

УДК 532.546.06

## РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

В. Н. Эмих

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: emikh@hydro.nsc.ru

Представлен обзор исследований, выполненных на основе двумерных краевых задач теории фильтрации. Отмечается роль критических режимов, определяющих специфику фильтрационных течений с подвижными границами.

**Ключевые слова:** коэффициент фильтрации, критический режим, параметры конформных отображений, локальная депрессия, передислокация подвижных особых точек, линза (кайма) пресных вод.

DOI: 10.15372/PMTF20150511

**Введение.** Зарождение теории фильтрации связано с публикацией в 1856 г. работы А. Дарси [1], который в ходе лабораторных опытов по просачиванию воды через образцы грунта установил линейную зависимость скорости просачивания от перепада напора на торцах образцов, аналогичную известному в электродинамике закону Ома. В литературе эта зависимость называется законом Дарси. Содержащийся в ней коэффициент фильтрации характеризует пропускную способность грунтов. В течение нескольких последующих десятилетий исследователи уделяли основное внимание выявлению связи этого параметра со структурой грунта, сама же теория фильтрации оставалась чисто эмпирической. Процесс просачивания грунтовых вод сквозь поры при их индивидуальной, не поддающейся описанию конфигурации представлялся недоступным для математического моделирования.

Прорывом в указанном направлении стала работа Н. Е. Жуковского [2], в которой он предложил рассматривать грунт как сплошную среду и описывать процесс фильтрации на основе уравнений Эйлера течения идеальной жидкости, включив в них силы сопротивления потоку со стороны пористой среды в качестве объемных сил. Один из основоположников отечественной нефтяной гидравлики Л. С. Лейбензон оценил такой подход следующим образом: “Неразрешимая проблема интегрирования уравнения движения вязкой жидкости в отдельных поровых каналах гением Жуковского была приведена к решению сравнительно простого уравнения Лапласа при заданных граничных условиях” [3]. В той же работе Н. Е. Жуковский изложил решение нескольких задач фильтрации к скважинам и дренам, используя метод источников.

Выделению теории фильтрации в самостоятельный раздел гидродинамики способствовало опубликование в 1922 г. фундаментальной монографии Н. Н. Павловского [4], в которой движение грунтовых вод впервые изучалось на качественно новой основе — в рамках смешанных краевых задач теории аналитических функций с использованием

аппарата конформных отображений. Другой основополагающей работой для современной теории фильтрации стала работа Н. Е. Жуковского [5], написанная в 1920 г. и положившая начало исследованию течений грунтовых вод со свободной поверхностью. В [5] при рассмотрении фильтрации к щелевой дрене была введена аналитическая функция, которая называется функцией Жуковского, и предложена схематизация, называемая дреной Жуковского. К тому времени Н. Е. Жуковский ознакомился с разработками Н. Н. Павловского и изложил четыре его задачи, вошедшие затем в монографию [4]. Работы [4, 5] активизировали развитие подземной гидродинамики с применением классических методов математического анализа.

**1. Разработка теоретических основ фильтрации с дренажем.** В 30-х гг. XX столетия приобрела актуальность проблема проектирования горизонтального дренажа как средства регулирования режима грунтовых вод, что стимулировало исследования в этом направлении. Одним из таких исследований стала работа [6], содержащая ряд схем притока к щелевым и трубчатым дренам.

Особого внимания заслуживает монография В. В. Ведерникова [7], в которой с применением конформных отображений решен комплекс краевых задач о фильтрации из каналов и притоке к дренам. Наряду с этим автор представил обзор предшествующих исследований течений с дренажем. При этом он подверг критике содержащееся в работе [6] схематичное изображение потока с изломом кривой депрессии над дреной и с использованием годографа скорости фильтрации установил, что касательная к кривой депрессии над точечным стоком, моделирующим дрину, может быть либо горизонтальной, либо вертикальной. Во втором случае на кривой депрессии над дреной образуется точка заострения, ниже которой вплоть до стока давление в потоке оказывается меньшим атмосферного, и его дальнейшее сколь угодно малое понижение должно привести к прорыву в дрину воздуха. Таким образом, В. В. Ведерников впервые описал предельный, критический режим фильтрации к дренам и отметил, что предпосылкой его возникновения является вакуумирование потока. Это принципиально важное замечание осталось незамеченным, однако задачи фильтрации с дренажем, изложенные в [7], заинтересовали специалистов; некоторые из этих задач представлены в фундаментальной монографии П. Я. Полубариновой-Кочиной [8].

