. При этом продвижение в направлении $\varphi = \varphi_2$ больше, чем в направлении $\varphi = \varphi_1$, если угол φ_2 больше, чем угол φ_1 (рис. 3). Далее глубины проникновения в направлениях $\varphi = \pm\pi/2$ будут представлены явными формулами.

Рассмотрим критический случай

$$B_3 = B_1 + B_2. \qquad (3.11)$$

При этом условии система (2.6) при $v_0 = -1$ имеет решение, не зависящее от времени:

$$r = 1, \qquad v = -1.$$

Значит, если перепад давлений δ_p является критическим, т. е. $\delta_p = \delta_p^*$, то фронт "стоит" в нижней точке $r = 1$, $\varphi = -\pi/2$ (см. рис. 2).

Далее будем предполагать, что $B_3 > B_1 + B_2$, т. е. $\delta_p > \delta_p^*$, и найдем расстояния наименьшего и наибольшего удаления от центра $r_1(t)$ и $r_2(t)$. Эти функции находятся как решения уравнений

$$\dot r_1 = \frac{B_3}{r_1} - \frac{B_2}{r_1^2} - B_1, \qquad \dot r_2 = \frac{B_3}{r_2} + \frac{B_2}{r_2^2} + B_1, \qquad r_1(0) = r_2(0) = 1. \qquad (3.12)$$

Их интегрирование приводит к формулам

$$r_1 - 1 + \ln\Big(\frac{r_1 - c_1}{1 - c_1}\Big)^n \Big(\frac{r_1 - c_2}{1 - c_2}\Big)^m = -B_1 t,$$

$$r_2 - 1 + \ln\left(\frac{r_2 + c_2}{1 + c_2}\right)^n \left(\frac{r_2 + c_1}{1 + c_1}\right)^m = B_1 t, \tag{3.13}$$

где $c_1 = b_4 + æ$, $c_2 = b_4 - æ$, $n = b_4 + (æ + b_4^2/æ)/2$, $m = b_4 - (æ + b_4^2/æ)/2$, $b_4 = B_3/(2B_1)$, $æ^2 = B_3^2/(4B_1^2) - B_2/B_1$. Равенства (3.13) позволяют с любой точностью вычислить величины r_1 и r_2, т. е. глубины проникновения бурового раствора вниз и вверх по вертикали, проходящей через центр скважины. Из уравнений (3.12) также можно получить приближенную формулу для коэффициента симметрии вдоль вертикального направления $S(t) \equiv (r_1 - 1)/(r_2 - 1)$, характеризующего несимметрию фронта вдоль центральной вертикали. Так как $r_i - 1 = t\dot{r}_i(0) + o(t)$, то

$$S(t) = \frac{r_1(t) - 1}{r_2(t) - 1} \approx \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \qquad \xi = \frac{B_1 + B_2}{B_3}.$$

Чем меньше прошло времени с начала вторжения, тем точнее эта формула. Симметрия $S = 100$ %, если $\xi = 0$, т. е. фронт круговой. Симметрия $S = 0$, если $\xi = 1$, т. е. фронт “стоит” в нижней точке скважины.

Вообще, можно ввести коэффициент симметрии вдоль направления φ:

$$S_\varphi(t) = \frac{r(t, -\varphi) - 1}{r(t, \varphi) - 1}, \qquad \varphi \in [0, \pi/2],$$

где $r = r(t, \varphi)$ — уравнение фронта, получающееся из решения $r = r(t, \varphi_0)$, $\varphi = \varphi(t, \varphi_0)$ системы (2.5) после исключения параметра φ_0. Очевидно, что коэффициент симметрии монотонно уменьшается с ростом угла и принимает наименьшее значение при $\varphi = \pi/2$:

$$S_0(t) = 1, \quad S_{\varphi_1}(t) > S_{\varphi_2}(t) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 \leqslant \pi/2, \quad S_{\pi/2}(t) = S.$$

Со временем ближайшая к центру скважины точка фронта с координатами $r = r_1(t)$, $\varphi = -\pi/2$ становится аномальной в том смысле, что соседние с ней точки фронта слева и справа оказываются лежащими ниже горизонтальной прямой $z = r_1(t)$ и тем самым зона проникновения уже не является выпуклым множеством. В критическом случае, когда $B_3 = B_1 + B_2$, это свойство доказать несложно, а в общем случае оно подтверждается сравнительно простыми расчетами.

