

УДК 532.546+612.135

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ МИКРОГЕМОЦИРКУЛЯЦИИ С УЧЕТОМ ПУЛЬСОВЫХ КОЛЕБАНИЙ ДАВЛЕНИЯ

Т. А. Хмель, А. В. Федоров, В. М. Фомин, В. А. Орлов*

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск

* Институт лазерной физики СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mails: khmel@itam.nsc.ru, lss@laser.nsc.ru

С использованием методов физико-математического моделирования исследованы процессы нестационарного транскапиллярного обмена в гемодинамике с учетом движения плазмы в интерстициальном пространстве. Наличие пульсовых колебаний давления в капиллярной сети обуславливает разделение во времени и пространстве процессов фильтрации и реабсорбции через стенки капилляра. Показаны общие и специфические свойства функционирования артериального, промежуточного и венозного участков капиллярной сети в обменных процессах. Установлено, что пульсации давления обеспечивают интенсификацию транскапиллярного обмена.

Ключевые слова: гемодинамика, транскапиллярный обмен, фильтрация, физическое и математическое моделирование.

Введение. Транспортная функция сердечно-сосудистой системы реализуется в зоне микрогемодикуляции, где осуществляется транскапиллярный обмен, играющий важную роль в обеспечении равновесия параметров организма (таких, как кровяное давление, температура, кислотно-щелочной баланс и др.) при изменении условий окружающей среды.

Для комплексного решения проблем микрогемодикуляции в экспериментальной и клинической медицине необходимо проведение междисциплинарных интеграционных фундаментальных исследований на стыке биологии, медицины, физики и прикладной математики.

Классические представления о транскапиллярном обмене основаны на стационарной схеме Старлинга фильтрационного течения плазмы [1–3]. При отрицательном градиенте давления внутри капилляра давление на участке, примыкающем к артериоле, всегда выше давления в окружающем пространстве (интерстиции) с учетом онкотической составляющей, а на участке, примыкающем к венуле, — всегда ниже. Поэтому на артериальном участке капилляра происходит истечение плазмы через поры в стенках капилляра (фильтрация), а на венозном участке, наоборот, перенос вещества внутрь капилляра (реабсорбция). Соответствующая схема сети капилляров представлена на рис. 1 [4].

Однако данная модель не описывает полностью процесс газообмена [1]. Для выхода кислорода из эритроцитов требуется сдвиг параметра рН в сторону повышения уровня кислотности [5], что обеспечивается поступлением в капилляр углекислого газа или ионов водорода. Осуществить такой сдвиг только за счет диффузии за время прохождения порции крови через капилляр (соответствующее периоду сердечных сокращений) невозможно. Таким образом, представления о стационарном газообмене являются противоречивыми.

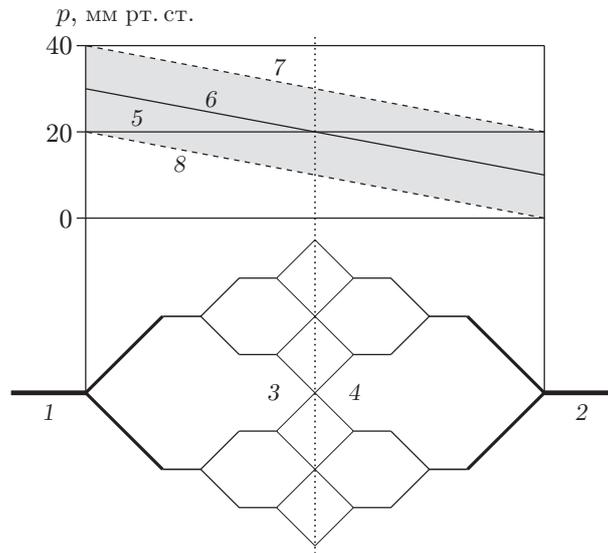


Рис. 1. Схема капиллярной сети и распределения давления:

1 — артериола, 2 — венула, 3 — артериольная сеть капилляров, 4 — венульная сеть капилляров, 5 — интерстициальный уровень, 6 — давление в стационарной схеме Старлинга, 7, 8 — максимальные и минимальные давления в нестационарной схеме

Экспериментальные данные [4, 6], полученные с помощью фазочувствительной лазерной установки, свидетельствуют о нестационарном характере процессов. В экспериментах [4, 6] наблюдались механические перемещения стенок микрососудов, в частности зависящие от ритма сердечных сокращений и обусловленные наличием пульсовой волны давления крови. Представленные на рис. 2 данные свидетельствуют о наличии локальных колебаний, в том числе давления в капилляре. Распределения вдоль капилляра максимальных и минимальных значений давления показаны на рис. 1 штриховыми линиями 7, 8.

Пульсовые колебания давления в капиллярной сети экспериментально наблюдались и ранее. В [7] проведен анализ известных данных и выполнены оценки скорости распространения пульсовой волны давления, которые показали, что изменение давления происходит практически одновременно по всей длине капилляра, при этом продольный градиент давления не меняется.

