

РЕЗОНАНСНЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ПРОНИЦАЕМОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД

В.Н. Доровский¹, Е.И. Роменский^{1,2}, А.И. Федоров¹, Ю.В. Перепечко^{1,3}

¹ Компания «Бейкер Хьюз», Российский научный центр, 630090, Новосибирск, ул. Кутателадзе, 4а, Россия

² Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 4, Россия

³ Институт геологии и минералогии им. В.С. Соболева СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 3, Россия

Рассматривается физически простой способ измерения проницаемости пористой среды в скважинной диагностике — резонансный режим радиальных колебаний скважинной жидкости. Разница скоростей пористой матрицы и жидкости на границе раздела сред в резонансном режиме испытывает повышенную чувствительность к проницаемости пористой среды, расположенной в заскважинном пространстве. Аппаратно измеряя обозначенную разность скоростей, определяется проницаемость. Рассматриваются технологические ограничения возможности измерений, обусловленные конечностью размеров излучающего источника. Подробно описывается эффективная двумерная разностная схема WENO/Рунге—Кутты (лежащая в основе проведенных расчетов) высокого порядка точности для двухскоростной акустики пористых насыщенных сред.

Измерения проницаемости, насыщенные пористые среды, акустические волны, радиальные колебания, резонансные моды, двумерная разностная схема WENO/Рунге—Кутты.

A RESONANCE METHOD FOR MEASURING PERMEABILITY

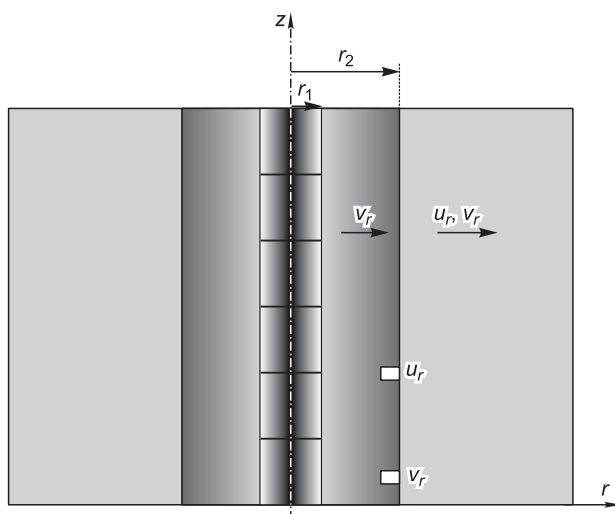
V.N. Dorovsky, E.I. Romensky, A.I. Fedorov, and Yu.V. Perepechko

A physically simple method is suggested to measure the permeability of porous reservoirs on the basis of resonance radial oscillations of borehole fluid. The interfacial velocity difference between the porous solid and the fluid is highly sensitive to the permeability of the formation outside the borehole at the resonance frequency. Thus, the permeability can be inferred from the instrumentally measured velocity difference. The instrumental measurements have technological limitations due to the finite size of the source. The two-velocity acoustic data from saturated porous media can be processed using the high-performance and high-order accurate WENO/Runge–Kutta 2D finite-difference scheme.

Permeability measurements, saturated porous formation, acoustic waves, radial oscillations, resonance mode, WENO/Runge–Kutta finite-difference scheme

ОСОБЕННОСТИ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ С ПОРИСТЫМИ НАСЫЩЕННЫМИ СРЕДАМИ

Набор современных геофизических методов, направленных на измерение проницаемости пористой среды в пространстве за скважиной, ограничен. В качестве примера можно привести технологические приемы измерения проницаемости с использованием диссипативных характеристик волн Стоунли [Xianyun, Hezhu, 2007]. Настоящая статья представляет физические основы достаточно простого и эффективного резонансного метода измерения проницаемости насыщенной пористой среды, расположенной за скважиной. В идеальной

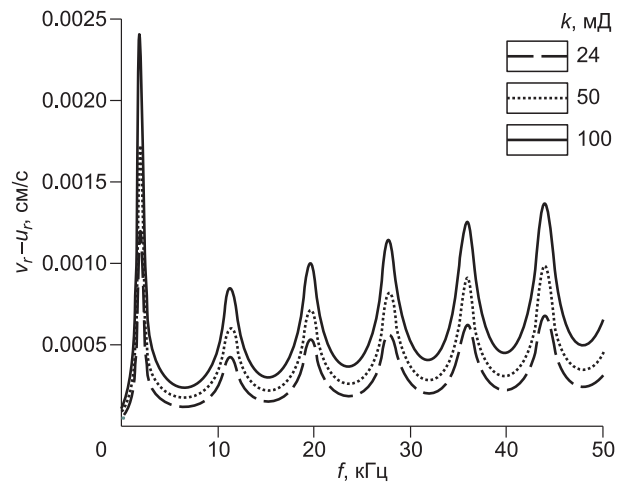


среде, расположенной за скважиной. В идеальной

Рис. 1. Рассматриваемая система представляет скважину ($r < r_2$), заскважинное пространство ($r \geq r_2$), протяженный источник акустического сигнала ($r \leq r_1$) и принимающие акустические датчики, расположенные на/у поверхности раздела сред.

u_r, v_r — скорости пористой матрицы и насыщающей жидкости соответственно.

Рис. 2. Зависимость разности амплитуд скоростей насыщающей жидкости и пористой матрицы от частоты.



формулировке способ измерения проницаемости построен на зависимости граничного значения разности скоростей пористой матрицы и насыщающей ее жидкости от проницаемости пористой среды. Ниже рассматривается система с расположенным по оси скважины бесконечно длинным в идеальном приближении источником, работающим на резонансной частоте собственных радиальных колебаний скважины (рис. 1). При вынужденных колебаниях такой системы разность скоростей на границе раздела сред испытывает повышенную чувствительность по отношению к проницаемости пористой среды, расположенной за скважиной.

«Одномерные» колебательные режимы скважинного пространства имеют собственные резонансные частоты. Рис. 2 иллюстрирует частотную зависимость разности амплитуд скоростей пористой матрицы и насыщающей жидкости вблизи границы скважины для некоторых значений проницаемости насыщенной пористой среды (см. Приложение I).

В области резонансной частоты собственных колебаний скважины (для данной модели частота первого резонанса ~ 1.966 кГц, см. рис. 2) разность скоростей $u_r^{(1)} - v_r^{(1)}$ на границе пористой среды и скважинной жидкости, как показано в Приложении I, испытывает резонансную чувствительность от проницаемости k (рис. 3). Располагая измерением разности скоростей пористой матрицы и насыщающей жидкости на резонансной частоте, по теоретической кривой зависимости разности скоростей как функции проницаемости при фиксированной частоте колебаний (близкой к резонансной, см. рис. 2) можно определить проницаемость системы.

