Теплофизика и аэромеханика, 2010, том 17, № 2

УДК 536.37:538.36

Автоволновой режим нагрева диэлектрических сред электромагнитным излучением

И.Л. Хабибуллин, Ф.Ф. Назмутдинов, А.Ф. Габзалилов

Башкирский государственный университет, Уфа

E-mail: habibi.bsu@mail.ru

Исследован процесс нагрева движущейся среды электромагнитным излучением высокочастотного диапазона при наличии теплообмена с окружающей средой в приближении термически тонкого слоя. Установлено существование температурных профилей в виде автоволн. Проведено сравнение аналитических и численных решений.

Ключевые слова: диэлектрический нагрев, автоволновой режим, температурные домены, аналитическое решение, численное моделирование.

I. Рассматривается нагрев среды как результат конкуренции процессов переноса тепла за счет конвекции, теплопроводности (с учетом теплообмена с окружающей средой) и диэлектрического нагрева с объемным тепловыделением, интенсивность которого зависит от температуры.

Температурное поле в одномерном случае (приближение термического тонкого слоя) для неподвижной среды описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q(T) - F(T), \tag{1}$$

где λ и ρc — теплопроводность и объемная теплоемкость, $F(T)$ — функция, определяющая теплообмен с окружающей средой, $Q(T)$ — плотность тепловых источников за счет диссипации энергии электромагнитного излучения, определяемая в общем случае из выражения

$$Q = \frac{1}{2}\omega\ \varepsilon_0 \varepsilon'' E^2,$$

где ω — частота электромагнитного излучения, ε_0 — диэлектрическая постоянная, $\varepsilon'' = \varepsilon' \mathrm{tg}\delta$, ε' и $\mathrm{tg}\delta$ — относительная диэлектрическая проницаемость и тангенс угла потерь среды, E — напряженность электрического поля.

В задачах электромагнитного нагрева функция $Q(T)$ обычно имеет немонотонный вид хотя бы с одним максимумом, что обусловлено зависимостью диэлектрических свойств среды (ε' и $\mathrm{tg}\delta$) от температуры. Если при этом тепло-

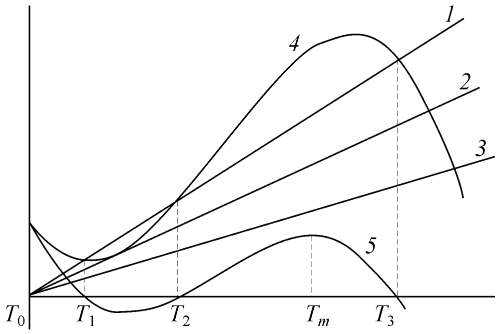

Рис. 1. Температурная зависимость функций $Q(T)$, $F(T)$ *и* $\varphi(T)$.
Функции: $F(T)$ (*1–3*), $Q(T)$ (*1–4*), $\varphi(T)$ (*5*).

обмен с окружающей средой моделировать по закону Ньютона $F(T)= = \gamma(T-T_0)$, функция $\varphi(T)=Q(T)-F(T)$ в зависимости от теплофизических и электрофизических параметров среды может иметь один, два или три нуля (рис. 1). Например, сочетание кривых *1* и *4* на рис. 1 определяет три равновесных значения температуры — T_1, T_2, T_3 [1, 2]. При этом между двумя устойчивыми состояниями равновесия $T = T_1$ и $T = T_3$ имеет место одно неустойчивое состояние $T = T_2$. Такой характер равновесия между тепловыделением и теплоотводом обеспечивает возможность волнового распространения температурного профиля с постоянной скоростью и постоянной амплитудой, пропорциональной $T_3 - T_1$.