К вопросу о критическом режиме течений с дренажем не возвращался в дальнейшем и сам В. В. Ведерников. Отношение исследователей к указанному замечанию [7] как к незначительному объясняется тем, что действовавшие в тот период дренаы функционировали в режиме свободного истечения, при котором на них создавался подпор по отношению к фильтрационному потоку.

В конце 40-х гг. В. В. Ведерников рассмотрел задачу о притоке грунтовых вод к горизонтальным трубчатым дренам при равномерной инфильтрации на свободную поверхность и подпитывании потока из нижележащего напорного водоносного горизонта [9]. Представление решения этой многопараметрической краевой задачи содержало неизвестные параметры конформных отображений и имело сложный вид, что затрудняло его использование на практике. Схема течения, рассмотренного в [9], привлекла внимание одного из создателей отечественной гидромелиорации С. Ф. Аверьянова. Заменяв свободную поверхность горизонтальной фиксированной границей, он получил упрощенные зависимости для основных характеристик течения и провел по ним вычисления [10]. Такой же приближенный подход С. Ф. Аверьянов применил при расчете дренажа в почвенном слое с горизонтальным непроницаемым основанием [11].

В середине XX в. в мелиорации начал использоваться вакуумный дренаж [12], а для водоснабжения сооружались горизонтальные водозаборы, на которых также осуществлялось вакуумирование потока. При определении режима эксплуатации таких систем главной задачей становится выявление их предельно допустимого дебита на основе обнаруженного

В. В. Ведерниковым критического режима течения к дренам. Однако в немногочисленных публикациях, посвященных решению краевых задач дренажа, такой анализ отсутствует; более того, авторы отдельных работ зачастую выполняли трудоемкие математические исследования фильтрационных течений в рамках критических режимов, не учитывая, что такие течения гидродинамически неустойчивы и поэтому нереализуемы физически. Примером такого математически грамотного, но физически бессодержательного исследования является работа [13].

Осуществляя углубленный анализ течений с дренажем, автор настоящей работы уделил основное внимание исследованию влияния интенсивности дренирования потока на форму и положение его свободной поверхности. Основные результаты этих исследований излагаются в п. 2.

**2. Локальная депрессия и ее связь с режимом дренирования.** При моделировании на электропроводной бумаге фильтрации к дренам в почвенном слое с непроницаемым основанием было обнаружено, что на фоне общего понижения свободной поверхности потока над дренами может формироваться дополнительная, локальная депрессия; при этом кривая депрессии имеет две точки перегиба, ограничивающие на кривой участок выпуклости. Фотография указанной модели приведена в работе [14]. Локальная депрессия была зафиксирована также при моделировании течений с дренажем в щелевом лотке.

Первоначально исследование особенностей поведения кривой депрессии аналитическими методами проводилось на основе решения соответствующей многопараметрической краевой задачи в терминах параметров конформных отображений [15]. В качестве основного фактора, способствующего возникновению и развитию локальной депрессии, была указана интенсификация дренажа, однако четкое выявление такой связи осложнялось вследствие наличия нижней и боковой непроницаемых границ области течения, играющих второстепенную роль в формировании локальной депрессии.

В полной мере указанная зависимость была выявлена в схеме притока к одиночной дрене в пласте, не ограниченном по глубине и протяженности в горизонтальном направлении, при поступлении в грунт воды с поверхности, затопленной всюду, за исключением полосы над дренаем [16]. При аналитическом исследовании установлено, что если ширина незатопленной полосы превышает глубину дренажного стока более чем в  $4\sqrt{2}$  раз, то локальная депрессия возникает при сколь угодно малом фильтрационном расходе; в противном случае на начальном этапе дренирования кривая депрессии вогнута, и только при некоторой величине расхода дрены появляется локальная депрессия, которая по мере интенсификации дренажа расширяется и углубляется. При этом по достижении дренажным расходом максимально допустимого значения возникает описанный В. В. Ведерниковым критический режим, который можно трактовать как крайнее проявление локальной депрессии [7]. Определенным ограничениям удовлетворяют и содержащиеся в основных зависимостях параметры отображений.

