

УДК 532.545

О МЕХАНИЗМАХ РАЗВИТИЯ ДОННЫХ ВОЛН В КАНАЛЕ С ПЕСЧАНЫМ ДНОМ

А. Г. Петров, И. И. Потапов*

Институт прикладной механики РАН, 119526 Москва

* Вычислительный центр ДВО РАН, 680000 Хабаровск

E-mails: petrov@ipmnet.ru, potapovII@rambler.ru

Развивается предложенная ранее теория движения наносов, увлекаемых потоком жидкости. С помощью формулы для расхода наносов, учитывающей влияние возмущений свободной поверхности на перенос наносов и обобщенной на двумерный случай, получена плановая система уравнений для донных возмущений. Определены зависимости длин продольных и поперечных волн с максимально быстро растущей амплитудой и скорости их движения от числа Фруда. Выявлено влияние макротурбулентной вязкости потока и поверхностных волн на процесс генерации донных волн.

Ключевые слова: русловые процессы, наносы, увлекаемые потоком жидкости, активный придонный слой, донные волны, устойчивость русла.

Введение. Взаимодействие в русле двух сред: движущейся воды и несвязного донного грунта — приводит к возникновению различных волновых движений как самого водного потока, так и донного грунта, по которому он движется.

Изучению донных волн посвящено большое количество работ [1–4]. Анализ этих работ показывает, что при изучении грядового рельефа, как правило, используются два подхода. В первом подходе существование донных волн объясняется макротурбулентностью потока [5, 6], во втором — наличием в потоке периодических движений жидкости — поверхностных волн [3, 7–9].

Известные попытки [2, 10–13] объединить различные предположения о причинах появления гряд основываются на качественном рассмотрении процесса и поэтому являются недостаточно убедительными. Следует отметить, что основной проблемой, возникающей при исследовании донных волн, является эмпиричность выбранных уравнений, описывающих донные деформации, а часто и невозможность учета в них физико-механических свойств донного материала и формы донного рельефа [1].

В настоящей работе предпринята попытка объяснения формирования волновых возмущений различного типа на основе уравнения русловых деформаций, предложенного в работах [14–16]. Особенность данного уравнения заключается в том, что оно выведено аналитически из уравнений движения двухфазного активного придонного слоя в случае геометрически сложного донного рельефа и не содержит феноменологические параметры. В полученном в настоящей работе обобщенном уравнении русловых деформаций учитываются оба возможных механизма генерации донных возмущений: влияние возмущений

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-99035 р-офи) и в рамках аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (код проекта 2.1.1/3604).

свободной поверхности на перенос наносов и турбулентная диффузия (в гидродинамических уравнениях).

1. Уравнение планового движения гидродинамического потока. Используются следующие уравнения движения речного потока [1, 14–16]:

$$\begin{aligned} U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} &= -\frac{T_x}{\rho_w H} + g \left(J - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \nu_t \Delta U_x, \\ U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} &= -\frac{T_y}{\rho_w H} + g \left(-\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \nu_t \Delta U_y, \\ \frac{\partial H U_x}{\partial x} + \frac{\partial H U_y}{\partial y} &= 0, \\ T_x &= \rho_w \lambda U_x \sqrt{U_x^2 + U_y^2}, \quad T_y = \rho_w \lambda U_y \sqrt{U_x^2 + U_y^2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь U_x, U_y — компоненты вектора скорости потока; T_x, T_y — касательные напряжения на дне канала; $H = \eta + h - \zeta$ — глубина потока; ζ — отметка дна; $\eta + h$ — отметка свободной поверхности; h — средняя глубина канала; ρ_w — плотность воды; g — ускорение свободного падения; J — средний уклон свободной поверхности потока; $\nu_t = \nu_q h U$ — турбулентная вязкость [1]; ν_q — безразмерная константа; λ — коэффициент гидравлического сопротивления.