Процедура измерения проницаемости сводится к последовательности следующих действий. Протяженный источник радиальных акустических колебаний, работающий на резонансной частоте, помещается в центр скважины. Приемники акустических колебаний располагаются на границе скважины с пористым пространством. Для получения разности амплитуд скоростей пористой матрицы и насыщающей жидкости $u_r^{(1)} - v_r^{(1)}$ проводятся независимые измерения скорости скважинной жидкости $v_r^{(0)}$ у границы скважины и скорости пористой матрицы $u_r^{(1)}$ на границе скважины. На основе этих данных вычисляется необходимая разность скоростей по формуле

$$u_r^{(1)} - v_r^{(1)} = (u_r^{(1)} - v_r^{(0)}) / \phi,$$

где ϕ — пористость пространства за скважиной. По характеру отклика системы на акустическое возбуждение определяется низшая резонансная частота. Располагая знаниями о пористости, скоростях звука в системе, вязкости жидкости, геометрических размерах скважины, по теоретической кривой зависимости разности амплитуд скоростей пористой матрицы и насыщающей жидкости у поверхности раздела сред (см. рис. 3) определяем проницаемость пористого пространства на резонансной частоте.

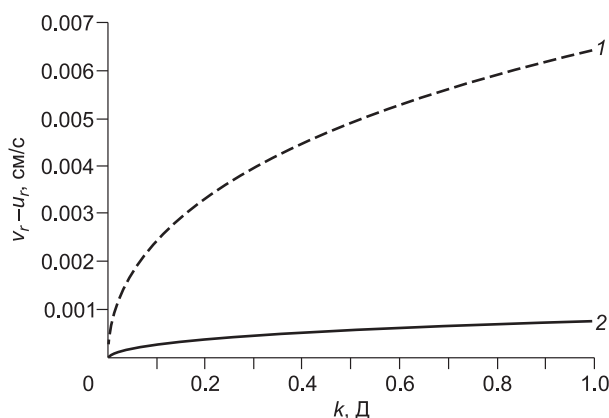


Рис. 3. Зависимость разности амплитуд скоростей насыщающей жидкости и пористой матрицы от проницаемости на резонансной (1.966 кГц) (1) и нерезонансной (6.987 кГц) (2) частотах.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ МЕТОДА РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Приведенные идеальные физические условия предлагаемой схемы измерений проницаемости требуют технологического обоснования геофизической возможности измерений в реальных ситуациях с возбуждающим источником конечного размера. В реальных условиях становится принципиальным вопрос чувствительности измеряемых величин от проницаемости при источнике конечного размера. Принципиально также исследование вопроса об оптимальном расположении приемников акустического сигнала. Поскольку выход на резонансный режим вынужденных колебаний связан со значительным числом актов пробега радиальных волн, исследование вопросов, связанных с двумерной геометрией при измерении проницаемости на резонансных частотах, требует развития специфических двумерных акустических методов численного счета высокого порядка точности. В Приложении II развит численный алгоритм для исследования поставленной проблемы — метод WENO/Рунге—Кутты высокого порядка точности для моделирования волн малой амплитуды в насыщенных пористых средах. Представленные ниже результаты численного исследования относятся к двумерной лабораторной модели — резонансного колебания цилиндрического диска конечного размера в двух измерениях (рис. 4).

Чувствительности разности скоростей матрицы и насыщающей жидкости (результат расчета двумерного алгоритма) на границе раздела скважинной жидкости и пористой среды по отношению к проницаемости пористой среды представлены на рис. 5, а для различных значений размеров источника $S1, S2, S3, S4$ при расположении приемника $R1$ напротив излучателя.

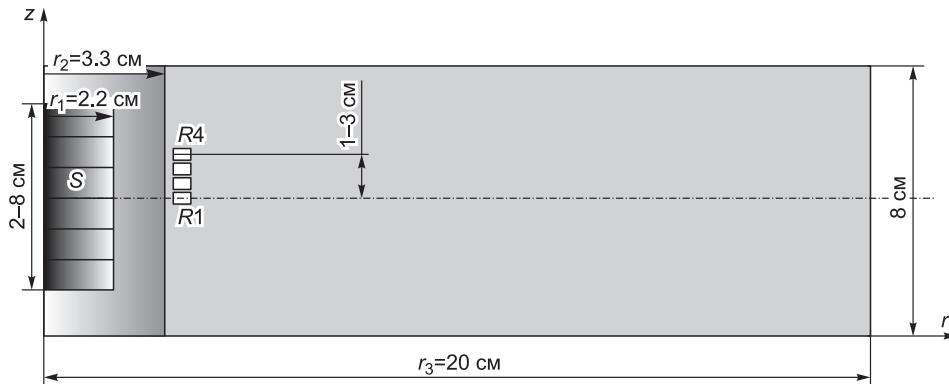


Рис. 4. Лабораторная модель представляет цилиндрический диск радиусом r_3 с центральным отверстием ($r < r_2$), в котором расположены конечный источник акустического сигнала S ($r \leq r_1$) и система принимающих акустических датчиков ($R1, \dots, R4$) на/у поверхности раздела сред.

На рисунке приведена правая половина радиального сечения диска.

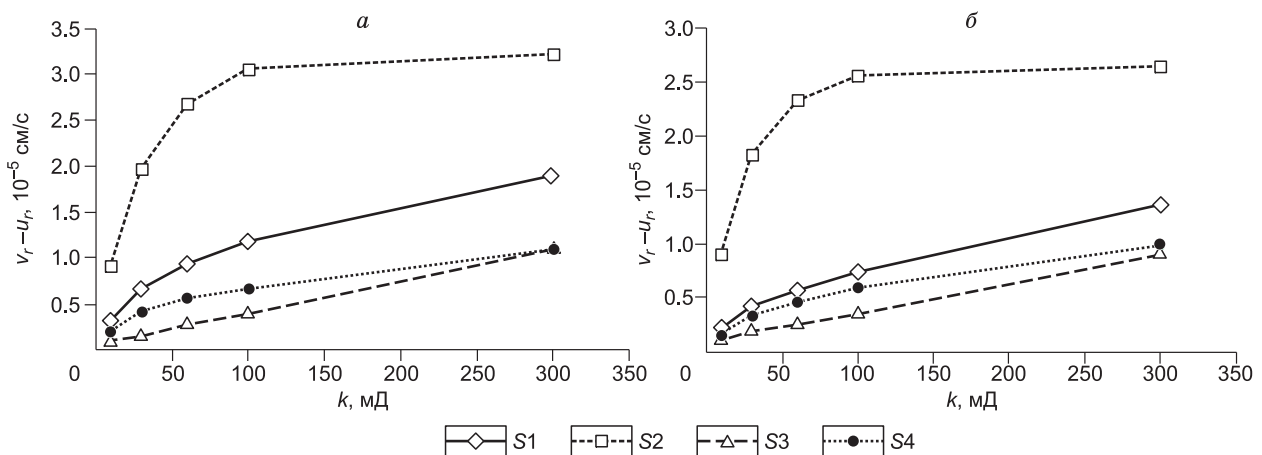


Рис. 5. Зависимость разности скоростей от проницаемости для различных значений размера источника в вертикальном направлении ($S1 = 2$ см, $S2 = 4$ см, $S3 = 6$ см и $S4 = 8$ см).