Анализ результатов экспериментов [4, 6], а также экспериментальных данных, представленных в [7], позволил предложить новую концепцию газообмена и обмена веществ. Проникновение веществ, понижающих параметр рН, происходит при воздействии импульсного давления на стенки артериол, а поступающая в капилляр порция крови уже содержит свободный кислород. В момент сердечного выброса давление крови внутри капилляра повышается, на преобладающем участке сети кислород и питательные вещества поступают из капилляров в интерстициальное пространство. По мере понижения давления крови усиливается поступление углекислого газа и продуктов метаболизма в капилляры. Эти два процесса разнесены не только во времени, но и в пространстве и происходят за один период сердечного цикла.

Целью настоящей работы является исследование указанных нестационарных процессов с точки зрения механики жидкости. В частности, рассматриваются процессы фильтрации (реабсорбции) плазмы через стенки капилляров на всех участках от артериолы до венулы и на всех стадиях цикла сердечных сокращений, а также движения плазмы в интерстициальном пространстве. Численное моделирование осуществляется в рамках нестационарных уравнений механики сплошных сред.

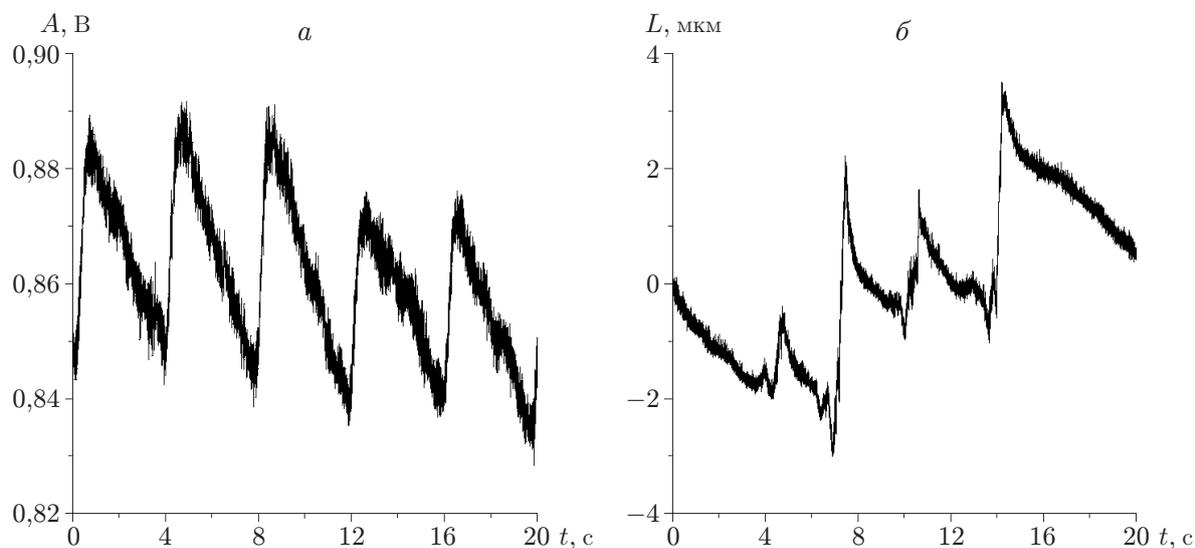


Рис. 2. Амплитуды электропотенциала (*a*) и локальных перемещений (*б*) гладкомышечной клетки артериолы лягушки

1. Физическая постановка задачи. Приведем некоторые сведения о структуре капиллярной сети. Капилляры представляют собой тонкие сосуды диаметром около 10 мкм. Длина капилляра, один конец которого примыкает к артериоле, а другой — к венуле, составляет порядка 1 мм. Стенки капилляров сформированы из одного слоя клеток эпителия, разделенных просветами, через которые осуществляется транскапиллярный обмен. Межкапиллярное пространство заполнено интерстициальной жидкостью с включениями (коллагеновые и эластиновые волокна, лимфатические капилляры и др.). В целом эту среду можно представить в виде двухфазной пористой среды, при этом пористая основа (интерстициальный матрикс), вообще говоря, является деформируемой. Соответствующая модель для упругопластического пористого тела исследовалась, например, в [8], где, однако, рассматривались лишь стационарные течения. В настоящей работе исследуются нестационарные процессы, при этом на первом этапе пористая структура интерстициального матрикса считается недеформируемой.

Внутри капилляра кровь движется под действием градиента давления. Как отмечено выше, этот градиент, а также средняя скорость крови в капилляре практически не зависят от колебаний, вызываемых сердечными сокращениями. В соответствии с приведенными в [7] данными о градиенте давления и коэффициентах фильтрации стенок капилляра максимальная скорость фильтрации является величиной порядка $10^{-1} \div 10^{-2}$ мкм/с, что на несколько порядков меньше средней скорости движения крови внутри капилляра (порядка 1 мм/с). Вследствие такого различия скоростных масштабов совместное рассмотрение внутренней и внешней областей капилляра не имеет смысла, поэтому в численных расчетах исследуется лишь внешняя область (интерстициальное пространство). При этом скорость фильтрации через стенку капилляра определяется разностью внутрикапиллярного давления и давления в интерстиции. При определении скорости фильтрации давление в интерстиции считается постоянным [7] и равным среднему по времени значению давления в средней части капилляра (т. е. процессы фильтрации и реабсорбции уравниваются).