С учетом сказанного выше именно критический режим подлежит первоочередному расчету, при котором устанавливаются рамки реализации в краевой задаче той фильтрационной схемы, для исследования которой эта задача поставлена. За указанными рамками представление решения задачи остается в силе, но описывает иные течения, нередко лишь отдаленно напоминающие исходное; ряд таких схем приведен в [17]. Однако их значимость с гидродинамической точки зрения обесценивается тем, что режим течения во всех этих схемах также является критическим. Наполнить их физическим содержанием можно лишь в результате расширения исходной постановки краевой задачи.

Такой подход использован в работе [18] при моделировании перетока грунтовых вод через вертикальную непроницаемую завесу. Вода поступает в пласт неограниченной глубины справа от завесы с поверхности, затопленной также справа от некоторой точки до

бесконечности, под действием подпора снизу; слева от завесы течение происходит в режиме свободной фильтрации под действием силы тяжести. Фильтрационный поток частично, а в пределе полностью поглощается дренажным стоком, расположенным на поверхности завесы. На основе решения соответствующей краевой задачи, полученного с применением конформных отображений, выполнен в прямой постановке анализ происходящей при увеличении дренажного расхода трансформации течения, сопровождающейся передислокацией подвижных граничных особых точек и изменением их физического смысла.

Подобная трансформация характерна также для рассмотренного в работе [19] потока грунтовых вод из подпочвенного источника с частичным, а в пределе полным поглощением потока дренажным стоком, находящимся под источником. При анализе течения выделены две его стадии. На первой из них поток расширяется с увеличением глубины, а кривая депрессии имеет вертикальную асимптоту, абсцисса которой определяется долей потока, не поглощенного дренажем. На второй стадии, наступающей по достижении расходом стока некоторого значения, на кривой депрессии появляется точка максимума абсциссы, ниже которой при сужении потока кривая депрессии имеет точку перегиба с сохранением вертикальной асимптоты. При дренировании всего потока из источника в критическом режиме кривая депрессии приобретает эллипсовидную форму и горизонтальную ось симметрии.

Изложенную схему исследовал американский специалист в области подземной гидродинамики О. Д. Л. Стрэк. Он рассмотрел эту задачу в работе [20] на несколько иной математической основе — с использованием метода источников. При анализе течения О. Д. Л. Стрэк классифицировал его вторую стадию как гидродинамически неустойчивую и физически нереализуемую. Такая трактовка основана на ошибочном, чисто умозрительном представлении, согласно которому частицы жидкости, находящиеся на нижней границе потока, должны отделиться от него и уйти вниз под действием силы тяжести, что повлечет разрушение всего потока. Фактически же динамическое равновесие потока с покоящейся в грунте воздушной фазой сохраняется и на нижней границе потока за счет вакуумирования течения, уравнивающего силу тяжести.

В указанной выше работе [13] была предпринята попытка моделирования описанного течения на основе предположения об отрыве части потока от остального потока, дренируемого к тому же в критическом режиме. Работы, подобные работам [13, 20], убеждают в необходимости продуманной, соотнесенной с реальностью постановки краевых задач фильтрации и проведения анализа течений на строгой математической основе.

Автор настоящей работы провел также исследования фильтрационных течений в почвенном слое, подстилаемом напорным водоносным горизонтом с высокой проницаемостью, наличие которого существенно влияет на структуру течения в покровных отложениях. Такое строение грунтов характерно для многих районов орошаемого земледелия.

В работе [21] рассмотрена краевая задача о фильтрации в почвенном слое при взаимодействии четырех факторов: поступления воды в почву из равноудаленных поверхностных источников одинаковой ширины; оттока воды в равнодебитные трубчатые дрены, заложенные на одной и той же глубине посередине между источниками; равномерно распределенной по площади инфильтрации на свободную поверхность фильтрационного потока или испарения с нее; гидравлической взаимосвязи почвенного слоя с нижележащим сильно проницаемым водоносным горизонтом. Построение решения выполнено с применением конформных отображений. Выведена система уравнений для определения неизвестных параметров отображений, установлены условия ее однозначной разрешимости.