Действительно, горизонтальная прямая $z = -r_1(t)$ задается в полярных координатах уравнением $r \sin\varphi = -r_1(t)$ или $rv = -r_1(t)$, где $v := \sin\varphi$. Для такой линии

$$\frac{dr}{dv} = \frac{r_1(t)}{v^2},$$

поэтому для уравнения фронта $r = r(v, t)$ достаточно установить, что начиная с некоторого момента времени выполняется неравенство

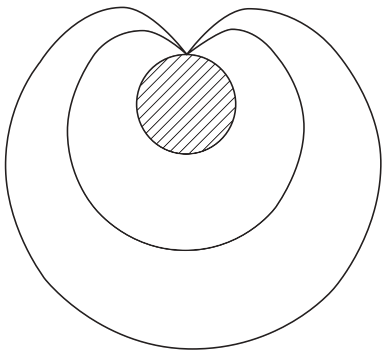
$$J(t) := \frac{dr}{dv}\Big|_{v=-1} > r_1(t). \tag{3.14}$$

Полагая в формулах (3.8) $v = -1$, находим, что функция $J(t) := (\alpha/\omega)\big|_{v=-1}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dJ}{dt} = F_3 J + B_1 + \frac{B_2}{r_1^2}, \qquad F_3(t) := \frac{4B_2}{r_1^3} - \frac{2B_1}{r_1} - \frac{B_3}{r_1^2}, \qquad J(0) = 0.$$

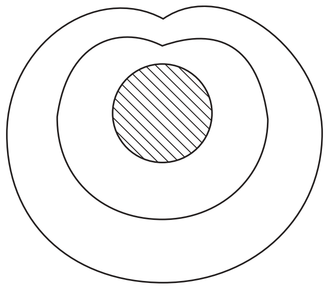
Его решение дается формулами

$$J = A_3(t) \int_0^t \Big(B_1 + \frac{B_2}{r_1^2(\tau)}\Big) A_3^{-1}(\tau)\, d\tau, \qquad A_3 := \exp\Big(\int_0^t F_3(\tau)\, d\tau\Big). \tag{3.15}$$



$\mathrm{r_w > r_f,\, d_p = d_p^*}$

Рис. 4



$\mathrm{r_w > r_f,\, d_p > d_p^*}$

Рис. 5

В критическом случае $r_1(t) \equiv 1$, поэтому формулы (3.15) упрощаются:

$$J(t) = (B_1 + B_2)\,\mathrm{e}^{3(B_2 - B_1)t} \int\limits_0^t \mathrm{e}^{-3(B_2 - B_1)s}\, ds.$$

Отсюда ясно, что начиная с некоторого момента времени $J(t) > 1$. Расчеты интегралов (3.15) с помощью формул (3.13) показывают, что неравенство (3.14) выполняется при достаточно больших t и в общем случае. Таким образом, со временем точка фронта вторжения, лежащая непосредственно под центром скважины, неизбежно становится аномальной.

3.3. Пусть $\delta_\gamma < 0$. В этом случае математический анализ уравнений фронта проводится по той же схеме, что и при $\delta_\gamma > 0$. Для этого достаточно заменить положительные параметры B_1 и B_2 на отрицательные: $B_1 := -|B_1|$, $B_2 := -|B_2|$. Приведем лишь окончательные результаты. Необходимое условие вторжения (1.6) обеспечивается при выполнении неравенства

$$B_3 \geqslant |B_1| + |B_2|.$$

Свойство монотонности фронта при каждом фиксированном моменте времени выражается условиями

$$r_\varphi < 0, \quad \text{если} \quad -\pi/2 < \varphi < \pi/2, \quad \text{а если} \quad \varphi = \pm\pi/2, \quad \text{то} \quad r_\varphi = 0. \qquad (3.16)$$