Далее рассматривается движение плазмы в окрестности единичного капилляра с учетом характерного периодического изменения внутрикапиллярного давления. На данном этапе исследования перемещениями стенок капилляра можно пренебречь, так как амплитуда этих перемещений мала по сравнению с диаметром капилляра. Межкапиллярное

пространство, состоящее из жидкости и распределенных в ней структурных элементов межклеточного пространства, представим в виде неподвижной изотропной пористой среды. Плазму будем считать несжимаемой вязкой ньютоновской жидкостью.

2. Математическая модель течения плазмы в интерстициальном пространстве. Уравнения, описывающие осесимметричные нестационарные фильтрационные течения вязкой жидкости в твердом пористом материале, могут быть записаны в переменных интенсивность вихря — функция тока:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{1}{rm} \frac{D(\psi, \chi)}{D(r, z)} + \frac{\chi}{rm^2} \frac{D(\psi, m)}{D(r, z)} &= -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r^2 \chi)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right], \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{m} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial m}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial m}{\partial z} \right) &= r^2 m \chi, \\ \chi &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad mu = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad mv = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ψ — функция тока; χ — интенсивность модифицированного вихря; u — аксиальная скорость (вдоль капилляра); v — радиальная скорость; m — пористость интерстиционного матрикса (относительный объем жидкости в межкапиллярном пространстве); f — сила сопротивления.

Внутрикапиллярное давление характеризуется постоянным продольным градиентом Δp_0 , обеспечивающим равномерный кровоток, но зависит также от времени:

$$p_c(z, t) = p_0 + \Delta p_0 (0,5 - z/z_1) + \Delta p_c \theta(t). \quad (2)$$

Заметим, что зависимость давления от времени (2) соответствует экспериментальной кривой на рис. 2, а, т. е. примерно на $1/5$ временного периода происходит резкий рост давления, а затем — постепенный спад. Такое поведение описывается функцией

$$\theta(t) = \begin{cases} -0,5 + 5\tau, & 0 \leq \tau < 0,2, \\ 0,75 - 1,25\tau, & 0,2 \leq \tau < 1, \end{cases} \quad \tau = (t - nT)/T.$$

Для уравнений (1) ставятся следующие граничные условия. На поверхности капилляра задается радиальная компонента скорости, которая определяется из закона фильтрации через стенку капилляра

$$v(r_1, z, t) = v_0(z, t) = (p_c(z, t) - p_0)k_c,$$

где k_c — коэффициент проницаемости стенки капилляра. Соответственно определяется распределение функции тока ψ вдоль границы:

$$\psi_0(z, t) = \int_0^z r_1 m v_0(\zeta, t) d\zeta.$$

Для удобства граничное условие для вихря задается в предположении, что его генерация обусловлена только изменением фильтрационной компоненты скорости, т. е. на стенке капилляра $\partial u / \partial r \ll \partial v / \partial z$. Тогда из уравнения для вихря определяется значение его интенсивности $\chi = \chi_0 = -dv_0(z, t) / r_1 dz = \text{const}$. Предполагается, что на внешней границе $r = r_2$, ограничивающей межкапиллярное пространство, интенсивность вихря χ равна нулю. Это условие согласуется с тем, что в действительности вихрь генерируется на стенке капилляра, но вследствие большой вязкости очень быстро затухает.

Предполагается также, что при удалении от капилляра в течении преобладает радиальная компонента скорости, т. е. $u = 0$ при $r = r_2$. Для функции тока это условие

соответствует равенству $\partial\psi/\partial r = 0$. Отметим, что в [8] наличием аксиальной компоненты скорости u пренебрегалось во всей области.

На “торцевых” плоскостях, ограничивающих межкапиллярное пространство, предполагается отсутствие притока или оттока плазмы со стороны артериол и венул, т. е. при $z = 0$ и $z = z_1$ ставятся условия $u = 0$ ($\partial\psi/\partial r = 0$ или $\psi = \text{const}$) и “мягкие” условия для вихря $\partial\chi/\partial z = 0$. Значения ψ определены из условий на стенках капилляра: $\psi(0) = 0$, $\psi(z_1, t) = \psi_0(z_1, t)$.

В качестве начальных условий для функции тока задавалась некоторая гладкая функция, удовлетворяющая граничным условиям

$$\psi(r, z, 0) = \psi_0(z, 0)(1 - (r - r_1)^2/(r_2 - r_1)^2). \quad (3)$$

Распределения u , v , χ при $t = 0$ определялись из (1), (3). Отметим, что менее чем через период начальные данные перестают оказывать влияние на установившееся периодическое течение.

Расчеты проводились при следующих значениях геометрических и физических параметров: длина капилляра 600 мкм, радиус капилляра 10 мкм, внешний радиус $r = r_2$ варьировался в диапазоне от 100 до 250 мкм. Коэффициент фильтрации стенки $6 \cdot 10^{-5}$ мкм³·мкм⁻²·с⁻¹·Н⁻¹·м², перепад давления 5 мм рт. ст., вязкость и плотность плазмы взяты из работы [7]. Пористость интерстициального пространства равна 0,4. Для силы сопротивления принималось выражение, аналогичное формуле для сопротивления системы решеток при малых числах Рейнольдса [9]:

$$\mathbf{f} = -\varphi \frac{33}{\text{Re} m^2 l} \frac{|\mathbf{u}|\mathbf{u}}{2} = -\varphi \frac{16,5}{m^2 l^2} \frac{\mu}{\rho} \mathbf{u}.$$

Здесь l — средний размер включений в интерстиции; φ — поправочный коэффициент на их форму и фазовый состав. В расчетах принимались значения $l = 30$ мкм, $\varphi = 0,05$. Период пульсаций считался равным 1 с.