В работе [3] экспериментально установлена возможность распределения температуры в виде волнового фронта с определенными значениями амплитуды и скорости. В качестве нагреваемой среды изучалась пленка из поливинилацетата, который характеризуется релаксационным максимумом зависимости диэлектрической проницаемости от температуры. Теоретическое значение для скорости волны, полученное из уравнения (1), при аппроксимации функции $\varphi(T) = Q(T) - F(T)$ в виде полинома третьей степени

$$\varphi(T) = \text{const}\,(T - T_1)(T - T_2)(T - T_3) \tag{2}$$

дает удовлетворительное согласование с результатами экспериментов. Распространение волнового фронта нагрева является примером автоволнового процесса, а диэлектрик с максимумом температурной зависимости диэлектрической проницаемости является нелинейной активной средой [3, 4].

2. Рассмотрим аналитическое решение уравнения теплопроводности, описывающего нагрев движущейся жидкости объемным тепловым источником $\varphi(T)$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\varphi(T)}{\rho c} - c_1 u(T)\frac{\partial T}{\partial x} + a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad c_1 = \frac{\rho_f c_f}{\rho c}, \quad a = \frac{\lambda}{\rho c}. \tag{3}$$

Здесь ρc — объемная теплоемкость среды, $\rho_f c_f$ — объемная теплоемкость движущегося флюида, $u(T)$ — скорость движения жидкости, которая в общем случае зависит от температуры, например, за счет зависимости вязкости от температуры. В общем виде уравнение (3) описывает теплоперенос при фильтрации жидкости в пористой среде, в случае движения жидкости в свободном пространстве $\rho_f c_f = \rho c$ и $c_1 = 1$.

Рассмотрим возможность существования решения уравнения (3) в виде стационарных температурных волн. Для этого введем автомодельную переменную [4]

$$\xi = x + vt, \tag{4}$$

где v — скорость движения температурной волны, подлежащая определению в ходе решения задачи. С учетом (4) уравнение (3) принимает вид

$$a\frac{d^2 T}{d\xi^2} - (v + c_1 u(T))\frac{dT}{d\xi} + \frac{\varphi(T)}{\rho c} = 0. \tag{5}$$

С использованием подстановок

$$\frac{dT}{d\xi} = p, \quad \frac{d^2T}{d\xi^2} = p\frac{dP}{dT}$$

уравнение (5) представляется в виде

$$P\frac{dp}{dT} = -\frac{\varphi(T)}{\lambda} + \frac{v + c_1 u(T)}{a}\, p. \qquad (6)$$

Решение уравнения (6) зависит от вида функции $\varphi(T)$ и $u(T)$. Функцию $\varphi(T)$ выберем в виде кубического полинома

$$\varphi(T) = -\,q(T - T_1)(T - T_2)(T - T_3). \qquad (7)$$

Такое представление, как было указано выше, определяет суммарные тепловые источники в среде, нагреваемой электромагнитным излучением высокочастотного диапазона, с учетом теплообмена с окружающей средой. Для однозначности функции $\varphi(T)$ необходимо определить величину q. Для этого из условия $\frac{d\varphi}{dT} = 0$ находим точки экстремума функции $\varphi(T)$, в частности точка максимума определяется из выражения

$$T_m = \left(T_1 + T_2 + T_3\right)\big/3 + \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 - T_1T_2 - T_2T_3 - T_1T_3}\,\Big/3.$$

Нетрудно показать, что подкоренное выражение больше нуля и $\left.\frac{d^2\varphi}{dT^2}\right|_{T=T_m} < 0.$ Таким образом, при заданных значениях T_1, T_2, T_3 однозначно определяется значение T_m (см. рис. 1). Тогда, с учетом (1) и выражения $F = \gamma(T - T_0)$, имеем

$$\varphi(T_m) = Q(T_m) - F(T_m) = 0{,}5\omega\varepsilon_0\varepsilon''(T_m)E^2 - \gamma(T_m - T_0).$$

Далее, полагая в (7) $T = T_m$, находим

$$q = -\frac{0{,}5\omega\varepsilon_0\varepsilon''(T_m)E^2 - \gamma(T_m - T_0)}{(T_m - T_1)(T_m - T_2)(T_m - T_3)}. \qquad (8)$$

