

УДК 539.375

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧАСТИЧНОГО ЗАКРЫТИЯ ТРЕЩИНОВИДНОЙ ПОЛОСТИ СО СВЯЗЯМИ МЕЖДУ БЕРЕГАМИ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

В. М. Мирсалимов, Б. Э. Рустамов

Азербайджанский технический университет, AZ1129 Баку, Азербайджан

E-mail: mir-vagif@mail.ru

С использованием методов теории упругости построена математическая модель закрытия в изотропной среде трещиновидной полости с концевыми зонами, в которых действуют силы сцепления материала. Считается, что взаимодействие поверхностей трещиновидной полости под действием приложенных объемных и поверхностных нагрузок может приводить к возникновению зон контакта их поверхностей. Определение неизвестных параметров, характеризующих закрытие трещиновидной полости, сводится к решению системы сингулярных интегродифференциальных уравнений. Интегральные уравнения преобразуются в систему нелинейных алгебраических уравнений, которая решается методом последовательных приближений. Определены контактные напряжения, усилия в связях между берегами трещиновидной полости, значения размеров контактной зоны, в которой берега трещиновидной полости смыкаются.

Ключевые слова: изотропная среда, трещиновидная полость, концевые зоны полости, силы сцепления, объемные силы, контактные напряжения.

Постановка задачи. Для развития современной оборонной техники, в частности для создания установок на твердом топливе и ствольных артиллерийских систем, необходимо совершенствовать способы моделирования изделий и методы расчета, что позволит более полно учитывать механические свойства реальных материалов. При работе двигателей на твердом топливе может произойти выход на нерасчетный режим [1, 2], что вызовет взрыв. Наиболее вероятная причина этого явления заключается в наличии в топливе недопустимо больших трещиноподобных полостей, возникающих, как правило, в процессе его производства. Для повышения безопасности работы двигателя рассмотрим локальное разрушение среды, ослабленной трещиновидной полостью, поверхность которой находится под действием газа. Считается, что трещиновидная полость имеет концевые зоны со связями между берегами. Рассматриваются времена, малые по сравнению с характерным временем релаксации напряжений в среде и с характерным временем нагревания тела вследствие теплопроводности. С учетом этого предположения тело можно считать хрупким, а его температуру — постоянной. Исследуется квазистатический процесс деформирования среды.

При наличии вблизи трещины зон с нарушенной структурой в процесс разрушения вовлекается достаточно большая часть трещины. В этом случае область, в которой происходит разрушение, рассматривается как некоторый слой (концевая зона), примыкающий к трещине и содержащий материал с частично нарушенными связями. Используется

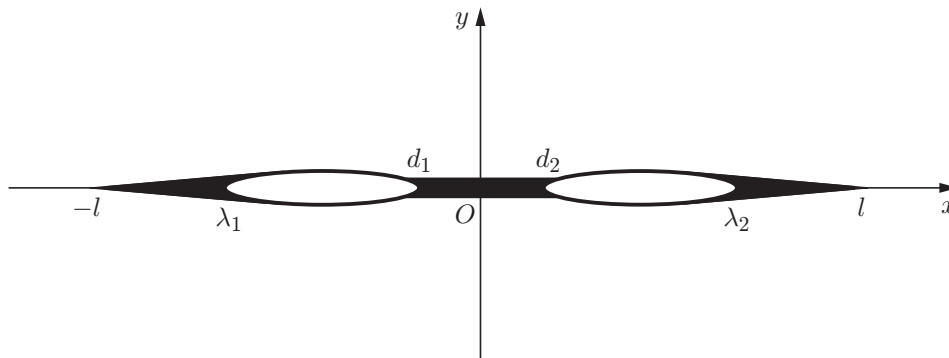


Рис. 1. Схема задачи о частичном закрытии берегов трещиновидной полости в изотропной среде

модель трещины со связями между берегами в концевой зоне, получившая экспериментальное подтверждение [3–6] для композиционных материалов с полимерным связующим, в случае когда адгезионная прочность меньше прочности полимеров. В последнее время опубликован ряд работ, посвященных исследованию тел с трещинами с учетом наличия сил сцепления между берегами и возможности их контакта [7–15].