Задача решалась на равномерной прямоугольной конечно-разностной сетке с использованием схемы Аракавы в сочетании с процедурой вложенных усреднений, позволяющей избежать развития слабой неустойчивости Хенричи [10], и метода Либмана. Точность решения контролировалась путем вычисления нескольких численных функционалов.

3. Результаты расчетов. Ниже приводятся результаты расчетов процессов микрогемодиализации с учетом пульсовых колебаний давления.

3.1. Стационарная модель течения Старлинга. Для проверки численного метода и выполнения оценки эффективности нестационарной схемы течения проведен расчет по классической стационарной модели Старлинга (при $\Delta p_c = 0$). На рис. 3 приведено соответствующее решение в виде линий тока и распределения радиальной скорости в плоскости (z, r) . Видно, что протяженности участков фильтрации и реабсорбции постоянны и равны, т. е. точка, в которой фильтрационное течение меняет направление, находится в середине капилляра. На участках, примыкающих к артериоле и венуле, течение вне капилляра происходит практически в радиальном направлении (см. [8]). Однако в средней части капилляра аксиальная и радиальная компоненты скорости являются величинами одного порядка. На рис. 3,б видно, что по мере удаления от капилляра радиальная скорость быстро уменьшается. Это свидетельствует о слабом влиянии других капилляров в сети на течение в интерстиции в окрестности данного капилляра.

3.2. Влияние пульсовых колебаний давления на фильтрацию через стенки капилляра. Влияние нестационарности процесса исследовалось при двух значениях амплитуды пульсаций давления: $\Delta p_c = 0,5\Delta p_0$ (режим А) и $\Delta p_c = \Delta p_0$ (режим В). В режиме В перепад давления за период пульсаций соответствует перепаду давления на концах капилляра. Согласно данным [7] эта величина составляет около 5 мм рт. ст.

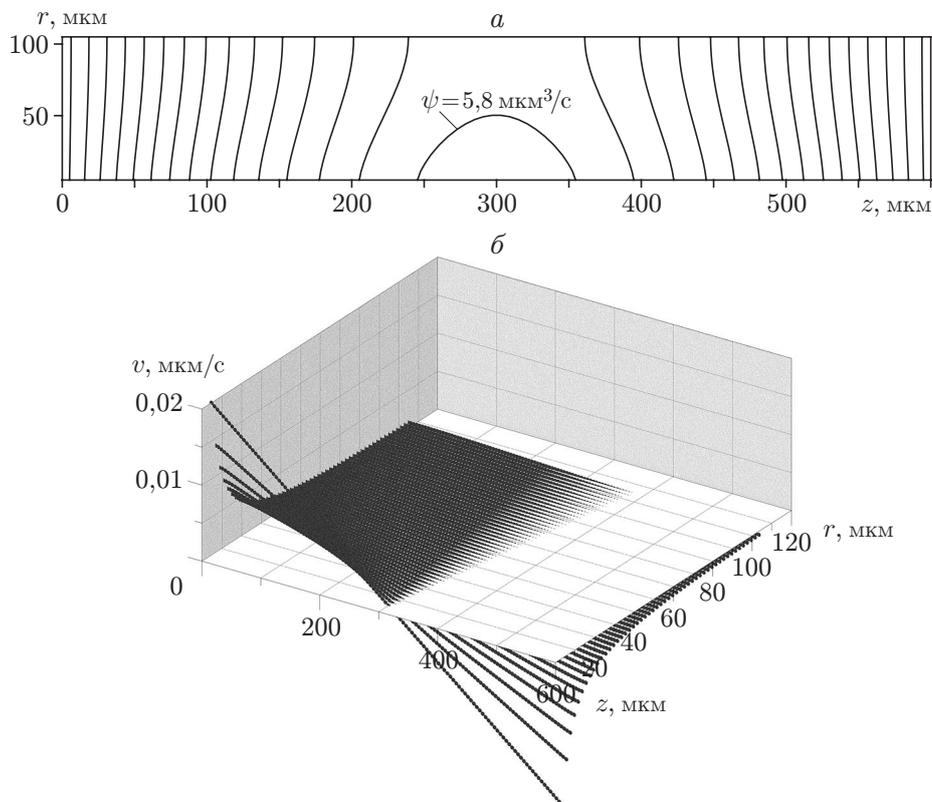


Рис. 3. Течение в межкапиллярном пространстве, соответствующее стационарной схеме Старлинга:

a — линии тока, b — распределение радиальной скорости

Зависимость скорости фильтрации в середине капилляра от времени $V_0(t) = v_0(0,5z_1, t)$ для обоих режимов показана на рис. 4 (штриховые линии). Заметим, что в стационарной схеме Старлинга эта функция всегда равна нулю.