Особый интерес представляет анализ структуры течения с его разветвлением на потоки, имеющие различные направления. Классификация возможных вариантов такого разветвления выполнена в [17]. В работе [14] приведен пример численного расчета такого разветвленного течения.

Детально исследованы также некоторые предельные и частные случаи основной краевой задачи: течение при полном затоплении поверхности, фильтрация при отсутствии горизонтального дренажа и течение в дренируемом почвенном слое без поступления поверхностных вод. Последняя схема та же, что и в отмеченной выше задаче В. В. Ведерникова [9].

**3. Применение аналитической теории линейных дифференциальных уравнений.** Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений впервые была использована при решении задачи о фильтрации через земляную перемычку с вертикальными откосами. В одномерной гидравлической постановке эту задачу решил в 1863 г. Ж. Дюпюи [22]. В 1930-х гг. решение задачи о перемычке в двумерной постановке построили независимо Б. Б. Девисон в Советском Союзе [23] и Г. Гамель в Германии [24]. Полученные ими зависимости оказались чрезвычайно сложными для практического использования. При редактировании работы [25], в которую вошло решение Б. Б. Девисона, на эту особенность обратил внимание Н. Е. Кочин, предложивший П. Я. Кочиной применить при решении задачи о перемычке аналитическую теорию линейных дифференциальных уравнений. Такой подход, реализованный в работах [26–28], позволил получить более простое решение указанной задачи [8, 29, 30] и провести с его использованием расчеты, несмотря на ограниченность вычислительных ресурсов того времени. В упоминавшейся выше работе Л. С. Лейбензона [3] эти работы П. Я. Кочиной были названы блестящими. Свой вклад в развитие метода П. Я. Кочиной внесли Б. К. Ризенкампф [31] и другие ее последователи и ученики.

В работе [22] Ж. Дюпюи предложил для определения расхода через перемычку простую формулу, которая и в настоящее время используется в гидротехнике, обеспечивая высокую точность расчетов. Как и решение в целом, эта формула считалась приближенной, до тех пор пока в 1951 г. известный ученый в области подземной гидромеханики И. А. Чарный не доказал, что формула Дюпюи справедлива и в двумерной постановке [32]. Сам метод П. Я. Кочиной оказался эффективным при решении ряда задач фильтрации жидкостей различной плотности.

**4. Задачи фильтрации пресных грунтовых вод над солеными.** На рубеже XIX–XX вв. в гидрогеологической литературе появились описания линзообразных скоплений пресных подземных вод над солеными грунтовыми водами под дюнами морских побережий. Такие линзы уже в то время использовались для водоснабжения нескольких крупных городов в Нидерландах, где запасы прибрежных линзовых вод особенно значительны.

На протяжении последующих десятилетий математическое моделирование линз пресных вод осуществлялось исключительно на базе гидравлических схем. Получаемые при этом относительно простые и доступные для расчетов аналитические зависимости позволяли определить с достаточной точностью эксплуатационные запасы пресных вод, содержащихся в линзах. Однако гидравлические схемы приводят к значительным погрешностям при расчете притока пресных вод над солеными к горизонтальным водозаборам, в окрестности которых фильтрационный поток является существенно двумерным.

Ключевой для исследования таких течений в рамках двумерных краевых задач стала работа П. Я. Кочиной [33], в которой при допущениях неподвижности соленых вод и непрерывности давления при переходе через границу раздела между пресными и солеными водами установлена линейная связь между ординатой точек этой границы и потенциалом скорости фильтрации, аналогичная зависимости на кривой депрессии, введенной ранее Н. Е. Жуковским [2]. С использованием подхода, предложенного в работе [33], решена задача о фильтрации в линзе пресных вод, образующейся над соленой водой за счет инфильтрации, компенсируемой оттоком в щелевые дрены [34]. При построении решения

задачи П. Я. Кочина использовала свой метод, упоминавшийся в п. 3. С помощью этого метода в дальнейшем был решен комплекс задач фильтрации в линзе и кайме пресных вод.