а — приемник $R1$ расположен напротив излучателя, б — приемник $R2$ смещен относительно оси излучателя на 1 см.

Отметим, что акустические источники длиной 2, 4, 6 и 8 см (при диаметре скважины 3.3 см и диаметре излучателя 2.2 см) обеспечивают акустический отклик с амплитудой, доступной для измерений. При этом чувствительность системы, как и в идеальном одномерном случае, выше в области малых значений проницаемости и уменьшается с переходом в область более высоких проницаемостей. С увеличением размера излучателя амплитуда отклика немонотонно увеличивается из-за конечности образца в продольном направлении. Нецентральное расположение приемника (см. рис. 5, б) качественно не меняет ситуацию, несколько ослабляя амплитуду отклика.

Таким образом, технологические способы реального возбуждения скважины не нарушают общих физических возможностей измерения проницаемости по измерению разности скоростей на границе матрицы и насыщающей ее жидкости на резонансных частотах, хотя каждому размеру источника должна соответствовать своя теоретическая кривая для измерения проницаемости.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

РАДИАЛЬНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ СКВАЖИНА — НАСЫЩЕННАЯ ПОРИСТАЯ СРЕДА

Теория, описывающая радиальные колебания для измерения проницаемости в насыщенной пористой среде, основывается на континуальной теории фильтрации [Доровский, 1989; Доровский, Перепечко, 1992; Blokhin, Dorovsky, 1995], уравнения которой могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (\text{I.1})$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} + u_j \partial_j g_{ik} + g_{jk} \partial_i u_j + g_{ij} \partial_k u_j = 0, \quad (\text{I.2})$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k (\rho_s u_i u_k + \rho_l v_i v_k + p \delta_{ik} + g_{jk} h_{ij} + \pi_{ik}) = 0, \quad (\text{I.3})$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) v_i = -\frac{1}{\rho} \partial_i p + \frac{\rho_s}{2\rho} \partial_i (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 - \frac{1}{2\rho} h_{jk} \partial_i g_{jk} + \frac{1}{\rho_l} f_i, \quad (\text{I.4})$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} S \mathbf{j} + \frac{1}{T} \mathbf{q} \right) = \frac{R}{T}. \quad (\text{I.5})$$

Условие положительности диссипативной функции R

$$-R = \mathbf{f} \frac{1}{\rho_l} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{u}) + \mathbf{q} \frac{1}{T} \nabla T + A_{ik} \left(\partial_i v_k + \partial_k v_i - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + a \operatorname{div} \mathbf{v}$$

определяет вид диссипативных потоков

$$\mathbf{q} = -\alpha_{12} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{u}) - \kappa \frac{1}{T} \nabla T,$$

$$\mathbf{f} + \partial_k \pi_{ik} = -b (\mathbf{j} - \rho \mathbf{u}) - \rho_l \alpha_{12} \frac{1}{T} \nabla T,$$

$$\pi_{ik} = A_{ik} + a \delta_{ik}, \quad A_{ik} = -\eta \left(\partial_i v_k + \partial_k v_i - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} \right), \quad a = -\zeta \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Уравнение состояния насыщенной пористой среды выбирается соотношениями

$$p = p_0 - \frac{1}{2} K g_{ll} + \frac{1}{\rho_0} (K + \gamma) \rho + \alpha_p S + \frac{1}{2} \rho_s (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2,$$

$$T = T_0 + \alpha_s S + \alpha_p \frac{1}{\rho_0} \rho,$$

$$h_{ik} = h_{0,ik} + \mu g_{ik} + \frac{1}{2} \lambda g_{ll} \delta_{ik} - \frac{1}{\rho_0} K \rho \delta_{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} \rho_s (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2.$$

В приведенных формулах ρ_l, ρ_s — парциальные плотности насыщающей жидкости и пористой матрицы соответственно, $\rho = \rho_l + \rho_s$ — плотность насыщенной среды; \mathbf{u}, \mathbf{v} — скорость движения пористой матрицы и насыщающей жидкости; $\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{u} + \rho_l \mathbf{v}$ — импульс; h_{ik} — тензор напряжений, g_{ik} — метрический тензор; p — давление, T — температура, S — энтропия, E — энергия; α_s, α_p — термодинамические параметры среды; K, μ и γ — упругие модули насыщенной пористой среды, $\lambda = K - \frac{2}{3}\mu$. Диссипативный коэффициент межфазного трения b может быть определен соотношением $b = \eta/(k\rho)$, где η — динамическая вязкость насыщающей жидкости, k — проницаемость пористой среды.

Линеаризованный изотермический вариант уравнений (I.1)—(I.4) позволяет определить уравнения движения пористой матрицы \mathbf{u} и насыщающей жидкости \mathbf{v} в акустическом приближении:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \mathbf{u} - a_1 \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + a_2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\rho_l}{\rho_s} b \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + a_3 \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - a_4 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} - b \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) = 0.$$

Коэффициенты a_i ($i = 1, \dots, 4$) определяются модулями упругости насыщенной пористой среды λ, μ и γ

$$a_1 = \frac{1}{\rho_s} \left(\frac{\rho_s^2}{\rho^2} \gamma + \frac{\rho_l^2}{\rho^2} K + \frac{1}{3} \mu \right), \quad a_2 = \frac{\rho_l}{\rho_s} \left(\frac{\rho_l}{\rho^2} K - \frac{\rho_s}{\rho^2} \gamma \right),$$

$$a_3 = \frac{\rho_l}{\rho^2} K - \frac{\rho_s}{\rho^2} \gamma, \quad a_4 = \frac{\rho_l}{\rho^2} K + \frac{\rho_l}{\rho^2} \gamma, \quad K = \lambda + 2\mu/3.$$