Положение точки, разделяющей участки фильтрации и реабсорбции, определяется из условия равенства давлений внутри и вне капилляра $p_c(z_*) = p_0$. В стационарной схеме Старлинга значение z_* соответствует середине капилляра. В нестационарных режимах точка, в которой фильтрационное течение меняет направление, движется вдоль капилляра по периодическому закону. Траектории этого движения для режимов А и В показаны на рис. 5. Сплошные линии соответствуют незатухающим колебаниям $\Delta p_c = \text{const}$, т. е. колебаниям без учета демпфирующих свойств капиллярных стенок. Штриховые линии построены для случая затухающих колебаний, когда амплитуда пульсаций давления убывает по экспоненциальному закону $\Delta p_{c1}(z) = \Delta p_c \exp(-z/z_1)$ приблизительно на 30 % к вентульному концу [7]. Слева от разделяющей точки происходит фильтрация плазмы в интерстицию, справа — реабсорбция.

Из рис. 5 следует, что в режиме А траектории разделяющей точки не достигают концов капилляра и в каждый момент времени на одних участках происходит фильтрация, а на других — реабсорбция. В режиме В траектории охватывают весь капилляр, т. е. смена направления фильтрационного течения возможна в любой точке капилляра, а не только в его средней части.

На рис. 6 показано распределение скорости фильтрации вдоль капилляра в режиме А в моменты времени $t_0 = 1 \text{ с}$, $t_1 = 1,2 \text{ с}$, $t_3 = 1,6 \text{ с}$ и в режиме В в моменты $t_0 = 1 \text{ с}$,

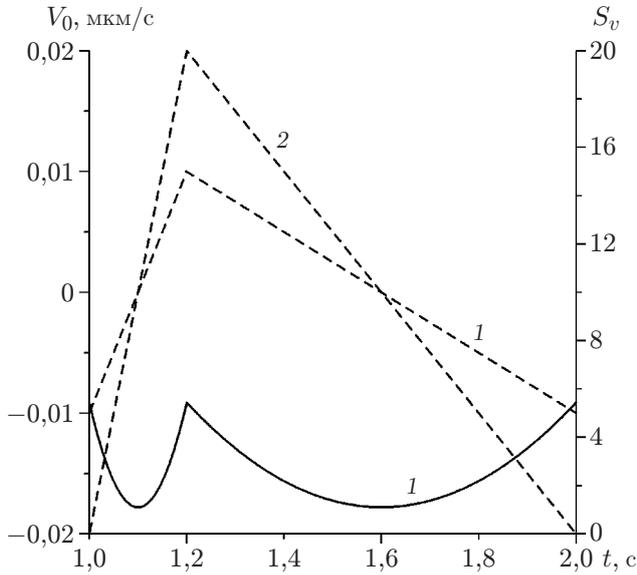


Рис. 4

Рис. 4. Зависимости скорости в центре капилляра (штриховые линии) и энергетического функционала (сплошная линия) от времени:

1 — режим А, 2 — режим В

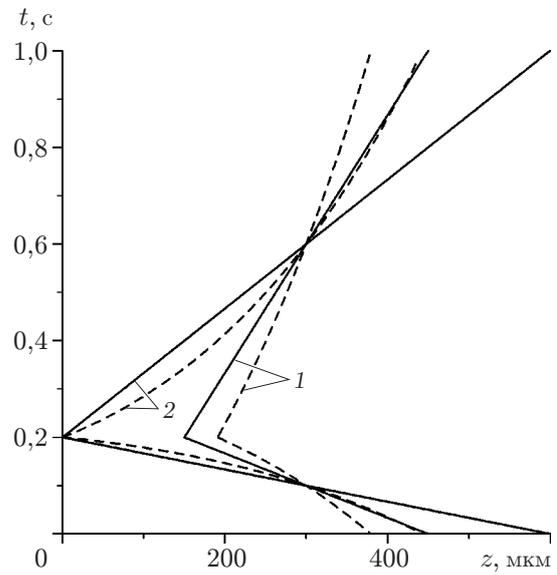


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость положения разделяющей точки от времени:

сплошные линии — незатухающие колебания; штриховые — затухающие колебания;

1 — режим А, 2 — режим В

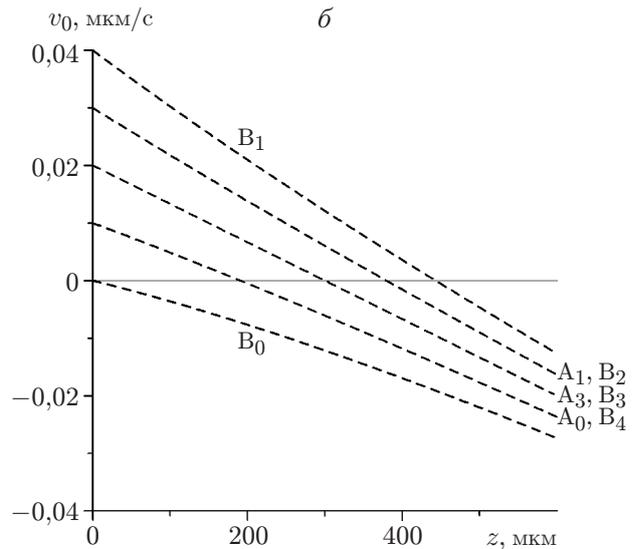
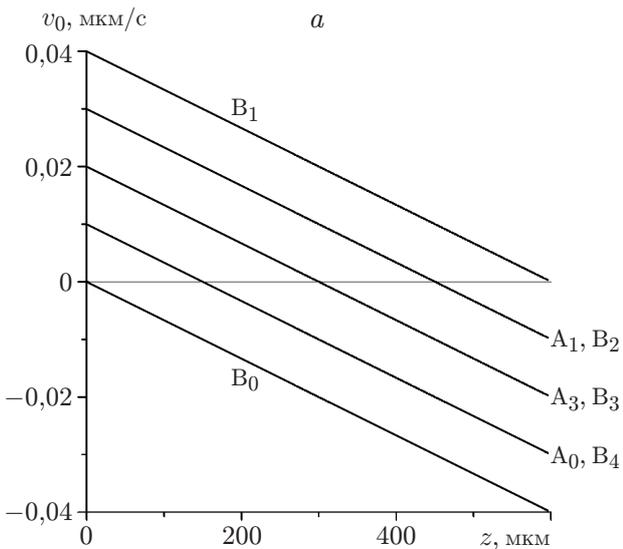