Пусть в среде, занимающей плоскость xOy , имеется трещиновидная полость длиной $2l$ (рис. 1). Рассматривается модель трещины с силами сцепления (связями), непрерывно распределенными в узких концевых зонах полости и имеющими заданную диаграмму деформирования. Считается, что на частицы среды действуют объемные силы $F = X + iY$ ($X(x, y)$, $Y(x, y)$ — заданные функции). При $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$ компоненты вектора перемещений и тензора напряжений стремятся к нулю. В процессе нагружения тела при некотором соотношении физических и геометрических параметров среды и действующих нагрузок появляются зоны сжимающих напряжений, в которых берега трещиновидной полости могут войти в контакт, что приведет к появлению контактных напряжений на данном участке берегов трещиновидной полости. Предполагается, что зона, в которой берега трещиновидной полости вошли в контакт, находится в средней части полости, а ее размеры заранее неизвестны.

Выделим часть трещиновидной полости $d_2 - d_1$ — зону, в которой берега трещины вошли в контакт. Взаимодействие берегов трещины препятствует раскрытию трещиновидной полости. В процессе нагружения среды в зоне, где берега трещины вошли в контакт, возникают нормальные $p_y(x)$ и касательные $p_{xy}(x)$ напряжения, значения которых заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения. Напомним, что в рассматриваемом случае трещиновидная полость состоит из трех областей: 1) противоположные берега трещины, нагруженные давлением газа; 2) концевые зоны $(-l, \lambda_1)$ и (λ_2, l) со связями между берегами; 3) зона (d_1, d_2) , в которой берега трещины вошли в контакт.

Краевые условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -p(x), \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad \lambda_1 < x < d_1, \quad d_2 < x < \lambda_2, \\ \sigma_y &= q_y(x), \quad \tau_{xy} = q_{xy}(x) \quad \text{при } y = 0, \quad -l \leq x \leq \lambda_1, \quad \lambda_2 \leq x \leq l, \\ \sigma_y &= p_y(x), \quad \tau_{xy} = p_{xy}(x) \quad \text{при } y = 0, \quad d_1 \leq x \leq d_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где $p(x)$ — давление газа в полости; $q_y(x)$, $q_{xy}(x)$ — нормальные и касательные напряжения в связях между берегами трещины соответственно.

Основные соотношения поставленной задачи должны быть дополнены уравнениями, связывающими величину раскрытия берегов концевых зон полости и усилия в связях, а

также соотношениями для перемещений в контактной зоне трещины. Дополнительные уравнения для перемещений имеют вид

$$\begin{aligned} v^+(x, 0) - v^-(x, 0) - i(u^+(x, 0) - u^-(x, 0)) &= 0, & d_1 \leq x \leq d_2, \\ v^+(x, 0) - v^-(x, 0) - i(u^+(x, 0) - u^-(x, 0)) &= C(x, \sigma)[q_y(x) - iq_{xy}(x)], \\ \sigma &= \sqrt{q_y^2 + q_{xy}^2} & (-l \leq x \leq \lambda_1, \quad \lambda_2 \leq x \leq l), \end{aligned} \quad (2)$$

где $C(x, \sigma)$ — эффективная податливость связей, зависящая от их натяжения; σ — модуль вектора усилий в связях; $v^+ - v^-$, $u^+ - u^-$ — нормальная и касательная составляющие величины раскрытия берегов трещиновидной полости.

Метод решения краевой задачи. При наличии объемных сил решение задачи представим в виде сумм

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1,$$

где $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ — любое частное решение уравнений плоской теории упругости при наличии объемных сил; $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$ — решение уравнений плоской теории упругости при отсутствии объемных сил.