Три модуля λ, μ и γ определяются, согласно приведенным ниже формулам, через три акустические скорости c_{p1}, c_{p2}, c_t идеального гидродинамического приближения, теоретически предсказанные в [Френкель, 1944; Biot, 1956] и экспериментально подтвержденные в работе [Plona, 1980]:

$$\mu = \rho_s c_t^2, \quad \lambda = \frac{1}{2} \frac{\rho_s}{\rho_l} \left(\rho c_{p1}^2 + \rho c_{p2}^2 - 4\rho_l c_t^2 - \sqrt{(\rho c_{p1}^2 - \rho c_{p2}^2)^2 - \frac{64}{9} \rho_s \rho_l c_t^4} \right),$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\rho c_{p1}^2 + \rho c_{p2}^2 - \frac{8}{3} \rho_s c_t^2 + \sqrt{(\rho c_{p1}^2 - \rho c_{p2}^2)^2 - \frac{64}{9} \rho_s \rho_l c_t^4} \right).$$

Акустическое поле в жидкости скважины описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - c_{p0}^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где c_{p0} — скорость звука в скважинной жидкости.

В качестве акустического источника рассматривается гармонический генератор давления $p = P_0 e^{-i\omega t}$, расположенный в центре скважины. Акустический отклик позволяет ввести спектральные амплитуды $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{v}) e^{-i\omega t}$ ($\mathbf{u} = (u_r, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (v_r, 0, 0)$): в жидкости ($r_1 < r < r_2$)

$$\lambda_0 \Delta \mathbf{v} + \mathbf{v} = 0, \quad (\text{I.6})$$

в насыщенной пористой среде ($r_2 < r < \infty$)

$$\bar{a}_0 \Delta \mathbf{u} - \bar{a}_2 \Delta \mathbf{v} + (1 + \varepsilon \bar{b}) \mathbf{u} - \varepsilon \bar{b} \mathbf{v} = 0, \quad (\text{I.7})$$

$$-\bar{a}_3 \Delta \mathbf{u} + \bar{a}_4 \Delta \mathbf{v} - \bar{b} \mathbf{u} + (1 + \bar{b}) \mathbf{v} = 0. \quad (\text{I.8})$$

Здесь и ниже безразмерные скорости \mathbf{u}, \mathbf{v} в (I.6)—(I.8) измеряются в единицах поперечной скорости звука c_p , координаты — в единицах c_t/ω . Коэффициенты: $\lambda_0 = c_{p0}^2/c_t^2$, $\bar{a}_i = a_i/c_t^2$ ($i = 1, \dots, 4$), $\bar{a}_0 = \bar{a}_1 + 1$, $\bar{b} = ib/\omega$, $\varepsilon = \rho_l/\rho_s$. Для построения решения уравнений (I.7)—(I.8) для пористой среды

$$A \Delta \mathbf{U} + W \mathbf{U} = 0,$$

$$A = \begin{pmatrix} \bar{a}_0 & -\bar{a}_2 \\ -\bar{a}_3 & \bar{a}_4 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} (1 + \varepsilon \bar{b}) & -\varepsilon \bar{b} \\ -\bar{b} & (1 + \bar{b}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_r \\ v_r \end{pmatrix} \quad (\text{I.9})$$

удобно привести к диагональному виду. Умножением системы (I.9) на матрицу W^{-1} :

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(1 + \bar{b})}{\det W} & \frac{\varepsilon \bar{b}}{\det W} \\ \frac{\bar{b}}{\det W} & \frac{(1 + \varepsilon \bar{b})}{\det W} \end{pmatrix}, \quad \det W = 1 + (1 + \varepsilon) \bar{b},$$

получаем систему $H \Delta \mathbf{U} + \mathbf{U} = 0$, $H = W^{-1}A$, где

$$h_{11} = \left((1 + \bar{b}) \bar{a}_0 - \varepsilon \bar{b} \bar{a}_3 \right) / \det W, \quad h_{12} = \left(-(1 + \bar{b}) \bar{a}_2 + \varepsilon \bar{b} \bar{a}_4 \right) / \det W,$$

$$h_{21} = \left(\bar{b} \bar{a}_0 - (1 + \varepsilon \bar{b}) \bar{a}_3 \right) / \det W, \quad h_{22} = \left(-\bar{b} \bar{a}_2 + (1 + \varepsilon \bar{b}) \bar{a}_4 \right) / \det W.$$

Последующее умножение на матрицу преобразований R приводит исходную систему к диагональному виду $\Lambda \Delta \mathbf{V} + \mathbf{V} = 0$. Здесь R определяется из решения задачи на собственные значения матрицы $HR = R\Lambda$. Матрица R ($R_{11} = 1$, $R_{12} = (\lambda_2 - h_{22})/h_{21}$, $R_{21} = h_{21}/(\lambda_1 - h_{22})$, $R_{22} = 1$) составлена из правых собственных векторов матрицы H . Матрица собственных значений Λ — диагональная: $R^{-1}HR = \Lambda$. Ее собственные значения λ_1, λ_2 определяются по формулам

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} H \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\operatorname{tr} H)^2 - \det H},$$

где $\operatorname{tr} H = h_{11} + h_{22}$ — след H , $\det H = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$ — определитель H . Вектор-столбец функций преобразуется $R^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{V}$, где $\mathbf{V} = (v_1 \ v_2)^T$.

В координатном представлении (здесь штрих — производная по радиусу) имеем

$$v_1'' + \frac{1}{r} v_1' + \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{r^2} \right) v_1 = 0, \quad v_2'' + \frac{1}{r} v_2' + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{r^2} \right) v_2 = 0. \quad (\text{I.10})$$

Физические скорости выражаются через функции v_1, v_2

$$u_r = v_1 + R_{12} v_2, \quad v_r = R_{21} v_1 + v_2. \quad (\text{I.11})$$

Акустическое уравнение (I.6) в скважинной жидкости записывается аналогично

$$v_r'' + \frac{1}{r} v_r' + \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{r^2} \right) v_r = 0. \quad (\text{I.12})$$

Уравнения (I.10), (I.12) с учетом связей (I.11) описывают радиальные колебания в рассматриваемой системе. Граничные условия в цилиндрической геометрии (индекс ⁽⁰⁾ обозначает величины, относящиеся к жидкости, индекс ⁽¹⁾ — к насыщенной пористой среде):

1) на поверхности $r = r_1$ (см. рис. 1) задан гармонический источник с амплитудой $p^{(0)} = \bar{P}_0 = P_0 / (\rho_s c_t^2)$;

