

УДК 669.86:536.21

ДЛИННОВОЛНОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ АДВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В НАКЛОННОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ С ИДЕАЛЬНО ТЕПЛОПРОВОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Р. В. Сагитов, А. Н. Шарифулин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990 Пермь
E-mail: sharifulin@pstu.ru

Исследована устойчивость к длинноволновым возмущениям стационарного конвективного течения в плоском наклонном слое с идеально теплопроводными твердыми границами при наличии однородного продольного градиента температуры. Определены границы области устойчивости по отношению к длинноволновым возмущениям, найдены критические числа Грасгофа для наиболее опасных среди них четных спиральных возмущений.

Ключевые слова: адвективное течение, наклонный слой жидкости, продольный градиент температуры, длинноволновая неустойчивость.

Введение. Интерес к исследованию течений в бесконечных слоях, обусловленных продольным градиентом температуры, связан с рядом геофизических и технологических приложений (горизонтальные адвективные течения в атмосфере и океане, конвекция в вертикальных и наклонных шахтных выработках и нефтяных скважинах и др.). Исследования такого рода начаты в работе [1]: сформулирована задача об устойчивости состояния равновесия бесконечного слоя жидкости между твердыми вертикальными идеально теплопроводящими пластинами, на которых поддерживается постоянный градиент температуры, направленный вниз. Данная задача обобщена на случай наклонного слоя и наличия, кроме продольного, также поперечного градиента температуры. Результаты исследования устойчивости этого состояния равновесия для различных вариантов граничных условий приведены в работе [2]. В [1] получены точные аналитические выражения для профилей скорости и температуры в том случае, когда ось наклона горизонтальна, а продольный и поперечный градиенты температуры перпендикулярны ей. В работах [2, 3] изучена устойчивость различных предельных случаев данной задачи (подогреваемый снизу плоский слой, вертикальный слой, подогреваемый сбоку при наличии или отсутствии продольного градиента, наклонный слой между изотермическими пластинами).

В случае когда слой горизонтален и отсутствует поперечный градиент температуры, получены простые выражения для профилей скорости и температуры плоскопараллельных течений при четырех различных вариантах граничных условий [4]. Результаты исследования устойчивости этих течений приведены в работе [3]. Подробный анализ устойчивости конвективного течения, в случае если обе стенки слоя твердые, выполнен в [5]. Обзор работ, посвященных новым постановкам задач (основное течение порождается продольным градиентом температуры), приведен в [6]. В [7, 8] получены новые точные решения и изучена их устойчивость в случае двухслойной жидкости.

Исследование устойчивости плоскопараллельного конвективного течения в наклонном слое начато в работе [9], в которой рассмотрена устойчивость течения в наклонном слое с продольным градиентом в случае теплоизолированных границ.

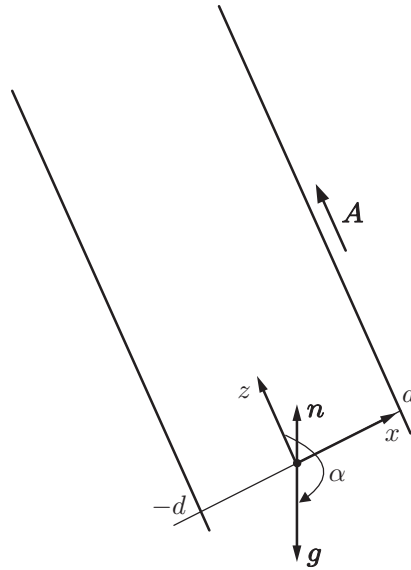


Рис. 1. Наклонный слой с условиями подогрева и осями координат

В настоящей работе приводятся результаты изучения устойчивости конвективного течения по отношению в длинноволновым возмущениям в наклонном плоском слое с продольным градиентом температуры в случае теплопроводных границ.