Рис. 6. Распределение скорости фильтрации вдоль капилляра в различные моменты времени:

а — незатухающие колебания, б — затухающие колебания; $A_i = A(t_i)$, $B_i = B(t_i)$, $t_0 = 1$ с, $t_1 = 1,2$ с, $t_2 = 1,4$ с, $t_3 = 1,6$ с, $t_4 = 1,8$ с

$t_1 = 1,2$ с, $t_2 = 1,4$ с, $t_3 = 1,6$ с, $t_4 = 1,8$ с. Отметим, что распределения A_1 и B_2 ($A_i = A(t_i)$, $B_i = B(t_i)$), а также A_0 и B_4 совпадают. Из рис. 6 следует, что в режиме А в капилляре всегда имеются как участки инфильтрации, так и участки реабсорбции, меняется лишь их протяженность (все прямые пересекают линию $v_0 = 0$). В режиме В максимальным значениям давления соответствуют процессы фильтрации либо реабсорбции на всей длине капилляра (прямые B_1, B_0). При средних значениях давления процессы фильтрации подобны (прямая B_2 совпадает с прямой A_1 , а прямая B_4 — с прямой A_0).

Поскольку отток в лимфатическую систему не учитывается, объемы плазмы, переносимой в процессах фильтрации и реабсорбции, совпадают, в том числе и в демпфирующем капилляре. Это легко установить путем интегрирования функции $v_0(z, t) = [\Delta p_0(0,5 - z/z_1) + \Delta p_c(z)\theta(t)]k_c$ по времени и пространству.

3.3. *Нестационарные течения в интерстициальном пространстве.* Картины линий тока и распределения радиальной скорости по пространству для максимальных и минимальных значений давления приведены на рис. 7, 8. При средних значениях давления