2) на границе $r = r_2$ скважины и пористой среды принимается непрерывность потока массы, непрерывность полного тензора напряжений $\Sigma_{rr}^{(1)}$, $\Sigma_{rr}^{(0)}$, непрерывность парциальных давлений: $(1 - \phi) u_r^{(1)} + \phi v_r^{(1)} = v_r^{(0)}$, $\Sigma_{rr}^{(1)} = \Sigma_{rr}^{(0)}$, $p^{(1)} / \rho^{(1)} = p^{(0)} / \rho^{(0)}$, где ϕ — пористость. Последнее условие является следствием более общего условия непрерывности парциального тензора напряжений в жидкости $\Sigma_{rr}^{(1)} = \phi \Sigma_{rr}^{(0)}$, где $\Sigma_{rr}^{(1)} = \Sigma_{rr}^{s(1)} + \Sigma_{rr}^{f(1)}$. Временные производные компонент тензоров напряжений и давления определяются через скорости смещений

$$-\frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} = \pi_1 \operatorname{div} \mathbf{u}^{(1)} + \pi_2 \operatorname{div} \mathbf{v}^{(1)},$$

$$\frac{\partial \Sigma_{rr}^{(1)}}{\partial t} = \pi_3 \operatorname{div} \mathbf{u}^{(1)} + \pi_4 \operatorname{div} \mathbf{v}^{(1)} + 2u_r',$$

$$\frac{\partial \Sigma_{rr}^{(0)}}{\partial t} = -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} = \pi_0 \operatorname{div} \mathbf{v}^{(0)},$$

где

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (\rho_s \gamma / \rho - \rho_l K / \rho) / (\rho_s c_l^2), & \pi_2 &= (\rho_l \gamma / \rho + \rho_l K / \rho) / (\rho_s c_l^2), \\ \pi_3 &= (\rho_s \gamma / \rho - 2\mu/3) / (\rho_s c_l^2), & \pi_4 &= \rho_l \gamma / (\rho \rho_s c_l^2), & \pi_0 &= \rho^{(0)} c_{p0}^2 / (\rho_s c_l^2). \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (I.5), (I.7) выражается через функции Ганкеля $H_\alpha^{(1)}(z)$, $H_\alpha^{(2)}(z)$ [Бейтмен, Эрдейи, 1974]. В пористой среде безразмерные давление и скорости определяются формулами

$$\begin{aligned} p^{(1)} &= -i B_1 (\pi_1 + \pi_2 R_{21}) H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_1}) / \sqrt{\lambda_1} - i B_2 (\pi_1 R_{12} + \pi_2) H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_2}) / \sqrt{\lambda_2}, \\ u_r^{(1)} &= B_1 H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_1}) + B_2 R_{12} H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_2}), \\ v_r^{(1)} &= B_1 R_{21} H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_1}) + B_2 H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_2}) \end{aligned}$$

и, как следствие, можно вычислить разность скоростей

$$u_r^{(1)} - v_r^{(1)} = B_1 (1 - R_{21}) H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_1}) + B_2 (R_{12} - 1) H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_2}). \quad (\text{I.13})$$

В скважине давление и скорость в безразмерной форме вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} p^{(0)} &= -i B_0 \pi_0 H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_0}) / \sqrt{\lambda_0} - i C_0 \pi_0 H_1^{(2)}(r/\sqrt{\lambda_0}) / \sqrt{\lambda_0}, \\ v_r^{(0)} &= B_0 H_1^{(1)}(r/\sqrt{\lambda_0}) + C_0 H_1^{(2)}(r/\sqrt{\lambda_0}). \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования B_1, B_2, B_0, C_0 определяются граничными условиями $\mathbf{G} \boldsymbol{\Xi} = \mathbf{P}$, где определены $\boldsymbol{\Xi} = (B_1, B_2, B_0, C_0)^T$, $\mathbf{P} = (\bar{P}_0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{G} = \|G_{ik}\|$. Ненулевые компоненты матрицы \mathbf{G} имеют вид:

$$\begin{aligned} G_{11} &= G_{12} = 0, & G_{13} &= \pi_0 H_0^{(1)}(r_1/\sqrt{\lambda_0}) / \sqrt{\lambda_0}, & G_{14} &= \pi_0 H_0^{(2)}(r_1/\sqrt{\lambda_0}) / \sqrt{\lambda_0}, \\ G_{21} &= ((1-\phi) + \phi R_{21}) H_1^{(1)}(r_2/\sqrt{\lambda_1}), & G_{22} &= ((1-\phi) R_{12} + \phi) H_1^{(1)}(r_2/\sqrt{\lambda_2}), \\ G_{23} &= -H_1^{(1)}(r_2/\sqrt{\lambda_0}), & G_{24} &= -H_1^{(2)}(r_2/\sqrt{\lambda_0}), \\ G_{31} &= (\pi_3 + \pi_4 R_{21} + 2) H_0^{(1)}(r_2/\sqrt{\lambda_1}) / \sqrt{\lambda_1} - 2 H_1^{(1)}(r_2/\sqrt{\lambda_1}) / r_2, \\ G_{32} &= (\pi_3 R_{12} + \pi_4 + 2) H_0^{(1)}(r_2/\sqrt{\lambda_2}) / \sqrt{\lambda_2} - 2 R_{12} H_1^{(1)}(r_2/\sqrt{\lambda_2}) / r_2, \\ G_{33} &= -\pi_0 H_0^{(1)}(r_2/\sqrt{\lambda_0}) / \sqrt{\lambda_0}, & G_{34} &= -\pi_0 H_0^{(2)}(r_2/\sqrt{\lambda_0}) / \sqrt{\lambda_0}, \\ G_{41} &= ((\pi_1 + \pi_2 R_{21}) \lambda_1 + i \kappa \bar{b} (1 - R_{21})) H_0^{(1)}(r_2/\sqrt{\lambda_1}) / \sqrt{\lambda_1}, \\ G_{42} &= ((\pi_1 R_{12} + \pi_2) \lambda_2 + i \kappa \bar{b} (R_{12} - 1)) H_0^{(1)}(r_2/\sqrt{\lambda_2}) / \sqrt{\lambda_2}, \\ G_{43} &= -(\rho^{(1)} / \rho^{(0)}) \pi_0 H_0^{(1)}(r_2/\sqrt{\lambda_0}) / \sqrt{\lambda_0}, & G_{44} &= -(\rho^{(1)} / \rho^{(0)}) \pi_0 H_0^{(2)}(r_2/\sqrt{\lambda_0}) / \sqrt{\lambda_0}. \end{aligned}$$

На рисунках 2, 3 представлено решение уравнения (I.13).