Отметим, что возможна также кусочно-линейная аппроксимация функции $\varphi(T)$ [5]. Температурную зависимость скорости примем в виде линейной функции $u(T) = u_0$ $[1 + b(T - T_0)]$ [5]. Решение уравнения (6) с учетом (7) ищем в виде [4]

$$P = k(T - T_1)(T - T_3). \qquad (9)$$

Подставляя (7)–(9) в (6), получаем соотношение

$$k\left[2T - (T_1 + T_3)\right] = q(T - T_2)/\lambda k + v/a + c_1u_0(1 - bT_0)/a + c_1u_0bT/a.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях T, получается:

$$k_{1,2} = \frac{c_1u_0b}{4a} + \sqrt{\frac{c_1^2u_0^2b^2}{16a^2} + \frac{q}{2\lambda}}, \qquad (10)$$

$$v = aqT_2/\lambda k - ka(T_1 + T_3) - c_1u_0(1 - bT_0). \qquad (11)$$

Далее, решая уравнение $dT/d\xi = k(T - T_1)(T - T_3)$, находим выражение для температуры

$$T = \frac{T_3 - CT_1 e^{k(T_3 - T_1)\xi}}{1 - Ce^{k(T_3 - T_1)\xi}}. \qquad (12)$$

Выражения (11) и (12) представляют решение уравнения (3). Из уравнения (12) следует, что $T(\xi \to +\infty) = T_1$, $T(\xi \to -\infty) = T_3$, $\partial T/\partial \xi < 0$, $\partial T/\partial \xi = 0$ при $\xi \to \pm\infty$. Таким образом, решение (12) описывает температурную автоволну, движущуюся в положительном направлении оси x. Отметим, что в литературе такие температурные профили также называются волной переключения, доменной стенкой [5]. Постоянная интегрирования C может быть определена из условия $T(\xi = 0) = (T_1 + T)/2$, тогда $C = -1$.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

– для неподвижной среды (u_0 = 0) из уравнений (10) и (11) следуют известные в литературе выражения [3, 4]:

$$k = \sqrt{q/2\lambda}, \quad v = ka\left[2T_2 - (T_1 + T_3)\right]. \qquad (13)$$

– для среды, скорость движения которой не зависит от температуры (b = 0), имеют место соотношения:

$$k = \sqrt{q/2\lambda} \quad v = ka\left[2T_2 - (T_1 + T_3)\right] - c_1 u_0. \qquad (14)$$

Поскольку температурной волне, движущейся по направлению оси x, соответствует значение $v < 0$, выражение (14) можно представить в виде $v = -v_1 - c_1 u_0$, где $v_1 = a\left[T_1 + T_3 - 2T_2\right]\sqrt{q/2\lambda}$.

Таким образом, результирующая скорость температурной волны в подвижной среде определяется суммой скорости конвекции и собственной скорости температурной волны в покоящейся среде. Отсюда следует, что если направления движения среды и распространения температурной автоволны совпадают ($u_0 > 0$), то конвекция способствует увеличению скорости температурной волны. При $u_0 < 0$ результирующая скорость температурной волны меньше.

Очевидно, что при выполнении условия $|u_0| \geq |v_1|/c_1$ бегущая температурная волна не образуется.

3. Рассмотрим результаты численного моделирования уравнения (3). Численный расчет проводился на основе неявной разностной схемы с использованием метода прогонки. При этом на границе $x = l$ области $0 < x < l$ задается условие

$$T(x = l, t) = T_0. \qquad (15)$$

В зависимости от граничных условий при x = 0 рассматриваются 2 задачи:

– в первой задаче при x = 0 принято условие адиабатичности

$$\partial T(0, t)/\partial x = 0. \qquad (16)$$

Это условие, впервые использованное в работе Д. Егера [6], посвященной моделированию нагрева сред электромагнитным излучением, основано на том, что при наличии распределенных по объему тепловых источников влияние теплообмена на поверхности x = 0 на температурное поле внутри области нагрева во многих случаях является незначительным. В работе [7] показано, что такое условие является достаточно точным приближением к реальной ситуации. В частности, в задачах конвективной теплопроводности условие (16) соответствует случаю отбора жидкости из области нагрева ($u_0 < 0$). Отметим, что полученное выше аналитическое решение асимптотически соответствует этой задаче;