Используя комплексные представления Колосова — Мусхелишвили [16], для компонент тензора напряжений имеем уравнения

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} \left(\Phi(z) - \frac{1}{2(1 + \varkappa)} \frac{\partial Q}{\partial z} \right), \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2 \left(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) + \frac{1}{2(1 + \varkappa)} \frac{\partial}{\partial z} (\varkappa\bar{Q} - \bar{F}_1) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

($\varkappa = 3 - 4\nu$; ν — коэффициент Пуассона), в которые входят две аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$ и две функции $Q(z, \bar{z})$ и $F_1(z, \bar{z})$, представляющие собой любые частные решения уравнений

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial \bar{z}} = F(z, \bar{z}), \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} = \overline{F(z, \bar{z})}. \quad (4)$$

С помощью формул (3) граничные условия задачи (1) можно записать в виде краевой задачи для определения двух аналитических функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$:

$$\Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + x\overline{\Phi'(x)} + \overline{\Psi(x)} = f(x).$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} -p(x) + f_0(x), & \lambda_1 < x < d_1, \quad d_2 < x < \lambda_2, \\ q_y(x) - iq_{xy}(x) + f_0(x), & -l \leq x \leq \lambda_1, \quad \lambda_2 \leq x \leq l, \\ p_y(x) - ip_{xy}(x) + f_0(x), & d_1 \leq x \leq d_2, \end{cases} \\ y = 0: \quad f_0(x) &= \frac{1}{1 + \varkappa} \operatorname{Re} \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{1}{2(1 + \varkappa)} \left(\varkappa \frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Следуя [16], введем в рассмотрение функцию

$$\Omega(z) = \bar{\Phi}(z) + z\bar{\Phi}'(z) + \bar{\Psi}(z),$$

аналитическую во всей комплексной плоскости вне прямолинейной трещиновидной полости с концевыми зонами. Определение функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ сводится к решению задачи

линейного сопряжения [16]

$$\begin{aligned} [\Phi(x) + \Omega(x)]^+ + [\Phi(x) + \Omega(x)]^- &= 2f(x), \\ [\Phi(x) - \Omega(x)]^+ - [\Phi(x) - \Omega(x)]^- &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как напряжения в твердом теле ограничены, то решение краевой задачи (6) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Искомое решение задачи (6) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \Omega(z) &= \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{f(x) dx}{X(x)(x-z)}, \\ X(z) &= \sqrt{(z-l)(z+l)(z-d_1)(z-d_2)}. \end{aligned} \quad (7)$$

При $z \rightarrow \infty$ $X(z) = z^2 + O(1/z)$. Выражение под знаком интеграла представляет собой ветвь соответствующей функции, выделяемой приведенным условием на верхнем берегу полости.

Для определения λ_1, λ_2 имеем соотношения

$$\int_{-l}^l \frac{f(t) dt}{X^+(t)} = 0, \quad \int_{-l}^l \frac{tf(t) dt}{X^+(t)} = 0. \quad (8)$$

В соотношения (6), (7) входят неизвестные контактные напряжения $p_y(x), p_{xy}(x)$ и усилия в связях $q_y(x), q_{xy}(x)$. Построим интегральные уравнения для определения неизвестных функций $q_y(x), q_{xy}(x)$ и $p_y(x), p_{xy}(x)$. Условиями, определяющими перечисленные неизвестные функции, являются дополнительные соотношения (2). Используя соотношение [16]

$$2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u + iv) = \varkappa \Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + iv_0)$$

и граничные значения функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ на отрезке $y = 0, -l \leq x \leq l$, получаем

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{2\mu}{1 + \varkappa} \left(\frac{\partial}{\partial x} (u^+ - u^-) + i \frac{\partial}{\partial x} (v^+ - v^-) \right). \quad (9)$$

Здесь u_0, v_0 — упругие перемещения, вызванные действием объемных сил в сплошной бездефектной среде.

Используя формулы Сохоцкого — Племеля [16] и учитывая формулу (7), находим

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = -\frac{i}{\pi} X^+(x) \left(\int_{-l}^l \frac{f(t) dt}{X^+(t)(t-x)} \right). \quad (10)$$

С учетом соотношений (2), (9), (10) после ряда преобразований получаем систему нелинейных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $q_y(x), q_{xy}(x)$ и $p_y(x), p_{xy}(x)$:

$$\begin{aligned} -\frac{1 + \varkappa}{2\pi\mu} X^+(x) \int_{-l}^l \frac{f(t) dt}{X^+(t)(t-x)} &= \frac{d}{dx} [C(x, \sigma)(q_y(x) - iq_{xy}(x))] \\ &(-l \leq x \leq \lambda_1, \quad \lambda_2 \leq x \leq l); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\int_{-l}^l \frac{f(t) dt}{X^+(t)(t-x)} = 0 \quad (d_1 \leq x \leq d_2). \quad (12)$$