При $B_3 = |B_1| + |B_2|$ фронт “стоит” в верхней точке скважины (рис. 4). Вообще, фронт является симметричным отражением (относительно горизонтальной оси $x_2 = 0$) фронта, полученного для случая $\delta_\gamma := |\delta_\gamma|$ (рис. 5). Это вытекает из того, что система уравнений (2.5) обладает следующей симметрией. Пусть $B_1 < 0$, $B_2 < 0$, $B_3 > 0$. Обозначим решение задачи (2.5) через $r(t; B_1, B_2, B_3, \varphi_0)$, $\varphi(t; B_1, B_2, B_3, \varphi_0)$. Введем функции $r_1(t) = r(t; B_1, B_2, B_3, \varphi_0)$, $\varphi_1(t) = -\varphi(t; B_1, B_2, B_3, \varphi_0)$. Тогда легко проверяется, что (r_1, φ_1) есть решение задачи (2.5) при замене B_1 на $|B_1|$, B_2 на $|B_2|$, B_3 на B_3 и φ_0 на $-\varphi_0$, т. е.

$$\frac{dr_1}{dt} = B_3 r_1^{-1} + (|B_1| + |B_2| r_1^{-2}) \sin\varphi_1, \qquad r_1(0) = 1,$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = (|B_1| r_1^{-1} - |B_2| r_1^{-3}) \cos\varphi_1, \qquad \varphi_1(0) = -\varphi_0 \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big].$$

При $\delta_\gamma < 0$ коэффициент симметрии определяется аналогично:

$$S_\varphi(t) = \frac{r(t, \varphi) - 1}{r(t, -\varphi) - 1}, \qquad \varphi \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big],$$

где $r = r(t, \varphi)$ — уравнение фронта.

4. Численный анализ фронта вторжения. Свойство монотонности фронта по угловой переменной φ, выраженное условиями (3.5) или (3.16), дает лишь качественную картину зоны проникновения для фиксированных моментов времени. Для изучения геометрии фронта и его динамики были проведены расчеты системы уравнений (2.5) по методу Рунге — Кутты. Фронт строился как набор точек $(r_m^n, \varphi_m^n) = (r(t_n, \varphi_m), \varphi(t_n, \varphi_m))$ для дискретных моментов времени t_n и для дискретного набора начальных данных φ_m, где $r(t_n, \varphi_m)$, $\varphi(t_n, \varphi_m)$ — численное решение задачи Коши (2.5).

Вычисления проводились для некоторого типичного набора физических параметров, использованных при анализе вертикальных скважин [1]: радиус скважины $\varepsilon = 0{,}108$ м, характерный размер пласта $R = 10$ м, пористость $\Phi = 0{,}2$, приведенный коэффициент фильтрации $k_0 \equiv k\gamma_f = 0{,}1$ м/сут.

При определении численного значения коэффициента сопротивления β_1 будем полагать, что он мало зависит от разности удельных весов δ_γ, поэтому его можно рассчитать с помощью формул (3.2) из опытов, в которых $\delta_\gamma = 0$. Пусть при некотором контрольном перепаде давления δ_p^c за контрольное время τ (соответствующее безразмерному времени $t = 1$) зона распространения достигла значения d (безразмерное значение равно d/ε). Тогда

$$\frac{d}{\varepsilon} = \sqrt{1 + 2B_3}, \qquad B_3 = \frac{k\tau\delta_p^c}{\Phi\varepsilon^2((\beta_1\varepsilon)^{-1} + \ln(R/\varepsilon))}.$$

Отсюда находим приведенный коэффициент сопротивления $\beta_0 = \beta_1 k\gamma_f$:

$$\beta_0 = \frac{\Phi k_0(d^2 - \varepsilon^2)}{2\varepsilon k_0\tau\delta_p^{c,0} - \varepsilon\Phi(d^2 - \varepsilon^2)\ln(R/\varepsilon)}, \qquad \delta_p^{c,0} = \frac{\delta_p^c}{\gamma_f}. \tag{4.1}$$

Примем за контрольные параметры те, которые рассчитаны в [1] для вертикальной скважины с радиально симметричным фронтом вторжения: $\tau = 1$ сут, $\delta_p^{c,0} = 100$ м, $d = 0{,}508$ м. Тогда из (4.1) получаем, что $\beta_0 = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$ 1/сут.