Первой такой задачей стала предложенная П. Я. Кочиной задача о сформировавшейся в результате фильтрации из канала линзе пресных вод при наличии испарения с ее свободной поверхности. Задача решалась автором настоящей работы и Ю. И. Капрановым при различных законах испарения; результаты выполненных исследований изложены в монографии [35]. Эти исследования были развиты в работах [36, 37], в которых создана математическая модель фильтрации из каналов с испарением в кайме пресных вод над солеными грунтовыми водами.

В 70-х гг. XX в. Ю. И. Капранов построил решение двух многопараметрических краевых задач фильтрации в кайме пресных вод, образованной равномерной инфильтрацией на свободную поверхность, с оттоком этих вод в горизонтальные щелевые или трубчатые дренажи [38, 39]. Была выведена и частично проанализирована система уравнений относительно неизвестных параметров отображений, проведены некоторые численные расчеты. Однако в обеих задачах исследование течения осталось в то время незавершенным.

Другие модели фильтрации в кайме пресных вод связаны с работой [15], в которой при решении краевой задачи о дренаже почвенного слоя с горизонтальным непроницаемым основанием был использован двулиственный годограф скорости фильтрации. Позднее построенное таким путем решение было обобщено на задачу о фильтрации в кайме [40]; одним из предельных случаев этой задачи при бесконечно большой плотности соленых вод является задача, изложенная в [15].

В работе [40] численные расчеты были проведены в обратной постановке при заданных неизвестных параметрах отображений. При анализе течения в прямой постановке основной проблемой являлось наличие в кайме двух подвижных границ, каждая из которых находилась под действием дренажа. Вопрос заключался в том, какая из этих границ дестабилизуется раньше при увеличении расхода дренажа, заложенной на определенной глубине, иными словами, что прорвется в дренаж в первую очередь: воздух или соленая вода? Получить ответ на этот вопрос стало возможным в результате обнаружения двойного критического режима [41], состоящего в том, что при некоторой устанавливаемой путем численных расчетов глубине дренажного стока по достижении им определенной и также вычисляемой максимально возможной величины расхода критические режимы течения возникают одновременно на обеих подвижных границах. Именно этот предельный режим необходимо рассчитать в первую очередь. Затем в зависимости от того, находится ли дренаж выше или ниже ее положения при двойном критическом режиме, интервал допустимых значений ее расхода устанавливается в рамках простого критического режима, связанного соответственно с кривой депрессии или с линией раздела. Дальнейшие расчеты фильтрационных характеристик течения можно проводить в нормальном режиме дренирования при любом допустимом значении расхода.

На основе описанного подхода с использованием современных компьютеров были завершены начатые Ю. И. Капрановым исследования обеих указанных выше задач; результаты этих исследований изложены в работах [42, 43]. Вычислительные операции, выполняемые при моделировании фильтрационных течений, описаны в [14, 44].

### **5. Задачи фильтрации к горизонтальным нефтедобывающим скважинам.**

В работах [45–47] решены краевые задачи о притоке нефти к горизонтальным скважинам при наличии газа или жидкостей с иными физическими свойствами, залегающих под кровлей или на подошве нефтесодержащих пластов. При эксплуатации таких пластов основным требованием является соблюдение технологии нефтедобычи, исключающей попадание в скважину иных жидкостей. Поэтому большое значение приобретает расчет критических

режимов откачки. Проблема состоит в том, что объемы приграничных жидкостей, являясь физическими параметрами, определяющими течение, недоступны для измерения. Однако их можно вычислить, если в конкретном случае зафиксировать техническими средствами параметры критического режима с учетом их связи с искомыми объемами. Один из предлагаемых вариантов реализации такого подхода при наличии двух инородных жидкостей описан в работе [46].