1. Постановка задачи. Рассмотрим наклонный плоский бесконечный слой жидкости толщиной $2d$ между идеально теплопроводными твердыми параллельными плоскостями, на которых задан постоянный градиент температуры \mathbf{A} (рис. 1). Введем декартову систему координат, жестко связанную с этим слоем, начало которой расположено в его центре, ось x направлена перпендикулярно стенкам, ось y горизонтальна, ось z совпадает с направлением \mathbf{A} . Слой наклонен таким образом, что вектор ускорения свободного падения \mathbf{g} лежит в плоскости (x, z) и образует с осью z угол α .

Границы полости, в которой находится жидкость, твердые, идеально теплопроводные, и на них поддерживается постоянный градиент температуры \mathbf{A} , вследствие чего температура линейно растет вдоль оси z :

$$T^{(0)} = z. \quad (1)$$

Для описания движения жидкости используем уравнения свободной тепловой конвекции в приближении Буссинеска, которые в безразмерных переменных принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla \left(p + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \text{Gr} \, z x \sin \alpha + \text{Gr} \cos \alpha \frac{z^2}{2} \right) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \\ + \text{Gr} \, \mathbf{n} T + \text{Gr} \, x \mathbf{e}_z \sin \alpha, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T + v_z = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В систему уравнений (2) входят следующие безразмерные параметры: число Грасгофа $\text{Gr} = A\beta g d^4 / \nu^2$, число Прандтля $\text{Pr} = \nu / \chi$, угол наклона слоя α . В дальнейшем используется также число Рэлея $\text{R} = \text{Gr} \, \text{Pr}$.

Граничные условия запишем в виде

$$x = \pm 1: \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = 0. \quad (3)$$

В (2), (3) \mathbf{v} — скорость; T — отклонение температуры жидкости от ее распределения (1), реализующегося в теплопроводном режиме в отсутствие движения жидкости; p — давление; $\mathbf{g} = -\mathbf{n}g = (g \sin \alpha, 0, g \cos \alpha)$ — вектор ускорения свободного падения; $\mathbf{n} = (-\sin \alpha, 0, -\cos \alpha)$ — единичный вектор, направленный вверх; \mathbf{e}_z — орт оси z .

Считаем, что полость замкнутая, поэтому расход жидкости через любое сечение равен нулю. Выбираем сечение, перпендикулярное оси z . Тогда условие замкнутости принимает вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-1}^1 v_z dx dy = 0. \quad (4)$$

В качестве характерных расстояния, времени, скорости, температуры и давления выбраны d , d^2/ν , ν/d , Ad и $\rho\nu^2/d^2$ соответственно; ρ — средняя плотность жидкости, β — температурный коэффициент объемного расширения, ν — кинематическая вязкость, χ — температуропроводность.

2. Плоскопараллельное течение. Задача (2)–(4) имеет решение $\mathbf{v} = (0, 0, v_0)$, $T = \theta_0$, соответствующее стационарному плоскопараллельному течению с единственной z -составляющей скорости v_0 :

$$v_0 = \nu_0 \text{Gr} \sin \alpha, \quad \theta_0 = \tau_0 \text{tg} \alpha. \quad (5)$$

Здесь при $|\alpha| \leq 90^\circ$

$$\nu_0 = \frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma} - \frac{\text{sh} \gamma x}{\text{sh} \gamma} \right); \quad (6)$$

$$\tau_0 = x - \frac{1}{2} \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma} - \frac{1}{2} \frac{\text{sh} \gamma x}{\text{sh} \gamma}; \quad (7)$$

$$\gamma = \sqrt[4]{\text{Pr} \text{Gr} \cos \alpha}, \quad (8)$$

при $|\alpha| \geq 90^\circ$

$$\nu_0 = \frac{\cos \zeta \text{sh} \zeta \sin \zeta x \text{ch} \zeta x - \sin \zeta \text{ch} \zeta \cos \zeta x \text{sh} \zeta x}{2\zeta^2(\cos^2 \zeta - \text{ch}^2 \zeta)}; \quad (9)$$

$$\tau_0 = x + \frac{\text{ch} \zeta \sin \zeta \text{ch} \zeta x \sin \zeta x + \text{sh} \zeta \cos \zeta \text{sh} \zeta x \cos \zeta x}{\cos^2 \zeta - \text{ch}^2 \zeta}; \quad (10)$$

$$\zeta = \sqrt[4]{-(1/4) \text{Pr} \text{Gr} \cos \alpha}. \quad (11)$$

В случае $\alpha = 90^\circ$ (горизонтальный слой) решения (5)–(7) и (5), (9), (10) могут быть записаны в виде

$$v_0 = (x - x^3) \frac{\text{Gr}}{6}, \quad \theta_0 = \left(-\frac{7}{30} x + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{10} x^5 \right) \frac{\text{Gr} \text{Pr}}{12}. \quad (12)$$