Решение интегрального уравнения (12) может быть получено путем решения соответствующей задачи Римана [16]. Интегральное уравнение (12) можно представить в виде

$$\int_{d_1}^{d_2} \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - t} = f_1(t), \quad (13)$$

где

$$g(t) = \frac{p_y - ip_{xy}}{X^+(t)}, \quad f_1(t) = \int_{-l}^l \frac{q_y - iq_{xy} + f_0 - p}{X^+(\tau)(\tau - t)} d\tau.$$

Введем кусочно-аналитическую функцию $F(z)$, заданную интегралом Коши, плотность которого является искомым решением интегрального уравнения

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d_1}^{d_2} \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - z}.$$

Аналитическая функция $F(z)$ представляет собой решение задачи линейного сопряжения граничных значений

$$F^+(t) + F^-(t) = \frac{f_1(t)}{\pi i}. \quad (14)$$

Решение краевой задачи (14) в классе всюду ограниченных функций имеет вид

$$F(z) = \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int_{d_1}^{d_2} \frac{f_1^*(\tau) d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau - z)},$$

где $X_1(z) = \sqrt{(z - d_1)(z - d_2)}$; $X_1^+(\tau) = \sqrt{(\tau - d_1)(d_2 - \tau)}$; $f_1^*(t) = f_1(t)/(\pi i)$. При этом должно выполняться следующее условие разрешимости краевой задачи:

$$\int_{d_1}^{d_2} \frac{f_1(\tau) d\tau}{X_1^+(\tau)} = 0, \quad \int_{d_1}^{d_2} \frac{\tau f_1(\tau) d\tau}{X_1^+(\tau)} = 0.$$

С использованием формул Сохоцкого — Племеля получаем решение интегрального уравнения (13)

$$g(t) = F^+(t) - F^-(t),$$

$$F^+(z) = X_1^+(t) \left(\frac{1}{2} \frac{f_1^*(t)}{X_1^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{d_1}^{d_2} \frac{f_1^*(\tau) d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau - t)} \right),$$

$$F^-(z) = X_1^-(t) \left(-\frac{1}{2} \frac{f_1^*(t)}{X_1^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{d_1}^{d_2} \frac{f_1^*(\tau) d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau - t)} \right).$$

Учитывая, что $X_1^-(t)/X_1^+(t) = -1$, имеем уравнение

$$\frac{p_y(t) - ip_{xy}(t)}{X^+(t)} = \frac{X_1^+(z)}{\pi i} \int_{d_1}^{d_2} \frac{f_1^*(\tau) d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau - t)},$$

из которого следует

$$p_y(t) - ip_{xy}(t) = X^+(t) \frac{X_1^+(t)}{\pi i} \int_{d_1}^{d_2} \frac{f_1^*(\tau) d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau - t)}. \quad (15)$$

Отделяя в (11) действительные и мнимые части, получаем систему двух нелинейных интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $q_y(x)$ и $q_{xy}(x)$:

$$-\frac{1}{\pi} X^+(x) \left(\int_{-l}^l \frac{(q_y(t) + p_y(t)) dt}{X^+(t)(t-x)} + \int_{-l}^l \frac{f_{0y}(t) dt}{X^+(t)(t-x)} \right) = \frac{2\mu}{1+\varkappa} \frac{d}{dx} [C(x, \sigma) q_y(x)]; \quad (16)$$

$$-\frac{1}{\pi} X^+(x) \left(\int_{-l}^l \frac{(q_{xy}(t) + p_{xy}(t)) dt}{X^+(t)(t-x)} + \int_{-l}^l \frac{f_{0x}(t) dt}{X^+(t)(t-x)} \right) = \frac{2\mu}{1+\varkappa} \frac{d}{dx} [C(x, \sigma) q_{xy}(x)]. \quad (17)$$