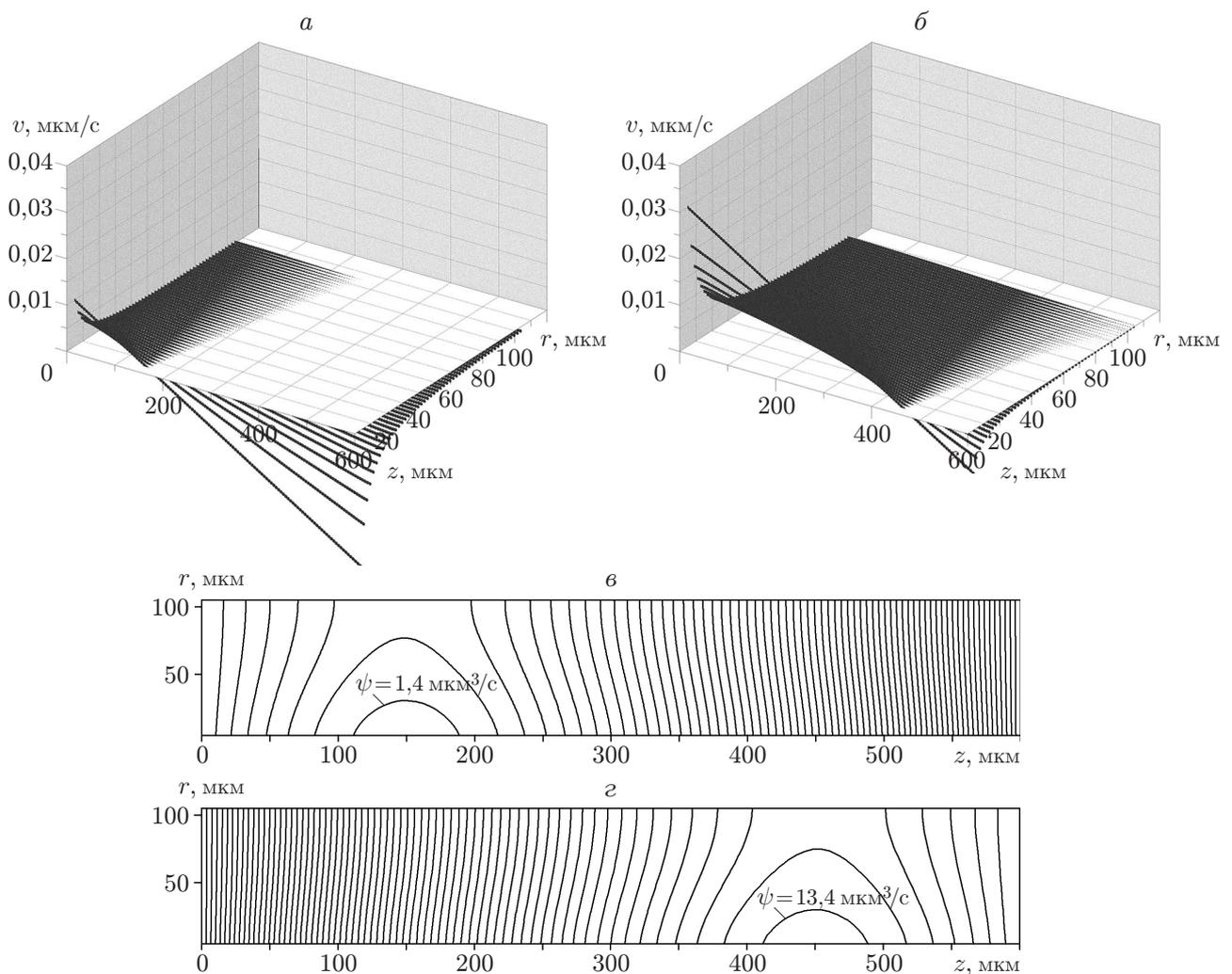


Рис. 7. Параметры течения в режиме А:

a, б — распределения радиальной скорости по пространству в моменты времени $t_0 = 1$ с, $t_1 = 1,2$ с соответственно; *в, г* — линии тока в моменты времени t_0, t_1 соответственно

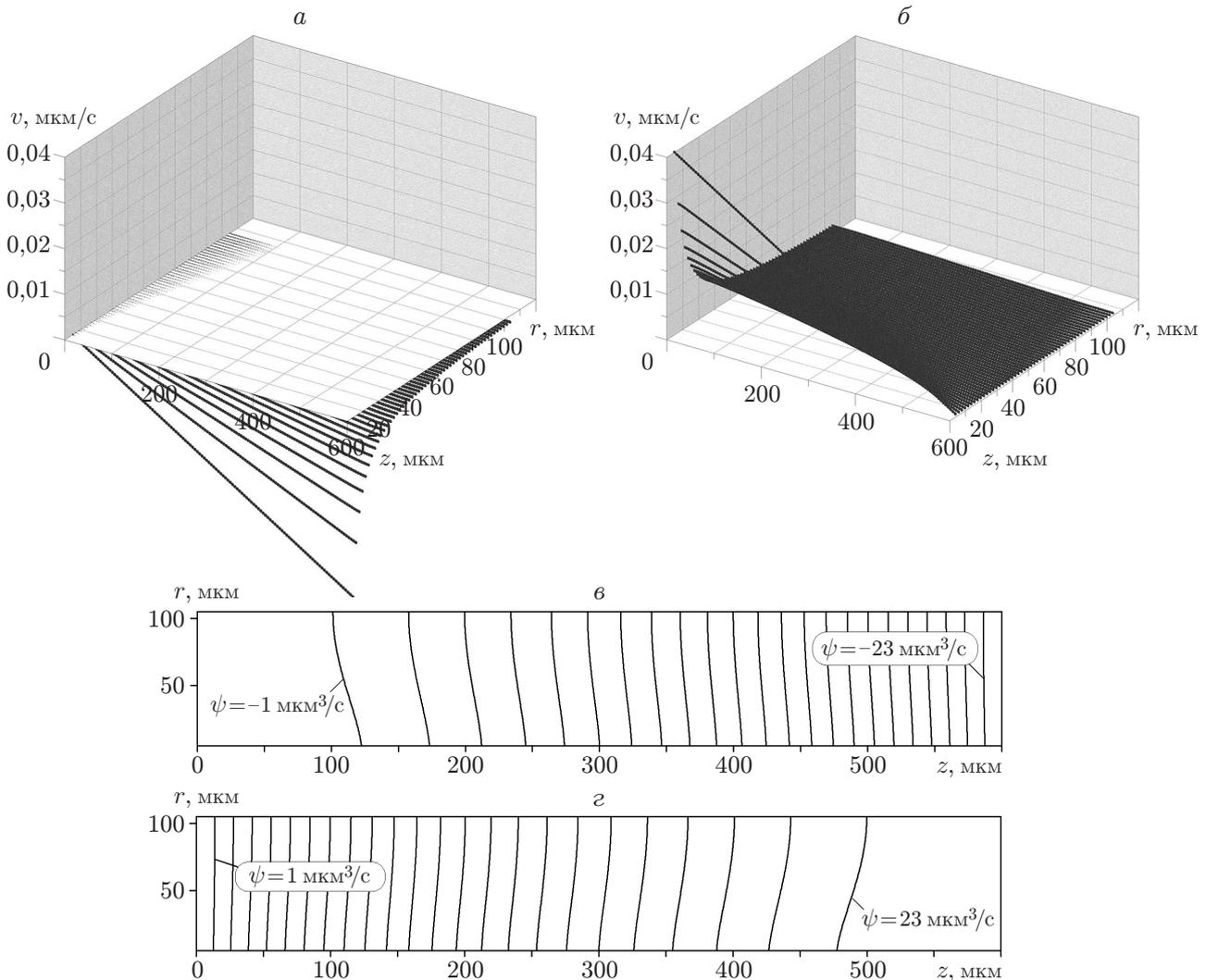


Рис. 8. Параметры течения в режиме В (обозначения те же, что на рис. 7)