Решение (12), полученное в [2], как правило, называется течением Бириха [6, 10], а соответствующая этому решению задача — задачей Бириха. Устойчивость решения (12) хорошо исследована как теоретически [3, 5], так и экспериментально [11], и в связи с наличием технологических приложений активно изучается влияние на его структуру и устойчивость таких явлений, как вращение [12], вибрации полости [13, 14], бинарные свойства жидкости [15, 16].

Отклонение положения слоя от горизонтального приводит к качественному изменению типа плоскопараллельного течения.

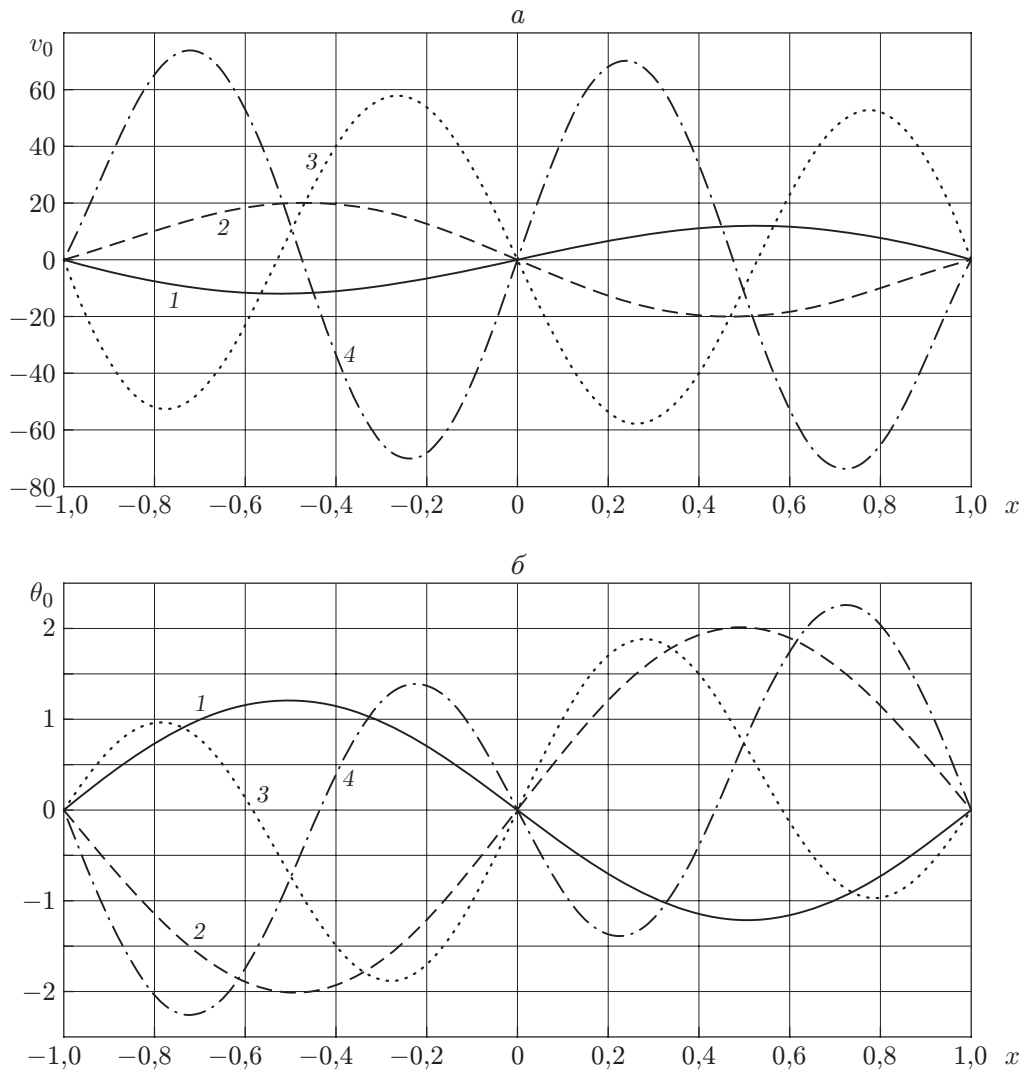


Рис. 2. Профили скорости v_0 (а) и температуры θ_0 (б) при $\alpha = 45^\circ$, $\text{Pr} = 1$ и различных значениях параметра γ :

1 — $\gamma = 0,9\pi$; 2 — $\gamma = 1,1\pi$; 3 — $\gamma = 1,9\pi$; 4 — $\gamma = 2,1\pi$

2.1. *Подогрев снизу.* В случае $0^\circ < |\alpha| < 90^\circ$ с увеличением числа Грасгофа Gr при фиксированных значениях α , Pr при переходе через значения $\text{Gr} = \text{Gr}_*^{(n)}$, соответствующие $\gamma = \pi n$, меняется знак скорости v_0 и температуры θ_0 плоскопараллельного течения. Эти инверсионные значения числа Грасгофа определяются соотношением

$$\text{Gr}_{inv}^{(n)} = \frac{(n\pi)^4}{\text{Pr} \cos \alpha} \quad (13)$$

(n — натуральное число).

Профили скорости v_0 и температуры θ_0 при различных значениях параметра γ представлены на рис. 2. Видно, что при увеличении Gr в распределениях скорости v_0 и температуры θ_0 появляются новые узлы. При $\text{Gr} = \text{Gr}_{inv}^{(n)}$ скорость и температура плоскопараллельного течения обращаются в бесконечность.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае теплоизолированных границ [9] скорость и температура основного течения в условиях подогрева снизу обращаются в бесконечность при меньших значениях числа Грасгофа, полученных в (13) с помощью замены $n - 1/4 \rightarrow n$.