Здесь $f_{0y}(t) = \operatorname{Re} f_0(t) - p(t)$; $f_{0x}(t) = \operatorname{Im} f_0(t)$. Напомним, что

$$\int_{-l}^l \frac{q_y(t) dt}{X^+(t)(t-x)} = \int_{-l}^{\lambda_1} \frac{q_y(t) dt}{X^+(t)(t-x)} + \int_{\lambda_2}^l \frac{q_y(t) dt}{X^+(t)(t-x)},$$

$$\int_{-l}^l \frac{q_{xy}(t) dt}{X^+(t)(t-x)} = \int_{-l}^{\lambda_1} \frac{q_{xy}(t) dt}{X^+(t)(t-x)} + \int_{\lambda_2}^l \frac{q_{xy}(t) dt}{X^+(t)(t-x)},$$

$$\int_{-l}^l \frac{p_y(t) dt}{X^+(t)(t-x)} = \int_{d_1}^{d_2} \frac{p_y(t) dt}{X^+(t)(t-x)}, \quad \int_{-l}^l \frac{p_{xy}(t) dt}{X^+(t)(t-x)} = \int_{d_1}^{d_2} \frac{p_{xy}(t) dt}{X^+(t)(t-x)}.$$

Методика численного решения и анализ результатов. Как и следовало ожидать, поставленная задача распалась на две независимые задачи: для трещины нормального отрыва (см. (16)) и для трещины поперечного сдвига (см. (17)). Каждое из уравнений (16), (17) представляет собой нелинейное интегродифференциальное уравнение с ядром типа ядра Коши и может быть решено только численно. Для решения (16), (17) можно использовать коллокационную схему с аппроксимацией неизвестных функций.

Далее в (16), (17), (8) все интервалы интегрирования приводятся к одному интервалу $[-1, 1]$, а интегралы заменяются конечными суммами с помощью квадратурных формул типа формулы Гаусса. Производные в правых частях уравнений (16), (17) заменяются конечно-разностными аппроксимациями. При этом учитываются граничные условия $q_y(-l) = q_y(l) = 0$, $q_{xy}(-l) = q_{xy}(l) = 0$, что соответствует условиям $v^+(l, 0) - v^-(l, 0) = 0$, $v^+(-l, 0) - v^-(-l, 0) = 0$, $u^+(l, 0) - u^-(l, 0) = 0$, $u^+(-l, 0) - u^-(-l, 0) = 0$. В результате алгебраизации вместо каждого интегрального уравнения в (16), (17) с соответствующими дополнительными условиями получаем $M_1 + 2$ алгебраических уравнения для определения

напряжений в узловых точках, расположенных в зонах $(-l, \lambda_1)$ и (λ_2, l) трещиновидной полости, и неизвестных параметров λ_1, λ_2 :

$$\sum_{k=1}^M A_{mk}(q_{y,k} + p_{y,k} + f_{0y,k}) = \frac{1 + \varkappa}{8\mu} \frac{M}{l} [C(x_{m+1}, \sigma(x_{m+1}))q_{y,m+1} - C(x_{m-1}, \sigma(x_{m-1}))q_{y,m-1}] \quad (m = 1, 2, \dots, M_1); \quad (18)$$

$$\sum_{k=1}^M f_y(\tau_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^M \tau_k f_y(\tau_k) = 0; \quad (19)$$

$$\sum_{k=1}^M A_{mk}(q_{xy,k} + p_{xy,k} + f_{0x,k}) = \frac{(1 + \varkappa)M}{8\mu l} [C(x_{m+1}, \sigma(x_{m+1}))q_{xy,m+1} - C(x_{m-1}, \sigma(x_{m-1}))q_{xy,m-1}] \quad (m = 1, 2, \dots, M_1), \quad (20)$$

$$\sum_{k=1}^M f_{xy}(\tau_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^M \tau_k f_{xy}(\tau_k) = 0.$$

Здесь

$$q_{y,k} = q_y(\tau_k), \quad q_{xy,k} = q_{xy}(\tau_k), \quad p_{y,k} = p_y(\tau_k), \quad p_{xy,k} = p_{xy}(\tau_k), \quad \tau_k = \cos \theta_k,$$

$$f_y(x) = \operatorname{Re} f(x), \quad f_{xy}(x) = \operatorname{Im} f(x),$$

$$A_{mk} = -\frac{1}{M} \frac{f_*(\tau_m)}{f_*(\tau_\nu)} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m \mp \theta_k}{2}, \quad \theta_m = \frac{2m-1}{2M} \pi \quad (m = \overline{1, M}),$$