Работа [47] посвящена исследованию притока нефти к щелевым скважинам, моделирующим полости, которые образуются в результате гидроразрыва пластов. При использовании такой технологии возникают два противоположных воздействия на объем нефтедобычи. Увеличение площади контакта щелевых скважин с пластом по сравнению с трубчатыйми способствует повышению продуктивности щелевых скважин, но при этом усиливается влияние скважин на покоящиеся инородные жидкости, вследствие чего возрастает вероятность их попадания в скважину. Сравнительный анализ эффективности трубчатых и щелевых скважин выполнен в работе [47] на основе результатов расчетов характеристик течений в двойном критическом режиме, при котором дебиты скважин максимальны.

**Заключение.** На этапе становления современной теории фильтрации как самостоятельного раздела гидродинамики основное внимание уделялось использованию методов комплексного анализа для построения решений краевых задач о движении грунтовых вод. Относительная простота получаемых при этом аналитических зависимостей позволяла проводить по ним численные расчеты, несмотря на ограниченность имевшихся в то время вычислительных ресурсов.

В дальнейшем при переходе к многопараметрическим задачам возникла проблема определения неизвестных параметров конформных отображений. Использование современных быстродействующих компьютеров в сочетании с проведением традиционного теоретического анализа позволило развить методы решения краевых задач фильтрации жидкостей различной плотности. Результаты этих исследований используются при решении практических задач гидромелиорации, водоснабжения, нефтедобычи.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Darcy H.** Les fontaines publiques de la ville de Dijon. P.: Dalmont, 1856.
2. **Жуковский Н. Е.** Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод // Собр. соч.: В 7 т. М.: Гостехтеоретиздат, 1949. Т. 3. С. 184–206.
3. **Лейбензон Л. С.** Подземная гидродинамика // Собр. тр.: В 4 т. М.: Изд-во АН СССР, 1953. Т. 2. С. 532–538.
4. **Павловский Н. Н.** Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения // Собр. соч.: В 2 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 3–352.
5. **Жуковский Н. Е.** Просачивание воды через плотины // Собр. соч.: В 7 т. М.: Гостехтеоретиздат, 1950. Т. 7. С. 297–332.
6. **Аравин В. И.** Приток грунтовых вод к водосборам // Изв. науч.-исслед. ин-та гидротехники. 1936. Т. 18. С. 4–43.
7. **Ведерников В. В.** Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.; Л.: Госстройиздат, 1939.
8. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
9. **Ведерников В. В.** К теории дренажа // Докл. АН СССР. 1939. Т. 59, № 6. С. 1069–1072.
10. **Аверьянов С. Ф.** О расчете осушительного действия горизонтального дренажа в условиях напорного питания // Науч. зап. Моск. ин-та инженеров водного хоз-ва. 1960. Т. 22. С. 3–73.