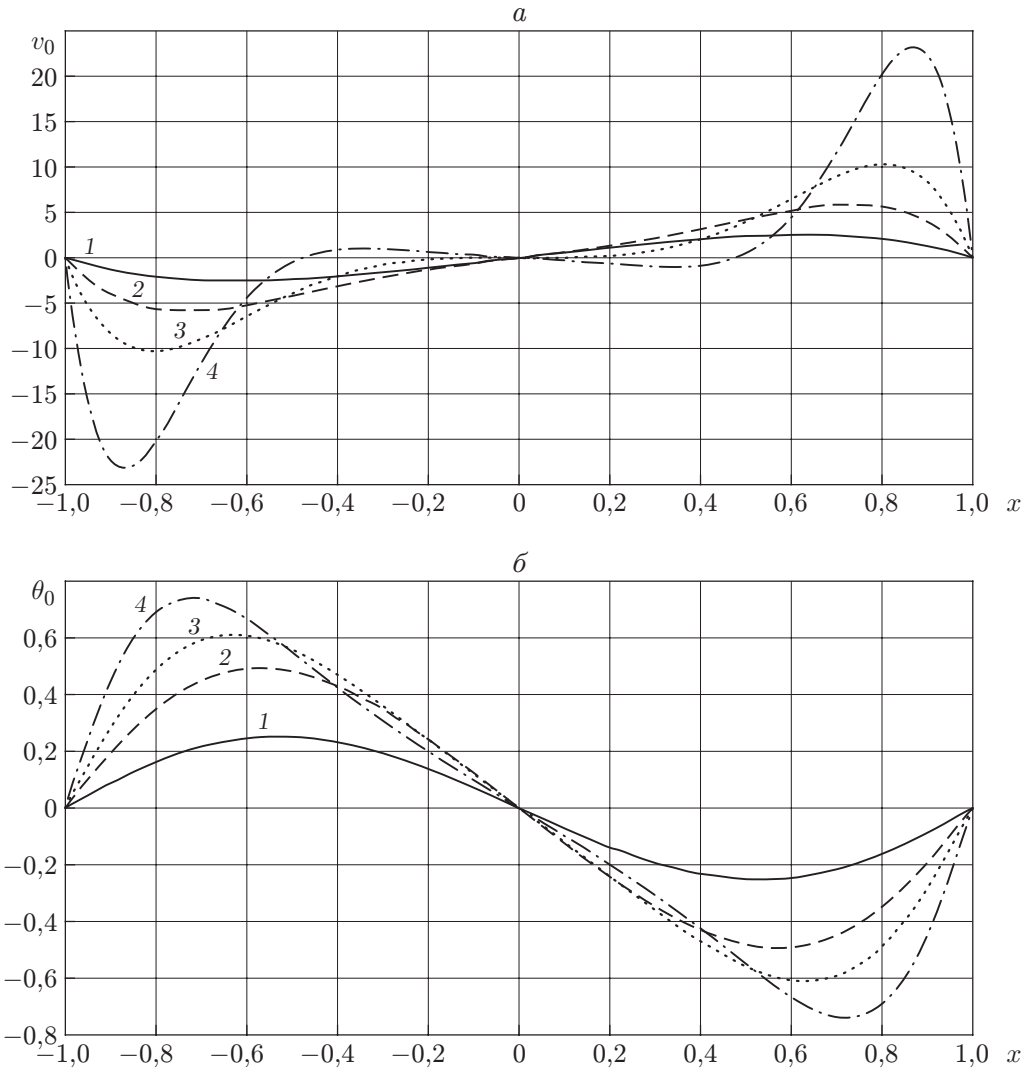


Рис. 3. Профили скорости v_0 (а) и температуры θ_0 (б) при $\alpha = 135^\circ$, $Pr = 1$ и различных значениях параметра ζ :
 1 — $\zeta = 2$; 2 — $\zeta = 3$; 3 — $\zeta = 4$; 4 — $\zeta = 6$

Бесконечная интенсивность течения (5)–(7) не может быть реализована, поскольку в этом случае через единицу объема жидкости будет проходить бесконечный поток тепла, для поддержания которого нужен источник энергии бесконечной мощности. Кроме того, даже при умеренных значениях числа Грасгофа $Gr < Gr_{inv}^{(1)}$, плоскопараллельное течение становится неустойчивым.

2.2. *Подогрев сверху.* Профили v_0 и θ_0 при $|\alpha| > 90^\circ$ и различных значениях ζ представлены на рис. 3. При малых значениях ζ профиль скорости описывается с помощью кубической зависимости. С увеличением ζ течение в центральной области слоя замедляется. При значениях $\zeta = \zeta_n$, приближенно определяемых по формуле

$$\zeta_n \approx \pi/4 + \pi n - \exp(-2(\pi/4 + \pi n))$$

(n — натуральное число), в распределении скорости в середине слоя появляются новые узлы. Также при увеличении ζ узлы смещаются от середины к границе слоя. При этом течение жидкости между узлами достаточно слабое по сравнению с течением между границей

и ближайшим к ней узлом. При $\zeta > 5$ жидкость течет преимущественно в пограничных слоях толщиной порядка π/ζ .

3. Малые возмущения. Для исследования устойчивости решений (5)–(11) рассмотрим нестационарное возмущенное течение с параметрами $\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}(x, y, z, t)$, $\theta_0 + \theta(x, y, z, t)$, $p_0 + p(x, y, z, t)$. Подставляя эти поля в (2) и линеаризуя данные уравнения по малым нестационарным возмущениям $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, $\theta(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$, получаем систему уравнений для возмущений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v}_0 \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}_0) &= -\nabla(p + \mathbf{v}_0 \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \text{Gr} \mathbf{n} \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta_0 + v_z &= \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \theta, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

с граничными условиями

$$x = \pm 1: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \theta = 0. \quad (15)$$