$$f_{0y,k} = f_{0y}(\tau_k), \quad f_{0x,k} = f_{0x}(\tau_k), \quad f_*(\tau_m) = \sqrt{(l\tau_m - d_1)(l\tau_m - d_2)},$$

$$x_{m+1} = l\eta_{m+1}, \quad \eta_m = \cos \theta_m,$$

в формуле для A_{mk} верхний знак выбирается в случае, когда число $|m - k|$ нечетное, а нижний — когда оно четное; M_1 — число узловых точек, принадлежащих отрезкам $(-l, \lambda_1)$ и (λ_2, l) ; отрезок интегрирования включает M узловых точек.

Совместное решение уравнений (15), (18)–(20) позволяет при заданных характеристиках связей определить усилия в связях $q_y(x)$, $q_{xy}(x)$, контактные напряжения $p_y(x)$, $p_{xy}(x)$, размеры концевых зон. Для упрощения вычислений функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ разлагались в ряды Тейлора в окрестности начала координат и это разложение ограничивалось несколькими первыми членами. В результате интегрирования уравнений (4) имеем

$$Q(z, \bar{z}) = \int_z^z dz \int_{\bar{z}}^{\bar{z}} F(z, \bar{z}) d\bar{z}, \quad F_1(z, \bar{z}) = \int_z^z dz \int_{\bar{z}}^{\bar{z}} \overline{F(z, \bar{z})} dz.$$

С использованием функций $Q(z, \bar{z})$ и $F_1(z, \bar{z})$ согласно (5) находим функцию $f_0(x)$. Полученные системы уравнений даже в частном случае линейно-упругих связей оказываются нелинейными, поскольку размеры концевых зон трещиновидной полости не известны. Таким образом, для решения полученных систем в случае линейных связей использовался метод последовательных приближений [17], суть которого состоит в следующем. Решается система (18) при некоторых значениях λ_1^* и λ_2^* относительно $M_1 + M_2$ неизвестных $q_{y,1}, q_{y,2}, \dots, q_{y,M_1}, p_{y,M_1+1}, \dots, p_{y,M_2}$. Значения λ_1^* , λ_2^* и найденные значения $q_{y,1}, q_{y,2}, \dots, q_{y,M_1}, p_{y,M_1+1}, \dots, p_{y,M_2}$ подставляются в неиспользованные уравнения (19) системы. Выбранные значения параметров λ_1^* , λ_2^* и соответствующие значения

$q_{y,1}, q_{y,2}, \dots, q_{y,M_1}, p_{y,M_1+1}, \dots, p_{y,M_2}$, вообще говоря, не удовлетворяют уравнениям (19) системы. Поэтому, подбирая значения параметров λ_1^* и λ_2^* , необходимо многократно повторять вычисления, до тех пор пока дополнительные уравнения (19) системы не будут справедливы с заданной точностью. Аналогично вычисляются значения $q_{xy,1}, q_{xy,2}, \dots, q_{xy,M_1}, p_{xy,M_1+1}, \dots, p_{xy,M_2}$.

В случае если закон деформирования связей является нелинейным, для определения усилий q_y, q_{xy} в связях используется алгоритм, подобный методу упругих решений [18]. Считается, что закон деформирования межчастичных связей является линейным при $V = |(u^+ - u^-) - i(v^+ - v^-)| \leq V_*$. Первый шаг итерационного процесса вычислений состоит в решении систем уравнений (18)–(20) для линейно-упругих межчастичных связей. Последующие итерации выполняются только в случае, когда на участках зон $(-l, \lambda_1)$ и (λ_2, l) имеет место соотношение $V > V_*$. При таких итерациях решается система разрешающих уравнений в каждом приближении для квазиупругих связей с эффективной податливостью вдоль зон $(-l, \lambda_1)$ и (λ_2, l) , зависящей от величины модуля вектора усилий в связях, полученного на предыдущем шаге расчета. Расчет эффективной податливости проводится подобно расчету секущего модуля в методе переменных параметров упругости [19]. Процесс последовательных приближений заканчивается в тот момент, когда усилия вдоль зон $(-l, \lambda_1)$ и (λ_2, l) , полученные на двух последовательных итерациях, будут различаться на величину, меньшую 10^{-4} . Проведен параметрический анализ зависимости контактных напряжений $p_y(x)$ и $p_{xy}(x)$ от размера трещиновидной полости и физико-механических параметров связей.