($t_3 = 1,6$ с) картины течения имеют сходство с решением стационарной задачи (см. рис. 3). Сравнение рис. 7, а, б, 8, а, б с рис. 3, б показывает, что и в нестационарном режиме с увеличением радиуса скорости быстро убывают (зависимость порядка $1/r$). Это означает, что основные обменные процессы протекают в области размером порядка двух-трех диаметров капилляра. На рис. 5 сплошная линия соответствует величине численного функционала $S_v = \sum_{i,j} v_{ij}^2 \Delta r \Delta z$, представляющего собой интегральную кинетическую энергию радиального течения (в режиме А). Колебательный характер этой кривой свидетельствует о том, что наличие пульсовых колебаний давления обуславливает нестационарное течение и в интерстициальном пространстве.

Из анализа рис. 7, в, г, 8, в, г следует, что направление движения плазмы меняется со временем. В области, примыкающей к артериоле, течение направлено от капилляра в окружающее пространство. В примыкающей к венуле области течение направлено к стенке капилляра. В режиме А направление течения меняется лишь в окрестности средней части капилляра (см. рис. 7, в, г). В режиме В направление фильтрационного течения меняется во всей области вне капиллярной сети (см. рис. 8, в, г).

Также следует отметить, что в области, где направление фильтрационного течения меняется, помимо радиальной компоненты существенной величиной является продольная компонента скорости. Это отличает данную схему течения от представленной в [8] схемы, основанной на гипотезе о существовании во всей области лишь радиального течения.

Объем закачиваемой через стенки капилляра плазмы можно определить, интегрируя радиальную скорость $v_0(z, t)$ по z от нуля до разделяющей точки за период. Результаты расчетов показывают, что по сравнению с объемом фильтрующейся плазмы, рассчитанным по стационарной схеме течения, в нестационарном режиме объем фильтрующейся плазмы увеличивается: без учета демпфирования — на 8 и 33 % в режимах А и В соответственно, с учетом демпфирования стенок — на 3 и 13 %. Таким образом, наличие пульсовых колебаний давления в капиллярах обеспечивает интенсификацию фильтрационного течения, а следовательно, и обменных процессов.

4. Выводы. Для описания процессов микроциркуляции крови в капиллярной сети с учетом пульсаций давления, обусловленных сердечными сокращениями, предложена и верифицирована математическая модель динамики жидкости с учетом течения плазмы в интерстиции, заполняющей межкапиллярное пространство.

Изучены два режима пульсационных колебаний давления с различными значениями амплитуды пульсаций. Показано, что при учете нестационарных процессов картины течения существенно отличаются от схемы стационарной фильтрации Старлинга. В частности, пульсационное течение обеспечивает интенсификацию процесса трансакапиллярного обмена.

Для различных режимов пульсаций давления установлены следующие закономерности:

— при умеренных амплитудах пульсаций давления в капиллярной сети выделяется три характерных участка: на артериальном участке происходят процессы инфильтрации из просвета капилляров в интерстициальное пространство, на венозном — процессы реабсорбции из интерстициального пространства в просвет капилляра, в средней части сети эти процессы перемежаются;

— при амплитудах пульсаций давления, сравнимых с перепадом давления вдоль капилляра, процессы переноса веществ через стенки капилляра в интерстициальное пространство и обратно могут происходить в любой точке капиллярной сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Фолков Б.** Кровообращение / Б. Фолков, Э. Нил. М.: Медицина, 1976.
2. **Чернух А. М.** Микроциркуляция / А. М. Чернух, П. П. Александров, О. В. Алексеев. М.: Медицина, 1975.
3. **Козлов В. И.** Гистофизиология капилляров / В. И. Козлов, Е. П. Мельман, Е. М. Нейко, Б. В. Шутка. СПб.: Наука. С.-Петербург. отд-ние, 1994.
4. **Багаев С. Н., Захаров В. Н., Орлов В. А. и др.** Исследование физических механизмов микроциркуляции крови и трансакапиллярного обмена с использованием фазочувствительного лазерного метода // Рос. журн. биомеханики. 2006. Т. 10, № 3. С. 22–40.
5. **Фундаментальная и клиническая физиология** / Под ред. А. Г. Камкина, А. А. Каменского. М.: Издат. центр “Академия”, 2004.
6. **Багаев С. Н., Захаров В. Н., Орлов В. А. и др.** Регуляция трансакапиллярного обмена пульсовым давлением крови // Рос. журн. биомеханики. 2008. Т. 12, № 3. С. 7–14.
7. **Каро К.** Механика кровообращения / К. Каро, Т. Педли, Р. Шротер, У. Сид. М.: Мир, 1981.
8. **Шабрыкина Н. С.** Математическое моделирование микроциркулярных процессов // Рос. журн. биомеханики. 2005. Т. 9, № 3. С. 70–88.

9. **Идельчик И. Е.** Справочник по гидродинамическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1992.
10. **Жиляев М. И., Пупыкина Т. А.** Модификация схемы центральных разностей для расчета двумерных невязких течений в силовых полях // Числ. методы механики сплошной среды. 1983. Т. 14, № 3. С. 65–75.

*Поступила в редакцию 12/І 2010 г.,
в окончательном варианте — 11/ІІ 2010 г.*