Задача (14), (15) имеет решение в виде плоских нормальных возмущений (валов с осями, параллельными оси y)

$$\begin{aligned} v_x(x, z, t) &= \bar{v}_x(x) \exp(-\lambda t + ikz), & v_y &= 0, & v_z(x, z, t) &= \bar{v}_z(x) \exp(-\lambda t + ikz), \\ p(x, z, t) &= \bar{p}(x) \exp(-\lambda t + ikz), & \theta(x, z, t) &= \bar{\theta}(x) \exp(-\lambda t + ikz), \end{aligned}$$

а также в виде спиральных возмущений (валов с осями, параллельными оси z)

$$\begin{aligned} v_x(x, y, t) &= \tilde{v}_x(x) \exp(-\lambda t +iky), & v_y(x, y, t) &= \tilde{v}_y(x) \exp(-\lambda t +iky), \\ v_z(x, y, t) &= \tilde{v}_z(x) \exp(-\lambda t +iky), \\ p(x, y, t) &= \tilde{p}_x(x) \exp(-\lambda t +iky), & \theta(x, y, t) &= \tilde{\theta}_x(x) \exp(-\lambda t +iky) \end{aligned}$$

(далее знак “ \sim ” и черта сверху у амплитуд возмущений опускаются).

4. Длинноволновые возмущения. В длинноволновом пределе, т. е. при $k = 0$, решения задачи (14), (15) делятся на два типа: четные и нечетные по x относительно середины слоя. В случае четного решения амплитуды всех компонент скорости и температуры будем полагать пропорциональными линейным комбинациям $\cos(\sigma x)$ и $\text{ch}(\sigma x)$, в случае нечетного — пропорциональными линейным комбинациям $\sin(\sigma x)$ и $\text{sh}(\sigma x)$. Подставляя данные соотношения в граничные условия (15), получаем выражение

$$\sigma = \pi m/2. \quad (16)$$

Значения $m = 1, 3, 5, \dots$ соответствуют четным возмущениям, значения $m = 2, 4, 6, \dots$ — нечетным возмущениям. Решая задачу при $k = 0$ как для плоских нормальных, так и для спиральных возмущений, получаем выражение для декремента длинноволновых возмущений

$$\lambda = \frac{\sigma^2(1 + \text{Pr}) \pm \sqrt{\sigma^4(1 - \text{Pr})^2 + 4 \text{Pr}^2 \text{Gr} \cos \alpha}}{2 \text{Pr}}. \quad (17)$$

Рассмотрим отдельно случаи отсутствия и наличия подогрева снизу.

4.1. *Подогрев сверху.* При $|\alpha| \geq 90^\circ$ из (17) следует, что возмущения ослабляются. При значениях числа Грасгофа $\text{Gr} > \text{Gr}_{osc}$ возможны затухающие колебательные возмущения. Значение Gr_{osc} определяется соотношением

$$\text{Gr}_{osc} = -\sigma^4 \frac{(1 - \text{Pr})^2}{4 \text{Pr}^2 \cos \alpha}, \quad (18)$$

а декремент затухания возмущений λ_r и частота $\omega = \text{Im}(\lambda)$ — соотношениями

$$\lambda_r = \sigma^2 \frac{1 + \text{Pr}}{2 \text{Pr}}, \quad \omega^2 = (\text{Gr}_{osc} - \text{Gr}) \cos \alpha.$$

В соответствии с (18) при $\alpha \rightarrow 90^\circ$ и $\text{Pr} \neq 1$ $\text{Gr}_{osc} \rightarrow \infty$, что согласуется с результатами [17]. В данной работе в маломодовом приближении получено, что на аналогичной линии возникновения колебательных возмущений для замкнутой полости при $\alpha \approx 90^\circ$ имеется точка возврата.

4.2. *Подогрев снизу.* При $|\alpha| < 90^\circ$ из (17) следует, что в случае наличия подогрева снизу длинноволновые колебательные возмущения невозможны.