ПРИЛОЖЕНИЕ II

МЕТОД WENO/РУНГЕ—КУТТЫ ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Распространение двумерных акустических волн в пористой насыщенной среде за скважиной, заполненной жидкостью, описывается системой линейных уравнений, являющихся двумерным изотермическим вариантом уравнений (I.1)—(I.4) (см. Приложение I) [Доровский, 1989; Доровский, Перепечко, 1992; Dorovsky et al., 1994] в цилиндрической геометрии: $\{r, \varphi, z\}$, $\partial/\partial\varphi = 0$ (обозначения сохраняются),

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{S}(r, \mathbf{U}). \quad (\text{II.1})$$

Здесь 9-компонентные векторы-столбцы \mathbf{U} , \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{S} представлены в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \left(\rho_s u_r + \rho_l v_r, \rho_s u_z + \rho_l v_z, \rho_s (u_r - v_r), \rho_s (u_z - v_z), \frac{\rho}{\rho_0}, \varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{\varphi\varphi} \right)^T, \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}) &= \left(p + h_{rr}, h_{rz}, h_{rz}, h_{rz}, \frac{\rho_s}{\rho_0} u_r + \frac{\rho_l}{\rho_0} v_r, -u_r, 0, -\frac{u_z}{2}, 0 \right)^T, \\ \mathbf{G}(\mathbf{U}) &= \left(h_{rz}, p + h_{zz}, h_{rz}, h_{zz}, \frac{\rho_s}{\rho_0} u_z + \frac{\rho_l}{\rho_0} v_z, 0, -u_z, -\frac{u_r}{2}, 0 \right)^T, \\ \mathbf{S}(\mathbf{U}) &= \left(-\frac{h_*}{r}, -\frac{h_{rz}}{r}, -\frac{h_*}{r} - \rho_0 b(u_r - v_r), \frac{h_{rz}}{r} - \rho_0 b(u_z - v_z), -\frac{\rho_s u_r}{r\rho_0} - \frac{\rho_l v_r}{r\rho_0}, 0, 0, 0, u_r/r \right)^T, \\ h_* &= h_{rr} - h_{\varphi\varphi}, \quad p = K(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) + (K + \gamma) \frac{\rho}{\rho_0}, \quad b = \rho_0 \rho_l \chi, \\ h_{rr} &= -(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} - \lambda\varepsilon_{\varphi\varphi} - \lambda\varepsilon_{zz} - K \frac{\rho}{\rho_0}, \quad h_{\varphi\varphi} = -\lambda\varepsilon_{rr} - (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\varphi\varphi} - \lambda\varepsilon_{zz} - K \frac{\rho}{\rho_0}, \\ h_{zz} &= -\lambda\varepsilon_{rr} - \lambda\varepsilon_{\varphi\varphi} - (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} - K \frac{\rho}{\rho_0}, \quad h_{rz} = -2\mu\varepsilon_{rz}, \end{aligned}$$

метрический тензор g_{ik} связан с тензором деформаций ε_{ik} соотношением $\varepsilon_{ik} = (\delta_{ik} - g_{ik})/2$, $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n)^T$ — вектор неизвестных функций (консервативные переменные), $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = (F_1(\mathbf{U}), F_2(\mathbf{U}), \dots, F_n(\mathbf{U}))^T$, $\mathbf{G}(\mathbf{U}) = (G_1(\mathbf{U}), G_2(\mathbf{U}), \dots, G_n(\mathbf{U}))^T$ — векторы потоков вдоль осей r и z соответственно, $\mathbf{S}(r, \mathbf{U}) = (S_1(r, \mathbf{U}), S_2(r, \mathbf{U}), \dots, S_n(r, \mathbf{U}))^T$ — вектор правых частей, потоки являются линейными комбинациями неизвестных функций. Определяющие уравнения принадлежат классу гиперболических законов сохранения. Последнее означает, что матрицы $A_1 = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}$, $A_2 = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}$ (т.е. $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = A_1 \mathbf{U}$, $\mathbf{G}(\mathbf{U}) = A_2 \mathbf{U}$) имеют вещественные собственные значения и базисы независимых собственных векторов.

Ниже излагается метод конечных разностей WENO/Рунге—Кутты высокой точности [Shu, 1997] для решения линейных систем гиперболических законов сохранения. В основании метода лежит известная разностная схема Годунова [Togo, 2009]. Рассмотрим численный метод решения системы (II.1) в прямоугольной области $(r, z) \in [R_1, R_2] \times [Z_1, Z_2]$. Разобьем данную область на ячейки $I_{ij} = [r_{i-1/2}, r_{i+1/2}] \times [z_{j-1/2}, z_{j+1/2}]$, где $r_i = R_1 + (i-1/2)h_r$, $r_{i\pm 1/2} = r_i \pm h_r$, $h_r = (R_2 - R_1)/N_r$, $z_i = Z_1 + (j-1/2)h_z$, $z_{j\pm 1/2} = z_j \pm h_z$, $h_z = (Z_2 - Z_1)/N_z$, где N_r, N_z — числа шагов разностной сетки вдоль осей r, z соответственно. Обозначим за \mathbf{U}_{ij} значения неизвестных функций, отнесенные к ячейке I_{ij} , предполагая эти значения постоянными в ячейке. Величины $\mathbf{U}_{i\pm 1/2, j}$, $\mathbf{U}_{i, j\pm 1/2}$ относятся к боковым граням ячейки I_{ij} . Разностная аппроксимация

уравнения (II.1) по пространству приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для каждого значения \mathbf{U}_{ij} :

$$\frac{d\mathbf{U}_{ij}}{dt} = -\frac{F(\mathbf{U}_{i+1/2,j}) - F(\mathbf{U}_{i-1/2,j})}{h_r} - \frac{G(\mathbf{U}_{i,j+1/2}) - G(\mathbf{U}_{i,j-1/2})}{h_z} + S(r, \mathbf{U}_{ij}). \quad (\text{II.2})$$

Данное уравнение, при условии, что указан способ вычисления потоков $F(\mathbf{U}_{i\pm 1/2,j})$, $G(\mathbf{U}_{i,j\pm 1/2})$, представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение для \mathbf{U}_{ij} , которое будет решаться численно методом Рунге—Кутты высокой точности.