– во второй задаче при $x = 0$ принято граничное условие первого рода

$$T(x=0,t) = T_Г. \tag{17}$$

В задачах конвективной теплопроводности физически такая ситуация соответствует нагнетанию жидкости в область нагрева. Аналитическое решение данной задачи неизвестно, в частности, решение вида (12) не удовлетворяет граничному условию (17). Численное решение предполагает задание начальной температуры в области нагрева и этот вопрос рассмотрен ниже.

Численные расчеты проводились при следующих базовых значениях параметров: $\rho c = 10^7\left(\text{Дж/м}^3\text{К}\right)$, b = 0,05 (1/К), $a = 10^{-7}$(m^2/c), T_0 = 300 K, T_1 = 310 K, T_2 = 330 K, T_3 = 370 K, $u_0 = 1{\cdot}10^{-5}$ м/с, l = 10 м, $q_0 = 10^5$ (Вт/м^2), α_0 = 0,05 (1/м), γ = 15 (Вт/м^3·К). Графические результаты приведены для безразмерных параметров $\theta = T/T_0$, $z = x/x_0$, $\tau = t/t_0$, $\bar{u} = u/u_0$, где $x_0 = 1/2\alpha_0$, $t_0 = \rho c T_0 / \alpha_0 q_0$, $\alpha_0 = 0{,}5\omega\sqrt{\varepsilon'}tg\delta c_0$, $q_0 = c_0\varepsilon_0\varepsilon' E^2/2$, $c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. Здесь q_0 и α_0 — интенсивность и показатель поглощения электромагнитного излучения, t_0 и x_0 — характерные время и длина нагрева электромагнитным излучением, ε_0 и μ_0 — электродинамические постоянные.

Результаты численного расчета первой задачи приведены на рис. 2–4. Кривые *1* и *2* на рис. 2 построены для неподвижной среды ($u_0 = 0$), кривые *3* и *4* — для среды, движущейся по направлению оси x со скоростью $u_0 = 10^{-5}$ м/с. Из рисунков видно, что в обоих случаях со временем формируются температурные автоволны, которые имеют постоянную амплитуду $\theta = \theta_3$ = 1,23 (T = 370 °K) и постоянные скорости. В соответствии с полученными выше аналитическими выражениями (11) и (13) скорость температурной автоволны при наличии конвекции существенно больше, так, в случае принятых значений параметров из уравнений (11) и (13) следует $|v| = 3{,}16{\cdot}10^{-5}$ и $0{,}325{\cdot}10^{-5}$ м/с. С учетом масштабов обезразмеривания координаты и времени нетрудно убедиться, что при численном решении получаются такие же значения скоростей для кривых *3, 4* и *1, 2* на рис. 2 соответственно.

На удовлетворительное согласование результатов аналитического и численного решений указывает также рис. 3, на котором сплошные линии соответствуют численному решению задачи, пунктирные линии — расчету по аналитическому решению (12). Рис. 4, на котором кривые *1* и *2* соответствуют моментам времени τ = 0,5 и 0,1, иллюстрирует реализацию

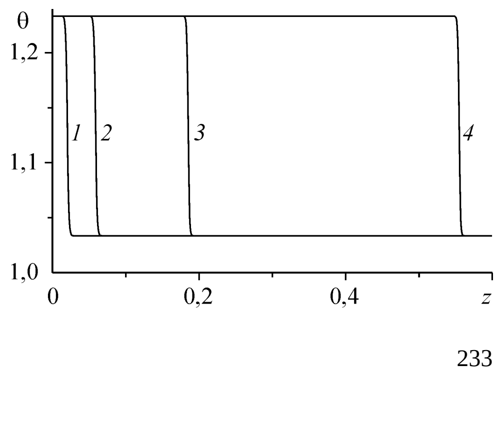

Рис. 2. Температурная волна в моменты времени.
$\bar{u}$ = 0: τ = 0,1 (*1*), 0,3 (*2*), $\bar{u}$ = 1: τ = 0,1 (*3*), 0,3 (*4*).

