УДК 539.3

ПРЕДЕЛЬНО ДОПУСТИМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ЗАМКНУТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СОСУДОВ

Ю. В. Немировский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск
E-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Рассмотрена задача определения предельного динамического состояния многослойных замкнутых цилиндрических сосудов при возникновении нештатной ситуации типа взрывного нагружения внутренним давлением высокой интенсивности. Упругие деформации считаются пренебрежимо малыми по сравнению с пластическими, поэтому решение задачи строится на основе модели жесткопластического материала с линейным упрочнением. Показано, что решение рассматриваемой задачи динамического деформирования сводится к интегрированию системы двух обыкновенных уравнений для функций перемещений внутренней поверхности сосуда и массивной недеформируемой крышки сосуда.

Ключевые слова: предельно допустимое динамическое состояние, пластичность, линейное упрочнение, несжимаемость, дифференциальные уравнения, задача Коши, модель жесткопластического материала.

Замкнутые сосуды высокого давления широко применяются в химической, нефтеперерабатывающей, микробиологической промышленности, ракетной технике, авиа- и судостроении, ядерных энергетических установках. Как правило, такие сосуды имеют цилиндрическую или сферическую форму и работают в квазистатическом или динамическом режиме при пульсациях давления с большими амплитудами (несколько тысяч атмосфер) при температурах порядка $600 \div 800$ °C. С увеличением размеров сосудов высокого давления резко возрастает накапливающаяся в них энергия сжатых газов. В нештатных ситуациях “взрывного нагружения” это может привести к катастрофическим последствиям. Создание защитных сооружений для существенного уменьшения последствий катастроф практически невозможно и экономически нецелесообразно. В этих условиях особую значимость приобретают изучение предельной деформативности таких сосудов и повышение надежности их эксплуатации при учете возможного возникновения нештатных ситуаций. В течение длительного времени ведутся исследования возможности замены моноблочных сосудов на многослойные. Применение многослойных конструкций является перспективным как с экономической точки зрения, так и с точки зрения безопасности эксплуатации, поскольку это позволяет использовать различные материалы и локализовать дефекты в слоях, в результате чего происходит безосколочное, вязкое разрушение конструкций. Квазистатическое деформирование многослойных сосудов из упругих и вязкоупругих материалов, а также проблемы их рационального проектирования в таких режимах детально изучались в работе [1]. Обзор исследований квазистатического деформирования сосудов из неоднородных идеально пластических материалов приведен в [2]. В работе [3] рассмотрена динамическая

Работа выполнена в рамках проекта Президиума СО РАН № 15 (Постановление № 10 от 15.01.09).

задача для многослойных сосудов из идеально пластических материалов. Однако решение этой задачи не позволяет определить предельно допустимую деформативность многослойного сосуда и максимально допустимую амплитуду динамической нагрузки, соответствующую состоянию предразрушения.

В настоящей работе рассматривается подход, позволяющий более полно учесть реальные свойства пластического сопротивления каждого материала и исследовать предельное динамическое состояние предразрушения многослойных сосудов.

Рассмотрим многослойный цилиндрический сосуд с жесткосоединенными слоями и массивными недеформируемыми концевыми крышками в условиях осесимметричного динамического нагружения: $p(t) = p_0\varphi(t)$. В данной работе ограничимся (для определенности) нагрузками "взрывного типа". Например, можно принять

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}$$

(t — время). Также будем предполагать, что задача теплопроводности для многослойного цилиндра решена независимо в предположении неизменности температуры вдоль оси сосуда [4]. Так как в состоянии предразрушения пластические деформации на несколько порядков превышают упругие деформации, последними будем пренебрегать и далее будем использовать модель жесткопластического материала с линейным упрочнением в форме соотношений Генки — Ильюшина [5]. Тогда с учетом несжимаемости материала в пластическом состоянии для i-го слоя цилиндра получаем равенство

$$\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i} + \varepsilon_3 = 3\varepsilon_{iT}, \tag{1}$$