При вычислении контактных напряжений, усилий в связях и размеров концевых и контактной зон полагалось, что на стенки полости действует постоянное давление.

Результаты расчета абсолютных величин контактных напряжений p_y/F_0 при различных значениях относительного размера концевой области $(l - \lambda_1)/l$ трещиновидной полости вдоль контактной зоны представлены на рис. 2 (F_0 — объемные силы, приходящиеся на единицу площади, МПа). В расчетах использована безразмерная координата x' , связанная

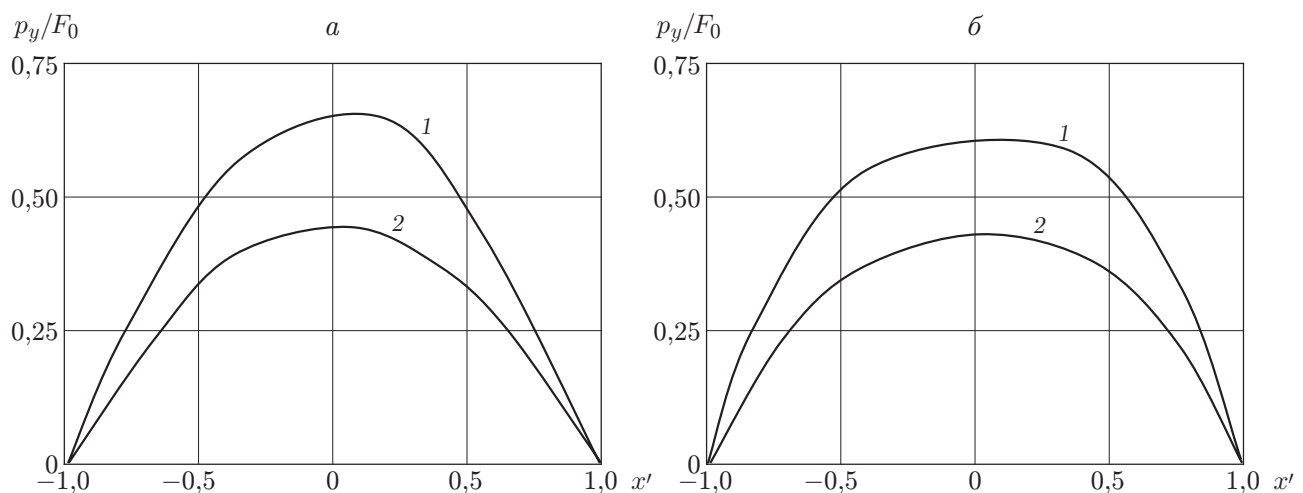


Рис. 2. Распределения абсолютных величин нормальных контактных напряжений p_y/F_0 вдоль контактной зоны трещиновидной полости при различных значениях относительного размера концевой области $(l - \lambda_1)/l$:

a — $(l - \lambda_1)/l = 0,25$, $\lambda_2/l = 0,713$, *б* — $(l - \lambda_1)/l = 0,50$, $\lambda_2/l = 0,482$; 1 — линейный закон деформирования связей, 2 — билинейный (нелинейный) закон деформирования связей

с x следующим соотношением:

$$x = \frac{d_1 + d_2}{2} + \frac{d_2 - d_1}{2} x'.$$

Наибольшие значения контактных напряжений достигаются в средней части контактной зоны, где берега трещиновидной полости смыкаются. С увеличением размера концевой зоны сил сцепления материала напряжения $q_y(x)$ и $q_{xy}(x)$ в связях, а следовательно, и контактные напряжения уменьшаются. Характер изменения касательных контактных напряжений $p_{xy}(x)$ вдоль контактной зоны подобен изменению нормальных контактных напряжений $p_y(x)$, но абсолютные значения касательных напряжений существенно меньше.