Для устойчивости разностной схемы шаг по времени Δt выбирается в соответствии с формулой

$$\Delta t = C_{CFL} \times \min\left(\frac{h_r}{S_{ij}^r}, \frac{h_z}{S_{ij}^z}\right). \quad (\text{II.3})$$

Временной шаг (II.3) вычисляется на каждый новый момент времени, при этом минимум берется по всем точкам сетки, S_{ij}^r и S_{ij}^z — скорости самых быстрых звуковых волн в ячейке с номером ij , а C_{CFL} — число Куранта. Для устойчивости необходимо, чтобы $0 < C_{CFL} < 1/2$.

Ниже приведены используемые в статье формулы метода Рунге—Кутты четвертого порядка точности для уравнения

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = L(\mathbf{U}),$$

где оператор $L(\mathbf{U})$ обозначает правую часть в (II.2). Обозначим \mathbf{U}^n значение функции в момент времени t_n , \mathbf{U}^{n+1} — в момент времени t_{n+1} и $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Метод Рунге—Кутты четвертого порядка выражается формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(1)} &= \mathbf{U}^n + \frac{\Delta t}{2} L(\mathbf{U}^n), \\ \mathbf{U}^{(2)} &= \frac{1}{2} \mathbf{U}^n - \frac{1}{4} \Delta t L(\mathbf{U}^n) + \frac{1}{2} \mathbf{U}^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t L(\mathbf{U}^{(1)}), \\ \mathbf{U}^{(3)} &= \frac{1}{9} \mathbf{U}^n - \frac{1}{9} \Delta t L(\mathbf{U}^n) + \frac{2}{9} \mathbf{U}^{(1)} - \frac{1}{3} \Delta t L(\mathbf{U}^{(1)}) + \frac{2}{3} \mathbf{U}^{(2)} + \Delta t L(\mathbf{U}^{(2)}), \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \frac{1}{3} \mathbf{U}^n - \frac{1}{6} \Delta t L(\mathbf{U}^{(1)}) + \frac{1}{3} \mathbf{U}^{(2)} + \frac{1}{3} \mathbf{U}^{(3)} + \frac{1}{6} \Delta t L(\mathbf{U}^{(3)}). \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Для замыкания алгоритма, задаваемого формулой (II.2), необходимо сформулировать способ вычисления потоков на боковых гранях ячеек. Для этого используется конечно-разностный метод высокой точности WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) [Shu, 1997]. Идея метода: для вычисления потоков на гранях ячеек используются их приближения полиномами (реконструкция) с использованием значений потоков в соседних ячейках. Потоки в направлениях r и z вычисляются независимо на основе одномерных, однородных систем уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial A_1 \mathbf{U}}{\partial r} = 0, \quad (\text{II.5})$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial A_2 \mathbf{U}}{\partial z} = 0. \quad (\text{II.6})$$

Рассмотрим одномерную в направлении оси r систему (II.5). Для реконструкции потоков существуют разные методы, но основная идея заключается в расщеплении потока $\mathbf{F} = A_1 \mathbf{U}$ на сумму «положительного» \mathbf{F}^+ и «отрицательного» \mathbf{F}^- потоков, которые должны удовлетворять свойствам: $\partial \mathbf{F}^+ / \partial \mathbf{U} \geq 0$, $\partial \mathbf{F}^- / \partial \mathbf{U} \leq 0$. Будем применять такую процедуру для систем (II.5), (II.6), преобразованных к характеристическим переменным. Опишем алгоритм для системы (II.5), для системы (II.6) все делается аналогично. Пусть система (II.5) приводится к характеристической диагональной форме заменой переменных $\mathbf{U} = T \mathbf{V}$, где \mathbf{V} — вектор новых характеристических переменных, T — невырожденная матрица, приво-

дящая матрицу A_1 к виду: $A_1 = T^{-1}DT$, где D — диагональная матрица. В характеристических переменных \mathbf{V} (римановы инварианты) система (II.5) имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + D \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r} = 0. \quad (\text{II.7})$$

Предположим, что диагональная матрица D имеет структуру

$$D = \begin{pmatrix} D^+ & 0 \\ 0 & D^- \end{pmatrix},$$

где $D^+ \geq 0$, $D^- \leq 0$ — диагональные матрицы с положительными и отрицательными собственными значениями. В результате система (II.7) расщепляется на подсистемы

$$\frac{\partial \mathbf{V}^+}{\partial t} + D^+ \frac{\partial \mathbf{V}^+}{\partial r} = 0, \quad (\text{II.8})$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}^-}{\partial t} + D^- \frac{\partial \mathbf{V}^-}{\partial r} = 0. \quad (\text{II.9})$$

Для вычисления потока $\mathbf{V}_{i+1/2}$ на боковой грани ячейки I_{ij} при $r_{i+1/2}$ используются значения характеристических переменных, вычисленные с помощью WENO полиномиальной реконструкции для «левых» $\mathbf{V}_{i+1/2}^+$ и «правых» $\mathbf{V}_{i+1/2}^-$ значений. Процедура реконструкции описана ниже. Далее по известным значениям $\mathbf{V}_{i+1/2}^+$ и $\mathbf{V}_{i+1/2}^-$ восстанавливается поток \mathbf{F} :

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = A_1 \mathbf{U}_{i+1/2} = A_1 T \mathbf{V}_{i+1/2}, \quad \text{где } \mathbf{V}_{i+1/2} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{i+1/2}^+ \\ \mathbf{V}_{i+1/2}^- \end{pmatrix}.$$

Опишем упомянутый выше алгоритм вычисления потоков на границах расчетных ячеек с помощью WENO полиномиальной реконструкции характеристических переменных \mathbf{V}^+ и \mathbf{V}^- . Рассмотрим для простоты скалярное уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F(w)}{\partial r} = 0, \quad (\text{II.10})$$

где $F = A w$, A — константа (положительная или отрицательная), и для него опишем WENO алгоритм конечных разностей, который прямо может быть применен к построению алгоритма для векторных уравнений (II.8), (II.9). Пусть счетная область $[R_1, R_2]$ разбита на счетные ячейки $I_i = [r_{i-1/2}, r_{i+1/2}]$, $i = 1, \dots, N_r$. Предположим, что известны значения $F_i = F(w(r_i))$, отнесенные к серединам ячеек $r_i = (r_{i-1/2} + r_{i+1/2})/2$. WENO метод конечных разностей для (II.10) основан на аппроксимации производной с нужным порядком точности. Задача реконструкции в этом случае заключается в следующем: следует найти значения $\tilde{F}_{i+1/2} = \tilde{F}(F_{i-m}, \dots, F_{i+n})$ (где числа m и n определяют так называемый шаблон реконструкции), так чтобы

$$\frac{\tilde{F}_{i+1/2} - \tilde{F}_{i-1/2}}{\Delta r} = f'(w(r_i)) + O(\Delta r^k), \quad (\text{II.11})$$

т.е. аппроксимация производной имела требуемый порядок точности k . Ниже описана WENO реконструкция, обеспечивающая **пятый порядок точности** для аппроксимации (II.11).