где

$$\varepsilon_{1i} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{r}}, \qquad \varepsilon_{2i} = \frac{\bar{u}_i}{\bar{r}}, \qquad \varepsilon_3 = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}}, \qquad \varepsilon_{iT} = \int\limits_{\bar{T}_0}^{\bar{T}_i} \bar{\alpha}_i(\bar{T})\bar{T}\,d\bar{T},$$

$\bar{u}_i$, $\bar{v}$ — радиальное и осевое перемещения; $\bar{r}$, $\bar{z}$ — радиальная и осевая координаты; $\bar{T}_i$, $\bar{\alpha}_i$ — температура и температурный коэффициент линейного расширения в i-м слое. Далее будем считать, что в процессе нагружения температура существенно не меняется и, следовательно, $\bar{T}_i = \bar{T}_i(\bar{r})$, $\varepsilon_{iT} = \varepsilon_{iT}(\bar{r})$.

Введем безразмерные величины

$$x = \frac{\bar{r}}{\bar{r}_0}, \qquad u_i = \frac{\bar{u}_i}{\bar{r}_0}, \qquad v = \frac{\bar{v}}{L}, \qquad z = \frac{\bar{z}}{L}, \qquad a_i = \frac{\bar{r}_i}{\bar{r}_0}.$$

Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\,(xu_i) = 3\varepsilon_{iT}(x) - \varepsilon_3(t)x, \tag{2}$$

где

$$\varepsilon_{1i} = \frac{\partial u_i}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{2i} = \frac{u_i}{x}, \qquad \varepsilon_{3i} = \varepsilon_3(t) = \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Интегрируя (2), получаем

$$u_i(x,t) = \frac{a_{i-1}}{x}\,w_i(t) + \varphi_i(x) - \frac{x^2 - a_{i-1}^2}{2x}\,\varepsilon_3(t), \tag{3}$$

где

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{x}\int\limits_{a_{i-1}}^{x} \varepsilon_{iT}x\,dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$w_i(t)$ — перемещение внутренней границы i-го слоя.

Используя условия непрерывности $u_i(a_i,t)=u_{i+1}(a_i,t)$, равенство (3) можно записать в виде

$$a_{i-1}w_i(t)=a_0w_1(t)+b_i\varepsilon_3(t)+c_i,$$

где

$$b_i=\frac{a_{i-1}^2-a_0^2}{2},\qquad c_i=\sum_{j=0}^{i-1}a_j\varphi_j(a_j),\qquad \varphi_0(a_0)=0.$$

Тогда для деформаций в i-м слое получаем соотношения

$$\varepsilon_{2i}=\frac{1}{x^2}\Big(a_0w_1(t)-\frac{x^2-a_0^2}{2}\,\varepsilon_3(t)+c_i+x\varphi_i(x)\Big),\qquad \varepsilon_{1i}=3\varepsilon_{iT}-\varepsilon_{2i}-\varepsilon_3(t),$$

при этом интенсивность деформаций в i-м слое равна

$$e_i=\frac{\sqrt{2}}{3}\left[(\varepsilon_{1i}-\varepsilon_{2i})^2+(\varepsilon_{2i}-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_{1i})^2\right]^{1/2}=\frac{\sqrt{2}}{3}\left[3\varepsilon_{iT}(\varepsilon_{iT}-\varepsilon_{2i}-\varepsilon_3)+(\varepsilon_{2i}+\varepsilon_3)^2-\varepsilon_{2i}\varepsilon_3\right]^{1/2}.$$

Из закона деформирования материала i-го слоя находим ($a_{i-1}\leqslant x\leqslant a_i$)

$$\sigma_{2i}-\sigma_{1i}=(2/3)(\sigma_{0i}e_i^{-1}+\gamma_i)(\varepsilon_{2i}-\varepsilon_{1i}); \tag{4}$$

$$\sigma_{3i}=\sigma_{1i}+(2/3)(\sigma_{0i}e_i^{-1}+\gamma_i)(\varepsilon_3(t)-\varepsilon_{1i}), \tag{5}$$

где σ_{ki} ($k=1,2,3$), σ_{0i}, γ_i — безразмерные напряжения, предел текучести и модуль упрочнения соответственно.