Амплитуды длинноволновых монотонных возмущений можно представить в виде разложения по малому параметру k

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)}k + \dots, \quad p = p^{(0)} + p^{(1)}k + \dots, \quad \theta = \theta^{(0)} + \theta^{(1)}k + \dots$$

Четные плоские возмущения. В случае четных плоских возмущений в нулевом порядке $\theta^{(0)} = 0$, $\mathbf{v}^{(0)} = 0$, $dp^{(0)}/dx = 0$. В первом порядке ненулевые амплитуды нейтральных возмущений скорости и температуры определяются выражениями

$$v_z^{(1)} = \frac{i\gamma^2 p^{(0)}}{2 \text{Pr} \text{Gr} \cos \alpha} \left(-\frac{\cos \gamma x}{\cos \gamma} + \frac{\text{ch } \gamma x}{\text{ch } \gamma} \right),$$

$$\theta^{(1)} = \frac{ip^{(0)}}{\text{Gr} \cos \alpha} \left(-1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \gamma x}{\cos \gamma} + \frac{\text{ch } \gamma x}{\text{ch } \gamma} \right) \right),$$

где $\gamma^4 = \text{Pr} \text{Gr} \cos \alpha$.

Нейтральные кривые определяются корнями трансцендентного уравнения

$$\text{tg } \gamma = \text{th } \gamma, \quad (19)$$

первыми тремя решениями которого являются значения $\gamma_1 \approx 3,9266$, $\gamma_2 \approx 7,0686$, $\gamma_3 \approx 10,2102$, ...

Таким образом, четные плоские длинноволновые возмущения затухают при

$$\text{R} < \text{R}_{pl}^{ev}(1) = \frac{\gamma_1^4}{\cos \alpha} \approx \frac{237,7}{\cos \alpha}. \quad (20)$$

Уравнение (19) совпадает с уравнением, полученным в [2] при исследовании устойчивости равновесия в вертикальном слое, т. е. при $\alpha = 0$. Критическое значение числа Рэлея (20) при $\alpha \rightarrow 0$ также переходит в полученное в [2] критическое значение.

Нечетные плоские и спиральные возмущения. Нейтральные кривые, соответствующие этим типам возмущений, получаются из (16), (17) при $m = 2n$:

$$\text{R}_{pl}^{odd}(n) = \text{R}_{sp}^{odd}(n) = \frac{(n\pi)^4}{\cos \alpha}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (21)$$

В предельном случае $\alpha \rightarrow 0$ выражение (21) преобразуется в выражение, полученное в [2] для случая вертикального слоя. Нейтральная кривая наиболее опасных возмущений соответствует значению $n = 1$:

$$\text{R}_{pl}^{odd}(1) = \text{R}_{sp}^{odd}(1) = \frac{\pi^4}{\cos \alpha} \approx \frac{97,41}{\cos \alpha}.$$

Рассмотрев разложения по k следующего порядка малости, можно показать, что длинноволновые нечетные спиральные возмущения не являются наиболее опасными по сравнению с аналогичными возмущениями, для которых волновое число имеет малое, но конечное значение.

Четные спиральные возмущения. Уравнение семейства нейтральных кривых вытекает из (16), (17) при $m = 2n + 1$:

$$R_{sp}^{ev}(n) = \frac{(\pi(n + 1/2))^4}{\cos \alpha}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Нейтральная кривая наиболее опасных возмущений соответствует значению $n = 0$:

$$R_{sp}^{ev}(0) = \frac{\pi^4}{16 \cos \alpha} \approx \frac{6,088}{\cos \alpha}. \quad (22)$$

Рассмотрев разложение по k следующего порядка малости, можно показать, что длинноволновые четные спиральные возмущения являются наиболее опасными по сравнению с аналогичными возмущениями, имеющими малое, но конечное значение волнового числа k .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [2] показано, что при $\alpha = 0$ четные спиральные возмущения наиболее опасны как в случае теплопроводных, так и в случае теплоизолированных границ, а при $\alpha = 90^\circ$ таких возмущений (по крайней мере, в случае теплопроводных границ) не существует (см. (22)). В то же время в [9] показано, что в случае наклонного слоя с теплоизолированными границами наиболее опасны плоские ячеистые возмущения. Однако в [9] пространственные возмущения, к числу которых относятся спиральные возмущения, не рассматривались. Поэтому можно предположить, что при любом числе Прандтля существует критический угол наклона $0^\circ < \alpha_{cr}(Pr) < 90^\circ$, для которого при $\alpha < \alpha_{cr}(Pr)$ четные спиральные возмущения наиболее опасны.