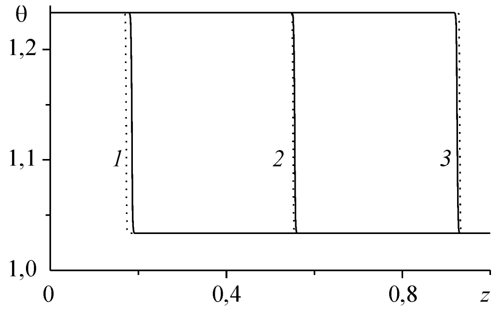

Рис. 3. Сравнение численного и аналитического решений.
$\tau = 0{,}1$ (*1*), 0,3 (*2*), 0,5 (*3*), $\overline{u} = 1$.

режима локализации области нагрева (практически неподвижная температурная волна). Как было указано выше, такой режим реализуется при $u_0 < 0$.

На рис. 5–8 приведены результаты численного моделирования второй задачи. При этом рис. 5 соответствует начальной, рис. 6 — развитой стадиям процесса нагрева. Из рис. 5 следует, что происходит постепенное формирование температурной волны. При принятых значениях базовых параметров формирование температурной волны (при этом достигаются амплитудное значение температуры и постоянная скорость температурной волны) составляет $\tau = 0{,}04524$. Время формирования температурной волны определяется всеми рассматриваемыми в модели механизмами теплопередачи, а также начальным значением для температуры.

Из рис. 6 следует, что после формирования температурная волна имеет постоянную амплитуду $\theta = \theta_3$, а сам температурный профиль имеет форму температурного (теплового) домена [5]. Таким образом, принципиальное отличие второй задачи от первой заключается в трансформации температурного профиля вида доменной стенки в профиль вида домена (сочетание двух доменных стенок). Основной причиной формирования неоднородного температурного профиля в виде теплового домена является граничное условие (17). В процессе нагрева тепловой домен со временем расширяется, т. к. скорость переднего фронта больше скорости заднего. Так, по данным рис. 6 эти скорости соответственно равны $3{,}12 \cdot 10^{-5}$ и $2{,}25 \cdot 10^{-5}$ м/с. Такая структура температурной автоволны определяется видом тепловых источников в среде $\overline{\varphi}$ (линия *1*, рис. 7), линия *2* на этом рисунке соответствует фигуре *1* на рис. 6. На рис. 7 видно, что в среде движутся два тепловых источника дельтообразного вида, причем крутизна переднего фронта теплового домена больше, чем и обусловливается большая скорость его движения. Из анализа полученного выше аналитического решения нетрудно установить, что в первой задаче в среде реализуется один дельтообразный тепловой источник, который движется со скоростью температурной волны v, причем $\varphi = \varphi_{\max}$ на фронте температурной автоволны $\xi = 0$, $\varphi \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$.

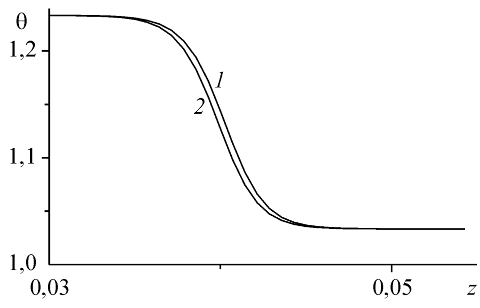

Рис. 4. Локализация области нагрева.
$\tau = 0{,}1$ (*1*), 0,5 (*2*), $\overline{u} = 0{,}123$.