Безразмерные параметры B_i имеют представление

$$B_1 = \frac{\tau\beta_0(1 - \gamma_w/\gamma_f)}{\Phi(1 - \beta_0\varepsilon/k_0 + (1 + \beta_0\varepsilon/k_0)(R/\varepsilon)^2)},$$

$$B_2 = B_1\Big(\frac{R}{\varepsilon}\Big)^2, \qquad B_3 = \frac{\tau k_0\delta_p^0}{\Phi\varepsilon^2(k_0/(\varepsilon\beta_0) + \ln(R/\varepsilon))}.$$

По ним и находятся их численные значения.

Отношение удельных весов γ_w/γ_f меняется в пределах от 0,95 до 1,20. Приведенный скачок давления $\delta_p^0 \equiv \delta_p/\gamma_f$ может достигать 600 м.

Расчеты показывают, что фронт вторжения расширяется со временем вдоль любого луча $\varphi = \text{const}$. Рис. 2–5 иллюстрируют это при сравнительно небольших значениях δ_p^0 для двух последовательных моментов времени $t_1 = 0{,}5$ сут и $t_2 = 1$ сут, когда $\varepsilon = 0{,}108$ м, $R = 10$ м, $\Phi = 0{,}2$, $k_0 = 0{,}1$ м/сут, $\tau = 1$ сут, $\beta_0 = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$ 1/сут, $\gamma_w/\gamma_f = 0{,}95$ или $\gamma_w/\gamma_f = 1{,}20$.

В заключение приведем результаты вычисления вертикальной симметрии S для пяти последовательных моментов времени (суток) в случае, когда $\gamma_w/\gamma_f - 1 = 0{,}20$ и $\delta_p^0 = 100$ м: 0,5 сут — 0,9998; 1 сут — 0,999 91; 2 сут — 0,999 94; 4 сут — 0,999 97; 5 сут — 0,999 98. Эти данные получены путем численного решения задачи Коши (2.5).

Вычислим S по приближенной формуле $S \simeq (1 - \xi)/(1 + \xi)$. Так как

$$\xi \equiv \frac{|B_1| + |B_2|}{B_3} = \frac{\gamma_w/\gamma_f - 1}{\delta_p^0}\frac{(\varepsilon^2 + R^2)(1/\varepsilon + (\beta_0/k_0)\ln(R/\varepsilon))}{1 - \varepsilon\beta_0/k_0 + R^2/\varepsilon^2 + \varepsilon\beta_0 R^2/(k_0\varepsilon^2)},$$

$\xi = 2{,}2 \cdot 10^{-4}$, $S = (1 - \xi)/(1 + \xi) = 99{,}956$ %. Таким образом, при типичных условиях бурения фронт вторжения является практически круговым.

На стадии бурения большой перепад давления обеспечивает циркуляцию бурового раствора. После прекращения бурения перепад давления резко снижается и наступает вторая фаза внедрения, когда внедрившийся буровой раствор начинает "подпираться" следующей порцией раствора, но уже под меньшим давлением. Таким образом, возникает задача о деформации почти кругового фронта, созданного на стадии бурения. В свете сказанного данную работу можно также толковать как разработку методики расчета начальных условий для второй фазы внедрения.

Авторы признательны А. А. Кашеварову за участие в обсуждении представленных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кашеваров А. А., Ельцов И. Н., Эпов М. И.** Гидродинамическая модель формирования зоны проникновения при бурении скважин // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 6. С. 148–157.
2. **Alpak F. O., Dussan E. B., Torres-Verdin V. C.** Numerical simulation of mud-filtrate invasion in horizontal wells and sensitivity analysis of array indfuction tools // SPWLA 43, Ann. Log. Symp. June 2–5, 2002.
3. **Peeters M., Kovats J., Moita C., et al.** Monitoring and modeling invasion using ground penetrating radar and flow simulation programs // Ibid.
4. **Капранов Ю. И.** О фильтрации взвеси твердых частиц // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 4. С. 620–628.
5. **Chavent G., Jaffre J.** Mathematical models and finite elements for reservoir simulation. Amsterdam: North-Holland, 1986.

Поступила в редакцию 12/III 2004 г.,
в окончательном варианте — 8/IV 2004 г.