Уравнение движения материала в i-м слое имеет вид

$$\frac{\partial\sigma_{1i}}{\partial x}+\frac{\sigma_{1i}-\sigma_{2i}}{x}=\rho_i\ddot{u}_i, \tag{6}$$

где точка обозначает частную производную по безразмерному времени ($\tau=t/t_0$). Подставляя выражения (3), (4) в (6) и интегрируя полученное уравнение по x в пределах от a_{i-1} до x, находим

$$\sigma_{1i}(x,t)=-q_i(t)+\Phi_{1i}(x,w_1,\varepsilon_3)+\Phi_{2i}(x)\ddot{w}_1+\Phi_{3i}(x)\ddot{\varepsilon}_3\qquad(i=1,2,\dots,n). \tag{7}$$

Здесь

$$\Phi_{1i}(x,w_1,\varepsilon_3)=\frac{2}{3}\int\limits_{a_{i-1}}^{x}\frac{\sigma_{0i}e_i^{-1}+\gamma_i}{x}\,(\varepsilon_{2i}-\varepsilon_{1i})\,dx,$$

$$\Phi_{2i}(x)=a_0\rho_i\ln\frac{x}{a_{i-1}},\qquad \Phi_{3i}(x)=\frac{\rho_i}{2}\int\limits_{a_{i-1}}^{x}\frac{x^2+a_0^2}{x}\,dx.$$

Аналогично для $(i+1)$-го слоя получаем

$$\sigma_{1(i+1)}(x,t)=-q_{i+1}(t)+\Phi_{1(i+1)}(x,w_1,\varepsilon_3)+\Phi_{2(i+1)}(x)+\Phi_{3(i+1)}(x). \tag{8}$$

Используя условия непрерывности радиальных напряжений $\sigma_{1i+1}(a_i,t)=\sigma_{1i}(a_i,t)$, из (7), (8) находим

$$q_{i+1}(t)=-q_i(t)+\Phi_{1i}(x,w_1,\varepsilon_3)+\Phi_{2i}(a_i)\ddot{w}_1+\Phi_{3i}(a_i)\ddot{\varepsilon}_3\qquad(i=1,2,\dots,n), \tag{9}$$

где

$$q_i(t)=q_1(t)-\sum_{k=1}^{i-1}\Phi_{1k}(a_k,w_1,\varepsilon_3)-\Big(\sum_{k=1}^{i-1}\Phi_{2k}(a_k)\Big)\ddot{w}_1-\Big(\sum_{k=1}^{i-1}\Phi_{3k}(a_k)\Big)\ddot{\varepsilon}_3.$$

С учетом $q_1(t) = -p_0\varphi(t)$, $q_{n+1}(t) = 0$ получаем уравнение, связывающее функции $\varepsilon_3(t)$ и $w_1(t)$:

$$p_0\varphi(t) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \Phi_{2k}(a_k)\Big)\ddot{w}_1 + \Big(\sum_{k=1}^{n} \Phi_{3k}(a_k)\Big)\ddot{\varepsilon}_3 + \sum_{k=1}^{n} \Phi_{1k}(a_k). \tag{10}$$

Запишем уравнение движения крышки сосуда в безразмерном виде

$$M\ddot{\varepsilon}_3 = p_0\varphi(t) - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} \sigma_{3i}x\,dx, \qquad M = \frac{\bar{M}\bar{l}t_0^2}{\pi\sigma_0\bar{r}_0^2}, \tag{11}$$