2. Краевая задача для смеси, движущейся в активном слое. Для замыкания системы уравнений гидродинамики требуется определить расходы G_x и G_y частиц песка через поперечные сечения $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ соответственно. В основном перенос частиц песка происходит в тонком придонном слое [1]. В работе [17] предложена модель движения водогрунтовой смеси в тонком придонном слое

$$\frac{\partial p}{\partial m} = \rho g, \quad \rho = f \rho_s + (1 - f) \rho_w; \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_i}{\partial m} = 0, \quad i = 1, 2; \quad (2.2)$$

$$\tau_i = -\tau(m) \frac{\partial w_i}{\partial m} / \left| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial m} \right|, \quad \tau(m) = \tau_s(m) + \tau_w(m), \quad i = 1, 2; \quad (2.3)$$

$$\tau_w(m) = \rho_w \kappa^2 (a - m)^2 \left| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial m} \right|^2, \quad \tau_s(m) = f(\rho_s - \rho_w) g m \operatorname{tg} \varphi. \quad (2.4)$$

Здесь ρ — плотность смеси твердых частиц и жидкости; ρ_s — плотность песка; κ — постоянная Кармана; $x_1 = x$, $x_2 = y$ — плановые координаты; τ_i, w_i — компоненты векторов касательного напряжения τ и скорости смеси \mathbf{w} ; φ — угол внутреннего трения песка; f — объемная концентрация твердых частиц; координата m , направленная вертикально вниз, отсчитывается от верхней границы активного слоя: $m = 0$ на верхней границе $z = \zeta(x, t)$ и $m = a$ на нижней границе (рис. 1).

Касательное напряжение смеси $\tau(m)$ представляет собой сумму касательных напряжений жидкой $\tau_w(m)$ и твердой $\tau_s(m)$ фаз, для которых приняты соответственно закон Прандтля для турбулентного течения и закон трения Кулона.

Краевые условия можно получить из условия непрерывности скорости и напряжения в результате следующих рассуждений [14]. На верхней границе слоя твердые частицы оказываются во взвешенном состоянии, при этом $\tau_s = 0$. Толщина слоя a мала, поэтому ею можно пренебречь. Следовательно, величина $\tau(0)$ такая же, как для чистой жидкости на

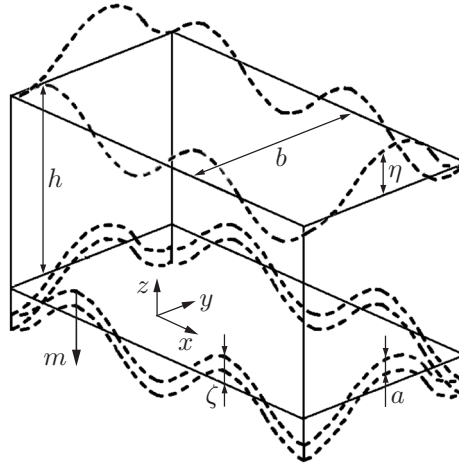


Рис. 1. Расчетная область

дне, и вычисляется из решения гидродинамической задачи (в отсутствие твердых частиц). Отсюда при $m = 0$ получаем граничные условия

$$\tau_i(0) = T_i; \tag{2.5}$$

$$p(0) = p^0 = \rho_w g(\eta + h - \zeta), \tag{2.6}$$

где p^0 — давление на поверхности $z = \zeta$, найденное из решения задачи гидростатики.

При $m \geq a$ среда покоится: $w(a) = 0$, касательное напряжение не превышает кулоновского трения: $\tau \leq p_s \operatorname{tg} \varphi$. В движущейся среде ($m < a$) согласно реологическому закону (2.3) $\tau = p_s \operatorname{tg} \varphi + \tau_w$, причем $\tau_w \geq 0$. Непрерывность τ в точке $z = a$ возможна только при условии $\tau_w = 0$. Таким образом, получаем условие

$$\tau(a) = \tau_s(a) = p_s \operatorname{tg} \varphi, \quad p_s = f(\rho_s - \rho_w)ga \tag{2.7}$$

и условие прилипания

$$w_i(a) = 0.$$

Условие (2.7) рассматривалось в работах [17, 18] в качестве критерия начала движения частиц на нижней границе активного слоя.