11. **Аверьянов С. Ф.** Рассоляющее действие фильтрации из каналов // Влияние орошения на режим грунтовых вод. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 44–120.
12. **Дегтярев Б. М.** Вакуумный дренаж на орошаемых землях / Б. М. Дегтярев, В. А. Калантаев. М.: Колос, 1978.
13. **Герентьев А. Г.** Краевые задачи для систем подпочвенных оросителей // Актуальные задачи гидродинамики. Чебоксары: Чебоксар. ун-т, 1989. С. 107–117.
14. **Эмих В. Н.** Структурный анализ фильтрационных течений с горизонтальным дренажем // Учен. зап. Казан. ун-та. 2011. Т. 153, кн. 4. С. 122–134.
15. **Эмих В. Н.** Решение задачи о плоской безнапорной установившейся фильтрации при дренажных промывках почв с непроницаемым основанием // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220, № 6. С. 1289–1292.
16. **Эмих В. Н.** О нескольких гидродинамических моделях дренажа // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, вып. 6. С. 1047–1056.
17. **Эмих В. Н.** Гидродинамика фильтрационных течений с дренажем. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1993.
18. **Эмих В. Н.** Дренаж в потоке грунтовых вод через завесу // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 106–114.
19. **Эмих В. Н.** Перехватывающий дренаж в потоке из подпочвенного источника // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1999. № 3. С. 77–84.
20. **Strack O. D. L.** Groundwater mechanics. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.
21. **Эмих В. Н.** Анализ двумерной установившейся фильтрации в почвенном слое с сильнопроницаемым основанием // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 5. С. 857–868.
22. **Dupuit J.** Etudes theoretiques et pratiques sur le mouvement des eaux. Ed. 2. P.: Dunod, 1863.
23. **Девисон Б. Б.** Об установившемся движении грунтовых вод через земляные плотины // Учен. зап. Гос. гидрол. ин-та. 1932. Т. 6. С. 11–19.
24. **Hamel G.** Uber Grundwasserstromung // Z. angew. Math. Mech. 1934. Bd 14, h. 3. S. 129–157.
25. **Христианович С. А.** Некоторые новые вопросы механики сплошной среды / С. А. Христианович, С. Г. Михлин, Б. Б. Девисон. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1938.
26. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым случаям движения грунтовых вод // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1938. № 3. С. 371–398.
27. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым задачам о движении грунтовых вод (случай трех особых точек) // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1939. № 3. С. 329–350.
28. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым задачам о движении грунтовых вод (число особых точек больше трех) // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1939. № 5/6. С. 579–602.
29. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Расчет фильтрации через земляную перемычку // Прикл. математика и механика. 1940. Т. 4, вып. 1. С. 53–64.
30. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1942.
31. **Ризенкамф Б. К.** Гидравлика грунтовых вод. Ч. 3 // Учен. зап. Саратов. ун-та. 1940. Т. 15, вып. 5. С. 3–93.
32. **Чарный И. А.** Строгое доказательство формулы Дюпюи для безнапорной фильтрации с промежутком высачивания // Докл. АН СССР. 1951. Т. 79, № 6. С. 937–940.
33. **Полубаринова-Кочина П. Я.** О неустановившемся движении грунтовых вод в двух слоях различной плотности // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1940. № 6. С. 73–80.



34. **Полубаринова-Кочина П. Я.** О линзе пресной воды над соленой водой // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 3. С. 418–420.
35. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Математические методы в вопросах орошения / П. Я. Полубаринова-Кочина, В. Г. Пряжинская, В. Н. Эмих. М.: Наука, 1969.
36. **Береславский Э. Н., Эмих В. Н.** Задача о фильтрации из системы каналов в кайме пресных вод над солеными с испарением // Прикл. математика и механика. 1983. Т. 47, вып. 3. С. 446–454.
37. **Береславский Э. Н., Эмих В. Н.** О критическом режиме фильтрации с испарением в кайме пресных вод над солеными // Прикл. математика и механика. 1988. Т. 52, вып. 5. С. 867–870.
38. **Капранов Ю. И.** Линза пресной воды, образованная равномерной инфильтрацией // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, вып. 6. С. 1048–1054.
39. **Капранов Ю. И.** О кайме пресных вод в случае периодической системы горизонтальных трубчатых дрен // Краевые задачи подземной гидродинамики. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. С. 67–84.
40. **Эмих В. Н.** Гидродинамическая модель дренажа в кайме пресных грунтовых вод над солеными // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252, № 4. С. 825–828.
41. **Эмих В. Н.** Краевая задача о дренируемой кайме пресных вод и ее приложения // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 3. С. 494–504.
42. **Капранов Ю. И., Эмих В. Н.** Краевая задача о дренаже в инфильтрационной кайме пресных грунтовых вод над солеными // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 5. С. 79–93.
43. **Эмих В. Н.** Линейный дренаж в инфильтрационной кайме пресных грунтовых вод над солеными // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 6. С. 64–77.
44. **Эмих В. Н.** Теоретический и численный анализ в краевых задачах фильтрации // Вычисл. технологии. 2014. Т. 19, № 6. С. 95–107.
45. **Капранов Ю. И., Эмих В. Н.** Приток нефти к горизонтальной скважине при наличии подошвенной воды // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 5. С. 114–126.
46. **Эмих В. Н.** Фильтрация нефти к скважине при наличии в пласте иных жидкостей // Докл. АН. 2010. Т. 435, № 2. С. 199–204.
47. **Эмих В. Н.** Приток нефти к щелевой скважине в пласте, содержащем иные жидкости // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 2. С. 204–210.

*Поступила в редакцию 20/IV 2015 г.*

---