Рассмотрим счетную ячейку $I_i = [r_{i-1/2}, r_{i+1/2}]$. Внутри ячейки определим «правые» и «левые» величины, которые должны быть получены с помощью реконструкции

$$F_{i-1/2}^R = f(r_{i-1/2} + 0), \quad F_{i+1/2}^L = f(r_{i+1/2} - 0).$$

Ниже приводятся формулы для вычисления этих величин. Для реконструкции используются шаблоны $S_0 = (i, i+1, i+2)$, $S_1 = (i-1, i, i+1)$, $S_2 = (i-2, i-1, i)$. Индикаторы гладкости вычисляются по формулам [Shu, 1997]

$$\beta_0 = \frac{13}{12}(F_i - 2F_{i+1} + F_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3F_i - 4F_{i+1} + F_{i+2})^2,$$

$$\beta_1 = \frac{13}{12}(F_{i-1} - 2F_i + F_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(F_{i-1} - F_{i+1})^2,$$

$$\beta_2 = \frac{13}{12}(F_{i-2} - 2F_{i-1} + F_i)^2 + \frac{1}{4}(F_{i-2} - 4F_{i-1} + 3F_i)^2.$$

Далее определяются нелинейные весовые коэффициенты:

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad \alpha_k = \frac{d_k}{(\varepsilon + \beta_k)^2}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Константа ε введена для того, чтобы избежать деления на ноль при $\beta_k = 0$, и обычно выбирается $\varepsilon = 10^{-6}$. Оптимальные весовые коэффициенты d_0, d_1, d_2 для «правых» величин такие: $d_0 = 1/10, d_1 = 3/5, d_2 = 3/10$. Сами «правые» величины вычисляются по формулам [Shu, 1997]

$$F_{i-1/2}^R = \frac{1}{6}\omega_0(2F_{i+2} - 7F_{i+1} + 11F_i) + \frac{1}{6}\omega_1(-F_{i+1} + 5F_i + 2F_{i-1}) + \frac{1}{6}\omega_2(-F_{i-2} + 5F_{i-1} + 2F_i). \quad (\text{II.12})$$

Для «левых» величин соответственно имеем $d_0 = 3/10, d_1 = 3/5, d_2 = 1/10$,

$$F_{i+1/2}^L = \frac{1}{6}\omega_0(-F_{i+2} + 5F_{i+1} + 2F_i) + \frac{1}{6}\omega_1(-F_{i-1} + 5F_i + 2F_{i+1}) + \frac{1}{6}\omega_2(2F_{i-2} - 7F_{i-1} + 11F_i). \quad (\text{II.13})$$

Таким образом, получаем два набора потоков $F_{i+1/2}^L$ и $F_{i+1/2}^R$ соответственно слева и справа на каждой грани ячейки во всех внутренних ячейках расчетной области. Граничные ячейки должны обрабатываться отдельно с учетом граничных условий. Тем не менее, поскольку в формулах (II.12), (II.13) используются ячейки с номерами, выходящими за пределы нумерации внутренних точек, вводятся дополнительные приграничные ячейки с «бесконечными», точнее очень большими, значениями F_i следующим образом: $F_{-i} = (10(i+1))^{10}, i = 0, 1, 2; F_{N+i} = (10i)^{10}, i = 1, 2, 3$. Определенные таким образом дополнительные значения F обеспечивают единообразную реконструкцию потоков для всех внутренних точек, обрезая большие искусственные значения за счет нелинейных весовых коэффициентов ω , но тем не менее обеспечивая нужный порядок аппроксимации. Выбор потока на грани $i + 1/2$ зависит от знака коэффициента A в потоке уравнения (II.10): $F_{i+1/2} = F^+ = F_{i+1/2}^L$, если $A \geq 0, F_{i+1/2} = F^- = F_{i+3/2}^R$, если $A \leq 0$. Вместо реконструкции потоков можно производить реконструкцию переменной w , поскольку $F = Aw$.

Вычисление вектора потоков для системы (II.7), записанной в характеристических переменных, производится точно так же, как описано выше для скалярного уравнения. При этом, как было отмечено, реконструкцию можно производить для характеристических переменных. Таким образом, $V_{i+1/2}^+ = V_{i+1/2}^L$, если $D^+ \geq 0, V_{i+1/2}^- = V_{i+3/2}^R$, если $D^- \leq 0$. Вычисление потоков в граничных ячейках осуществляется с помощью значений реконструированных характеристических переменных V , приходящих на границу, а также граничных условий. Например, для вычисления потока на грани $r_{1/2}$ в ячейке $I_1 = [r_{1/2}, r_{3/2}]$ необходимо использовать значения характеристических переменных $V_{1/2}^- = V_{1/2}^R$, дополненных граничными условиями, представляющими собой систему линейных алгебраических уравнений. Выше был описан алгоритм вычисления потоков вдоль оси r . Потоки вдоль оси z вычисляются аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

- Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., Наука, 1974, 296 с.
- Доровский В.Н.** Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика, 1989 (7), с. 39—45.
- Доровский В.Н., Перепечко Ю.В.** Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями // ПМТФ, 1992, № 3, с. 56—62.
- Френкель Я.И.** К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. география и геофизика. 1944, т. 8, № 4, с. 133—146.
- Biot M.A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, part I, II // J. Acoust. Soc. Amer., 1956, v. 28, p. 168—191.
- Blokhin A.M., Dorovsky V.N.** Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. New York, Nova Science Publishers Inc., 1995, 192 p.
- Dorovsky V.N., Perepechko Yu.V., Romensky E.I.** Godunov's scheme for the analysis of the nonlinear wave process in the two-velocity media with elastic interaction // Advances in Computational Methods in Fluid Dynamics. ASME. 1994, FED, v. 196, p. 355—366.
- Plona T.** Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies // Appl. Phys. Lett., 1980, v. 36, p. 259—261.

Shu C.W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. NASA/CR-97-206253, 1997, ICASE report № 97-65, 78 p.

Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. 3rd ed., Springer, 2009, 724 p.

Xianyun W., Hezhu Y. Method for determining reservoir permeability from borehole Stoneley-wave attenuation using Biot's poroelastic theory. 2007, Patent № WO/2007/001746, 47 p.

*Рекомендована к печати 7 октября 2010 г.
М.И. Эповым*

*Поступила в редакцию 9 апреля 2010 г.,
после доработки — 21 сентября 2010 г.*