3. Расчет вектора расхода твердых частиц в активном слое. Из краевой задачи (2.1)–(2.6) можно получить компоненты вектора расхода твердых частиц в активном слое.

Из уравнения (2.1) и условия (2.6) следуют выражения для давления p в активном слое и его производной:

$$p = \rho_w g(\eta + h - \zeta) + m\rho g, \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho_w g \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right).$$

Из этих выражений с помощью уравнения (2.3) находим

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial m} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} = -f(\rho_s - \rho_w)g \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \frac{1}{s} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right), \tag{3.1}$$

где

$$s = f\gamma, \quad \gamma = (\rho_s - \rho_w)/\rho_w. \tag{3.2}$$

Интегрируя по m уравнение (3.1) с учетом граничного условия (2.7), получаем распределение касательного напряжения по толщине активного слоя

$$\tau_i(m) = T_i + \frac{\partial \tau_i}{\partial m} m, \quad \tau(m) = \sqrt{\tau_1^2(m) + \tau_2^2(m)} \tag{3.3}$$

($T_1 = T_x, T_2 = T_y$ — компоненты вектора касательных напряжений на донной поверхности).

Толщина активного слоя a определяется из уравнения

$$\tau(a) = f(\rho_s - \rho_w)ga \operatorname{tg} \varphi, \quad (3.4)$$

которое следует из граничного условия (2.7). С помощью формулы (2.3) находим распределение касательного напряжения в жидкой фазе

$$\tau_w(m) = \tau(m) - f(\rho_s - \rho_w)gm \operatorname{tg} \varphi, \quad (3.5)$$

а с помощью (2.4) — распределение производной вектора скорости по толщине активного слоя

$$\left| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial m} \right| = \frac{\sqrt{\tau_w / \rho_w}}{\varkappa(a - m)}, \quad \frac{\partial w_i}{\partial m} = - \left| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial m} \right| \frac{\tau_i(m)}{\tau(m)}. \quad (3.6)$$

В работе [14] показано, что величина расхода G_i слабо зависит (а в ряде случаев не зависит [19]) от характера распределения концентрации твердых частиц f по толщине активного слоя, поэтому значение параметра f можно принять постоянным. В этом случае удельный массовый расход наносов можно рассчитать с помощью интегрирования по частям, аналогично тому как это выполнено в работе [17]:

$$G_i = \rho_s f \int_0^a w_i dm = -\rho_s f \int_0^a m \frac{\partial w_i}{\partial m} dm. \quad (3.7)$$

4. Расчет вектора расхода твердых частиц в линейном приближении. Рассмотрим течение жидкости со скоростью U в прямоугольном канале с ровным дном ($\zeta = 0$, $\eta = 0$). В соответствии с уравнениями (1.1) имеем $T_x = \rho_w \lambda U^2$, $T_y = 0$, $T_x = \rho_w ghJ$. Это решение будем считать основным порождающим решением. Введем возмущения поля скорости $U_x = U + u$, $U_y = v$, донной поверхности ζ и свободной поверхности η . Удерживая в выражении для касательного напряжения на дне канала только линейные по возмущениям u , v , ζ , η члены, получаем

$$T_x = \rho_w \lambda U^2 (1 + 2u/U), \quad T_y = \rho_w \lambda U^2 (v/U).$$

В линейном приближении формулы (3.1)–(3.6) принимают вид

$$\begin{aligned} a &= \frac{\lambda U^2}{f \gamma g \operatorname{tg} \varphi} \left(1 + \frac{2u}{U} - \operatorname{ctg} \varphi \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{s} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right), \\ \tau(m) = \tau_1(m) &= \rho_w \lambda U^2 \left(1 + \frac{2u}{U} - \operatorname{ctg} \varphi \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{s} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{m}{a} \right), \\ \tau_2(m) &= \rho_w \lambda U^2 \left(\frac{v}{U} - \operatorname{ctg} \varphi \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{s} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{m}{a} \right), \\ \tau_w(m) &= \rho_w \lambda U^2 (1 + 2u/U) (1 - m/a). \end{aligned}$$