Заключение. Изучена длинноволновая неустойчивость плоскопараллельного течения в наклонном слое с постоянным продольным градиентом температуры на его идеально теплопроводных границах. Показано, что в случае подогрева сверху, т. е. при $|\alpha| > 90^\circ$, течение устойчиво по отношению к длинноволновым возмущениям всех типов, но если значение числа Грасгофа больше значения, определяемого соотношением (18), то затухание возмущений имеет колебательный характер.

При $|\alpha| < 90^\circ$ плоскопараллельное течение теряет устойчивость, в случае если значение числа Рэлея больше критического значения, зависящего от типа возмущения. Наиболее опасными среди длинноволновых возмущений являются четные спиральные возмущения, для которых критическое значение числа Рэлея определяется выражением (22). Показано, что они также наиболее опасны среди четных спиральных возмущений с малыми, но конечными значениями волнового числа.

Авторы выражают благодарность В. К. Андрееву и В. В. Пухначеву за внимание к работе и полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Остроумов Г. А.** Свободная тепловая конвекция в условиях внутренней задачи. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1952.
2. **Гершуни Г. З.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. М.: Наука, 1972.
3. **Гершуни Г. З.** Устойчивость конвективных течений / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, А. А. Непомнящий. М.: Наука, 1989.

4. **Бирих Р. В.** О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
5. **Gershuni G. Z., Laure P., Myznikov V. M., et al.** On the stability of plane-parallel advective flow in long horizontal layers // Microgravity Quart. 1992. V. 2, N 3. P. 141–151.
6. **Андреев В. К.** Решение Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения. Красноярск, 2010. (Препр. / Ин-т вычисл. моделирования СО РАН; № 1-10).
7. **Бекежанова В. Б.** Конвективная неустойчивость течения Марангони — Пуазейля при наличии продольного градиента температуры // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 1. С. 92–100.
8. **Бекежанова В. Б.** О смене форм неустойчивости стационарного течения двухслойной жидкости в наклонном канале // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2011. № 4. С. 24–34.
9. **Delgado-Buscalioni R., Crespo del Arco E.** Stability of thermally driven shear flows in long inclined cavities with end-to-end temperature difference // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1999. V. 42, N 15. P. 2811–2822.
10. **Пухначев В. В.** Теоретико-групповая природа решения Бириха и его обобщения // Тр. Междунар. конф. “Симметрия и дифференциальные уравнения”, Красноярск, 21–25 авг. 2000 г. Красноярск: Ин-т вычисл. моделирования СО РАН, 2000. С. 180–183.
11. **Kurdyashkin A. G.** Thermogravitational and thermocapillary flows in a horizontal liquid layer under the conditions of a horizontal temperature gradient // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1984. V. 27, N 8. P. 1205–1218.
12. **Shtern V., Zimin V., Hussain F.** Analysis of centrifugal convection in rotating pipes // Phys. Fluids. 2001. V. 13, N 8. P. 2296–2308.
13. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Плоскопараллельные адвективные течения в вибрационном поле // Инж.-физ. журн. 1989. Т. 56, № 2. С. 238–242.
14. **Бирих Р. В., Катанова Т. Н.** Влияние высокочастотных вибраций на устойчивость адвективного течения // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 1. С. 16–22.
15. **Gershuni G. Z., Shalimov A. V., Myznikov V. M.** Plane parallel advective binary mixture flow stability in a horizontal layer // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1994. V. 37, N 15. P. 2327–2342.
16. **Любимов Д. В., Любимова Т. П., Никитин Д. А., Перминов А. В.** Устойчивость адвективного течения бинарной смеси в плоском горизонтальном слое с идеально теплопроводными границами // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 3. С. 130–139.
17. **Сагитов Р. В., Шарифулин А. Н.** Устойчивость стационарной тепловой конвекции в наклоняемой прямоугольной полости в маломодовом приближении // Теплофизика и аэромеханика. 2008. Т. 15, № 2. С. 247–256.

Поступила в редакцию 24/1 2011 г.