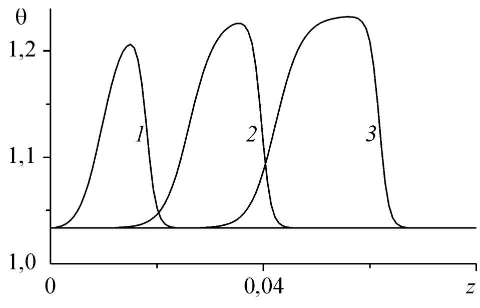

Рис. 5. Начальная стадия формирования температурной волны.
$\tau = 0{,}08$ (*1*), 0,024 (*2*), 0,040 (*3*), $\overline{u} = 1$.

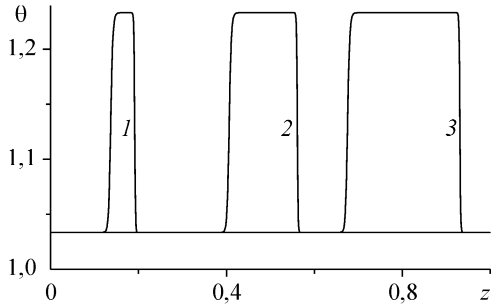

Рис. 6. Тепловые домены в нагреваемой среде.
τ = 0,1 (*1*), 0,3 (*2*), 0,5 (*3*), $\bar{u}$ = 1.

Молекулярная теплопроводность незначительно влияет на профиль температурных автоволн, она приводит к некоторому размыву фронта волны, что наиболее заметно при малых значениях времени и координат (см. рис. 5 и температурную кривую на рис. 7). Для оценки роли молекулярной теплопроводности введем безразмерный критериальный параметр π как отношение характерных времен нагрева за счет электромагнитного излучения $t_1 = \rho c \Delta T / (2\alpha_0 q_0)$ и за счет теплопроводности $t_2 = x_0^2 / a = 1 / (4\alpha_0^2 a)$, тогда $\pi = t_1 / t_2 = \lambda \Delta T 2\alpha_0 / q_0$.

Принимая $\Delta T = T_3 - T_0$, для приведенных выше теплофизических параметров получаем $\pi = 7 \cdot 10^{-5}$, то есть скорость нагрева электромагнитным излучением примерно на 4 порядка больше скорости нагрева за счет переноса тепла теплопроводностью.

Тем не менее, теплопроводность является необходимым атрибутом реализации автоволнового режима нагрева, т. к. она обеспечивает послойное инициирование распределенного в системе источника тепла и определяет скорость распространения температурных профилей (по формуле (13) $v \sim \sqrt{\lambda}$).

Численные расчеты показали, что для обеих задач увеличение интенсивности объемного тепловыделения и учет роста скорости конвекции за счет нагрева не влияют на амплитуду температурных волн, однако приводят к заметному росту их скорости.

В процессе численного моделирования также установлено, что начальное распределение температуры оказывает влияние только на стадию формирования волны, со временем начальные условия “забываются”, и на амплитуду и скорость волн они не влияют. В случае первой задачи начальное условие принято в виде $\theta(z, 0) = \theta_1$.

Решение второй задачи в виде температурных автоволн существует при выполнении следующих условий: при $\theta(z, 0) = \theta_1$ температура на поверхности $z = 0$ должна превышать значение θ_2. Если $\theta(0, \tau) < \theta_2$, то имеют место обычные монотонные температурные профили, характерные для классического молекулярно-конвективного переноса тепла (см. кривые *1* и *2*, рис. 8). При $\theta(0, \tau) > \theta_2$ температурная автоволна образуется при любых значениях начальной температуры (см. кривые *3*–*6*, рис. 8). Если же температура на поверхности $z = 0$ фиксировано ниже значения θ_2, то необходимым условием формирования температурной автоволны является начальное значение температуры в среде, большее

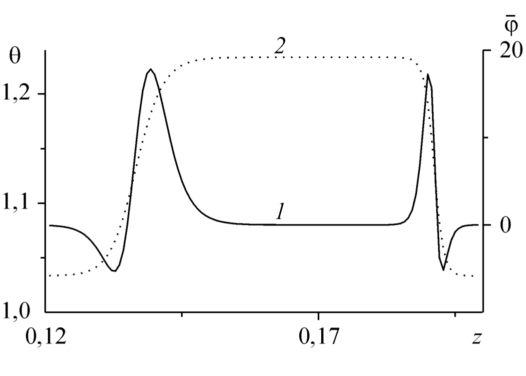

Рис. 7. Распределение теплового источника $\bar{\varphi}$ (*1*) и безразмерной температурной волны (*2*) по координате, τ = 0,1, $\bar{u}$ = 1.