Из последней формулы с помощью (2.3), (2.4) получаем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial w_1}{\partial m} &= \frac{U \sqrt{\lambda}}{\varkappa a \sqrt{1 - m/a}} \left(1 + \frac{u}{U} \right), \\ -\frac{\partial w_2}{\partial m} &= \frac{U \sqrt{\lambda}}{\varkappa a \sqrt{1 - m/a}} \left(\frac{v}{U} - \operatorname{ctg} \varphi \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{s} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{m}{a} \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для вычисления интегралов в (3.7) используем формулы

$$\int_0^a \frac{m dm}{a \sqrt{1 - m/a}} = \frac{4}{3} a, \quad \int_0^a \frac{m^2 dm}{a \sqrt{1 - m/a}} = \frac{16}{15} a^2.$$

Подставив в выражения (3.6) формулы (4.1), с помощью вычисленных интегралов найдем компоненты вектора расхода

$$\begin{aligned} G_x &= G_0 \left(\operatorname{tg} \varphi \left(1 + \frac{3u}{U} \right) - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{s} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right), \\ G_y &= G_0 \left(\operatorname{tg} \varphi \frac{v}{U} - \frac{4}{5} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{s} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$G_0 = \frac{4}{3} \frac{\rho_s \lambda^{3/2} U^3}{\varkappa \gamma g \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Из (4.2) получаем выражение для дивергенции вектора \mathbf{G}

$$\frac{\operatorname{div} \mathbf{G}}{G_0} = \frac{1}{G_0} \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \right) = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{U} \left(3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) - \frac{4}{5} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right).$$

Подставляя (4.2) в уравнение сохранения песчаной массы

$$(1 - \varepsilon) \rho_s \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{G} = 0 \quad (4.3)$$

(ε — коэффициент пористости песчаного дна), находим уравнение деформаций донной поверхности.

Формулы для расхода наносов (4.2) и полученное из них уравнение для отметки дна (4.3) подтверждаются многочисленными экспериментальными данными. В случае ровного дна из (4.2) следует известная эмпирическая формула Меер-Петера — Мюллера (см. [1]). Выражение для поперечной составляющей вектора расхода наносов в (4.2) и уравнение (4.3), описывающие процесс эрозии в канале постоянного сечения с откосом, подтверждаются экспериментальными данными, полученными в работах [14, 17].

5. Линейная задача развития донных возмущений с использованием уточненной формулы расхода наносов. Следуя модели Колландера [1], в случае невозмущенного движения примем следующие допущения: компоненты осевой и поперечной скоростей равны $U_1 = U$, $U_2 = 0$, глубина потока постоянная: $H = h$, свободная поверхность потока является невозмущенной: $\eta = 0$, условие для касательных напряжений на дне имеет вид

$$\tau_1 = \rho_w \lambda U^2 = \rho_w g h J, \quad \tau_2 = 0. \quad (5.1)$$

Возмущенное движение определяется равенствами

$$U_1 = U + u, \quad U_2 = v, \quad H = h + \eta - \zeta, \quad (5.2)$$

где u, v — возмущения осевой и поперечной скоростей потока; η, ζ — возмущения свободной и донной поверхностей потока.