где $\bar{M}$ — масса крышки; $\bar{r}_0$, $\bar{l}$ — радиус внутренней полости и полудлина цилиндрического сосуда; t_0, σ_0 — обезразмеривающие параметры времени и напряжений. Учитывая выражения (5), (9), уравнение (11) можно привести к виду

$$A_1\ddot{w}_1 + A_2\ddot{\varepsilon}_3 - \Psi_1(\varepsilon_3, w_1) = p_0\Big(1 - \frac{a_n^2 - a_0^2}{2}\Big)\varphi(t), \tag{12}$$

где

$$A_1 = -\sum_{i=1}^{n} \Big[\frac{a_i^2 - a_{i-1}^2}{2}\Big(\sum_{k=1}^{i-1} \Phi_{2k}(a_k)\Big) + \int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} \Phi_{2i}(x)x\,dx\Big],$$

$$A_2 = M - \sum_{i=1}^{n} \Big[\frac{a_i^2 - a_{i-1}^2}{2}\Big(\sum_{k=1}^{i-1} \Phi_{3k}(a_k)\Big) + \int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} \Phi_{3i}(x)x\,dx\Big],$$

$$\Psi_1(\varepsilon_3, w_1) = \sum_{i=1}^{n} \Big[\Big(\frac{a_i^2 - a_{i-1}^2}{2}\sum_{k=1}^{i-1} \Phi_{1k}(a_k, w_1, \varepsilon_3)\Big) - \frac{2}{3}\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} [(\sigma_{0i}e_i^{-1} + \gamma_i)(\varepsilon_3 - \varepsilon_{1i})]x\,dx\Big].$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи сводится к интегрированию системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений (10), (12) относительно двух функций $w_1(t)$, $\varepsilon_3(t)$. Начальные условия для этой системы имеют вид

$$\dot{w}_1(0) = \dot{\varepsilon}_3(0) = w_1(0) = \varepsilon_3(0) = 0.$$

Решение рассматриваемой задачи следует искать при амплитудах, превышающих предельное пластическое давление p_0^0 для идеально пластических материалов, определяемое по методике, изложенной в [3]. При амплитудах давления $p_0 < p_0^0$ сосуд имеет повышенный запас прочности. Поэтому будем рассматривать случаи, когда $p_0^0 < p_0 \leqslant p^*$.

Для установления предельно допустимой верхней границы давления в качестве критерия разрушения данного материала будем использовать площадь D_* под диаграммой деформирования до точки, соответствующей пределу его прочности σ_p^*. В этом случае с использованием закона линейного упрочнения получаем

$$D_* = (\sigma_0 + \sigma_p)e^*/2.$$

Равенство $e_i(a_{i-1}, t_i^*) = e_i^*$ позволяет определить время t_i^* возникновения разрушения в i-м слое. Если потребовать выполнения условия $\dot{w}_1(t_i^*) = 0$, то из этого условия можно найти предельно допустимую амплитуду p_{0i}^*. Тогда p^* определяется условием

$$p^* = \min{(p_{0i}^*)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Превышение этого значения амплитуды давления приводит к развитию разрушения в одном из слоев. При этом разрушения конструкции в целом не происходит, но надежность сосуда при эксплуатации резко снижается. Анализ развития зоны разрушения не является целью данной работы и поэтому не проводится.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Немировский Ю. В., Хейнлоо М. Л.** Одномерная задача прочности и оптимального проектирования многослойных сферических и цилиндрических сосудов или круглых дисков // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1976. № 5. С. 3–14.
2. **Ольшак В.** Теория пластических неоднородных тел / В. Ольшак, Я. Рыхлевский, Ю. Урбановский. М.: Мир, 1964.
3. **Немировский Ю. В.** Динамика пластических многослойных сферических сосудов и цилиндрических труб // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Теория предельного равновесия. 2006. № 1. С. 108–112.
4. **Немировский Ю. В.** Теплопроводность однородных и композитных тонкостенных конструкций / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский. Новосибирск: Арт-Авеню, 2008.
5. **Малинин Н. Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975.

Поступила в редакцию 12/III 2010 г.