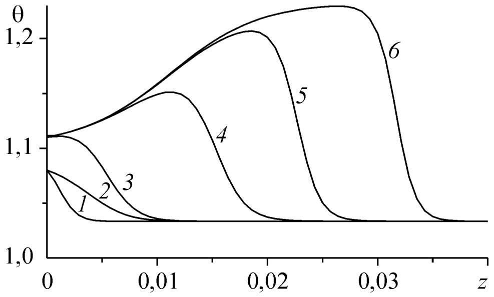

Рис. 8. Влияние краевых условий на формирование температурных профилей.
τ = 0,001 (*1*), 0,05 (*2*), 0,05 (*3*), 0,15 (*4*), 0,02 (*5*), 0,025 (*6*), $\overline{u}$ = 1.

чем θ_2. При этом, как было указано выше, профиль начального распределения температуры на характеристики температурной автоволны (профиль, скорость, амплитуда) существенного значения не имеет. В численных расчетах второй задачи использовалось ступенчатое распределение начальной температуры $\theta(z,0)=\theta_3 \quad 0<z\le 0,000714;\ \ \theta(z,0)=\theta_1 \quad z>0,000714$.

Уравнение (1) записано в приближении термического тонкого слоя. Очевидно, что это приближение является допустимым при выполнении условия

$$d << \sqrt{al/v},$$

где a — температуропроводность среды, d — характерный поперечный размер нагреваемой среды, l и v — координата фронта и скорость температурной волны. При выполнении этого условия время тепловой релаксации по толщине слоя d^2/a намного меньше характерного времени задачи — времени пробега температурных волн по среде l/v. Принимая a = 10^{-7} м^2/с, v = $0{,}325\cdot10^{-5}$ м/с, l = 2 м, имеем d << 0,25 м. Следует отметить, что в зависимости от конкретной ситуации критическое значение d может находиться в интервале от долей миллиметров до нескольких метров.

4. В статье приведено аналитическое и численное моделирование квазилинейного уравнения теплопроводности, описывающего нагрев движущейся среды объемными тепловыми источниками, нелинейно зависящими от температуры. Такая модель является аналогом так называемых автоволновых процессов и является обобщением некоторых известных моделей. Построено аналитическое решение рассматриваемой задачи для случая линейной аппроксимации зависимости скорости движения среды от температуры.

На основе аналитического и численного решений установлено существований температурных профилей в виде автоволн, которые характеризуются постоянными значениями амплитуды и скорости распространения.

Изученные особенности нагрева электромагнитным излучением в нелинейных режимах позволяют реализовывать процессы управления и оптимизации нагрева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хабибуллин И.Л.** Электромагнитная термогидродинамика поляризующихся сред. Уфа: Изд-во. Башкир. ун-та. 2000. 246 с.
2. **Хабибуллин И.Л.** Нелинейные эффекты при нагреве сред электромагнитным излучением // ИФЖ. 2000. Т. 73, № 4. С. 832–838.
3. **Бондаренко П.Н., Емельянов О.А., Катков С.Н.** Распространение волнового фронта электротеплового разогрева диэлектриков // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, вып. 16. С. 45–48.
4. **Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Т.** Автоволновые процессы. М.: Наука, 1989. 240 с.
5. **Гуревич А.Вл., Минц Р.Г.** Локализованные волны в неоднородных средах // УФН, 1984. Т. 142. Вып. 1. С. 61–98.
6. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
7. **Галимов А.Ю., Хабибуллин И.Л.** Особенности фильтрации высоковязкой жидкости при нагреве электромагнитным излучением // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 5. С. 114–123.

Статья поступила в редакцию 20 июля 2009 г.