Линеаризуя с помощью (5.1), (5.2) уравнения (1.1), (3.1), получаем систему уравнений для малых возмущений донной и свободной поверхностей

$$\frac{U}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \nu_q \frac{Uh}{g} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad \frac{U}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} = \nu_q \frac{Uh}{g} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \quad (5.3)$$

$$\frac{h}{U} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = 0; \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = C_0 \text{Fr}^{3/2} h^2 \sqrt{\frac{g}{h}} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\text{tg } \varphi}{U} \left(3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{4}{5} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \right); \quad (5.5)$$

$$C_0 = \frac{4\lambda^{3/2}}{3\kappa\gamma \text{tg}^2 \varphi (1 - \varepsilon)}, \quad (5.6)$$

где $\text{Fr} = U^2/(gh)$ — число Фруда для невозмущенного потока.

Из результатов численных расчетов следует, что слагаемые в уравнениях (5.3), содержащие множитель λ , малы и ими можно пренебречь.

Подставляя в уравнения (5.3)–(5.5) возмущения в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0 U \cos(k_y y) \exp(\sigma t + ik_x x), & v &= v_0 U \sin(k_y y) \exp(\sigma t + ik_x x), \\ \eta &= \eta_0 h \cos(k_y y) \exp(\sigma t + ik_x x), & \zeta &= \zeta_0 h \cos(k_y y) \exp(\sigma t + ik_x x), \end{aligned}$$

получаем систему линейных уравнений для безразмерных амплитудных коэффициентов $u_0, v_0, \eta_0, \zeta_0$

$$\begin{aligned} \text{Fr}(Xi + B)u_0 + (Xi)\eta_0 &= 0, \\ \text{Fr}(Xi + B)v_0 - (Y)\eta_0 &= 0, \\ (X)u_0 + (Y)v_0 + (X)\eta_0 - (X)\zeta_0 &= 0, \\ (CXsi)u_0 + (CYs/3)v_0 + (A)\eta_0 + s(A + \Sigma)\zeta_0 &= 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где

$$\begin{aligned} X &= hk_x, & Y &= hk_y, & \Sigma &= \frac{5\sigma}{C_0 \text{Fr}^{3/2}} \sqrt{\frac{h}{g}}, \\ A &= 5X^2 + 4Y^2, & B &= \nu_q(X^2 + Y^2), & C &= 15 \text{tg } \varphi. \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю определитель однородной системы (5.7), находим дисперсионное соотношение в виде зависимости Σ от безразмерных волновых чисел X, Y :

$$\Sigma(X, Y) = \text{Re}(\Sigma) + i \text{Im}(\Sigma).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \text{Re}(\Sigma) &= -A - \text{Fr} X^2 \frac{sCB(3X^2 + Y^2) + 3A(\text{Fr} B^2 - Y^2 - (1 - \text{Fr})X^2)}{3sZ}, \\ \text{Im}(\Sigma) &= -X \frac{sC(3X^2 + Y^2)((1 - \text{Fr})X^2 + Y^2) + 3AB \text{Fr}(X^2 + Y^2)}{3sZ}, \\ Z &= ((1 - \text{Fr})X^2 + Y^2)^2 + B^2 \text{Fr}^2 X^2. \end{aligned}$$

6. Формы донного рельефа. Следуя работе [1], будем полагать, что реализуются донные волны с волновыми числами, для которых скорость роста амплитуды $\text{Re}(\Sigma)$ имеет максимум, определяемый двумя уравнениями

$$\frac{\partial \text{Re}(\Sigma)}{\partial X} = X F_1(X, Y) = 0, \quad \frac{\partial \text{Re}(\Sigma)}{\partial Y} = Y F_2(X, Y) = 0. \quad (6.1)$$

При малых числах Фруда для функции F_2 справедливо неравенство

$$F_2 = Y^4 + Y^2 X^2 + X^4 \left(1 + \frac{\text{Fr}}{4s} - \frac{\nu_q C \text{Fr}}{6} \right) + O(\text{Fr}^2) > 0.$$