При формулировке критерия предельного равновесия использовался критерий критического раскрытия трещины. Раскрытие трещиновидной полости в пределах зон действия сил сцепления можно определить соотношениями

$$u^+(x, 0) - u^-(x, 0) = C(x, \sigma)q_y(x), \quad v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = C(x, \sigma)q_{xy}(x) \\ (-l \leq x \leq \lambda_1, \quad \lambda_2 \leq x \leq l).$$

Условие предельного раскрытия трещиновидной полости на краях зон действия сил сцепления имеет вид

$$x = \lambda_1: C(\lambda_1, \sigma(\lambda_1))\sigma(\lambda_1) = \delta_{cr}, \quad x = \lambda_2: C(\lambda_2, \sigma(\lambda_2))\sigma(\lambda_2) = \delta_{cr},$$

где δ_{cr} — характеристика трещиностойкости материала тела, определяемая экспериментально.

Таким образом, анализ модели частичного закрытия трещиновидной полости со связями между берегами в концевых зонах изотропной среды при наличии объемных сил сводится к параметрическому исследованию системы сингулярных интегральных уравнений при различных геометрических и физических параметрах среды, законах деформирования связей и размерах областей действия сил сцепления. Непосредственно из решения полученных систем определяются контактные напряжения $p_y(x)$, $p_{xy}(x)$, усилия в связях $q_y(x)$, $q_{xy}(x)$, а также размеры контактной зоны. Полученные соотношения позволяют найти решение обратной задачи, т. е. определить параметры объемных сил и напряженное состояние изотропной среды, при которых имеет место заданная область контакта берегов трещиновидной полости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соркин Р. Е.** Газотермодинамика ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, 1967.
2. **Смирнов Н. Н.** Конвективное горение в каналах и трещинах на твердом топливе // Физика горения и взрыва. 1985. Т. 21, № 3. С. 29–36.
3. **Cornec A., Yuan H., Lin G.** Cohesive zone model for ductile fracture // GKSS Rep. 1994. N E73. P. 269–274.
4. **Cox B. N., Marshall D. B.** Concepts for bridged cracks fracture and fatigue // Acta Metall. Material. 1994. V. 42, N 2. P. 341–363.
5. **Needleman A.** An analysis of decohesion an imperfect interface // Intern. J. Fracture. 1990. V. 42, N 1. P. 21–40.
6. **Engineering** fracture mechanics. 2003. V. 70, N 14. Spec. issue. Cohesive models.
7. **Гасанов Ш. Г.** Когезионная трещина с частично контактирующими берегами в сечении дорожного покрытия // Механика машин, механизмов и материалов. 2012. № 2. С. 58–64.

8. **Мирсалимов В. М.** К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары // Прикл. математика и механика. 2007. Т. 71, вып. 1. С. 132–151.
9. **Мирсалимов В. М.** Моделирование закрытия трещины со связями между берегами во втулке контактной пары // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 2. С. 78–92.
10. **Мирсалимов В. М., Рустамов Б. Э.** Разрушение горящего твердого топлива, ослабленного трещиновидной полостью // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 1. С. 173–184.
11. **Mirsalimov M. V., Rustamov B. E.** Effect of damages on crack-visible of the cavity opening displacement in burning solid-fuel // Intern. J. Damage Mech. 2012. V. 21, N 3. P. 373–389.
12. **Mirsalimov M. V., Rustamov B. E.** Interaction of prefracture zones and crack-visible cavity in a burning solid with mixed boundary conditions // Acta Mech. 2012. V. 223, N 3. P. 627–643.
13. **Mirsalimov M. V., Zolgharnein E.** Cracks with interfacial bonds in the hub of a friction pair // Meccanica. 2012. V. 47, N 7. P. 1591–1600.
14. **Prechtel M., Leiva Ronda P., Janisch R., et al.** Simulation of fracture in heterogeneous elastic materials with cohesive zone models // Intern. J. Fracture. 2011. V. 168, iss. 1. P. 15–29.
15. **Kovtunenko V. A.** Nonconvex problem for crack with nonpenetration // Z. angew. Math. Mech. 2005. Bd 85, Fasz. 4. S. 242–251.
16. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
17. **Мирсалимов В. М.** Неодномерные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987.
18. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
19. **Биргер И. А.** Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 51–73.

*Поступила в редакцию 27/III 2012 г.,
в окончательном варианте — 25/IV 2013 г.*