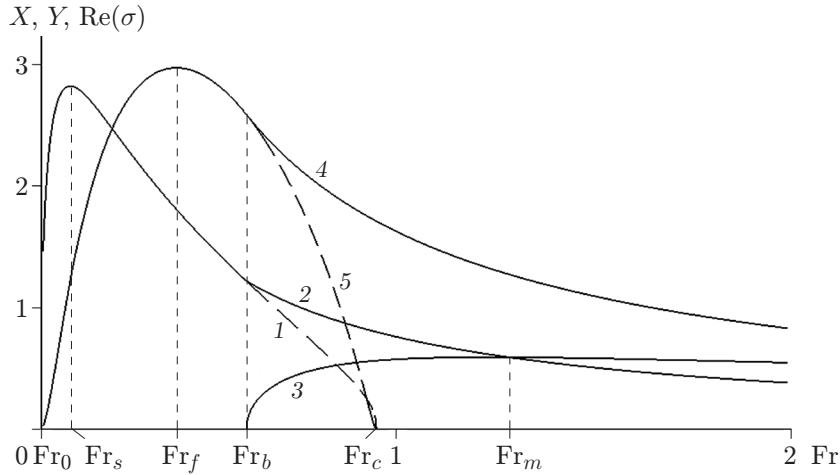


Рис. 2. Зависимость безразмерных волновых чисел X , Y и $\text{Re}(\sigma)$ от числа Фруда: 1 — зависимость $X(\text{Fr})$ для одномерного потока; 2, 3 — зависимости $X(\text{Fr})$, $Y(\text{Fr})$ для двумерного потока; 4, 5 — амплитуды роста $\text{Re}(\sigma)$ двумерных и одномерных донных волн соответственно

Поэтому при малых числах Фруда единственным действительным решением системы (6.1) является пара чисел

$$X = \frac{1}{\nu_q \text{Fr}} \sqrt{(1 - \text{Fr}) \sqrt{\frac{1 - m \text{Fr}}{1 + s}} - (1 - \text{Fr})^2}, \quad Y = 0, \quad (6.2)$$

где X — корень уравнения $F_1(X, 0) = 0$; $m = 1 + 3\nu_q \text{tg } \varphi s$.

Зависимость $X(\text{Fr})$ (6.2) при $\nu_q = 0,1$, $s = 0,1$, $\text{tg } \varphi = 1/2$ представлена на рис. 2 (кривая 1). Функция $X(\text{Fr})$ принимает максимальное значение в точке Fr_s и определяет семейство одномерных плоских волн при значениях числа Фруда в интервале $\text{Fr}_0 < \text{Fr} < \text{Fr}_b$ и длинах волн

$$l = \frac{2\pi h}{X} = \frac{2\pi h \nu_q \text{Fr}}{\sqrt{(1 - \text{Fr}) \sqrt{(1 - m \text{Fr})/(1 + s)} - (1 - \text{Fr})^2}} \quad (6.3)$$

($\text{Fr}_0 \approx s$; $\text{Fr}_s \approx 2s$).

При исследовании зависимостей (6.2), (6.3) необходимо учитывать как макротурбулентную вязкость потока (параметр ν_q), так и периодические движения жидкости в потоке (параметр s), поскольку оба эти явления оказывают существенное влияние на процесс переноса наносов в активном придонном слое.

Равнинным речным потокам, переносящим песок и мелкий гравий, как правило, соответствуют числа Фруда $\text{Fr} = 0,01 \div 0,10$, для переноса песка и мелкого гравия в лабораторных лотках требуется течение, которому соответствуют числа Фруда $\text{Fr} = 0,05 \div 0,20$ [1]. Следовательно, представляет интерес асимптотическое разложение решения (6.3) по малому параметру Fr :

$$l = Kh. \quad (6.4)$$

Здесь

$$K = 2\sqrt{2}\pi \frac{\nu_q \text{Fr}}{\sqrt{\text{Fr} - sm}} = 2\sqrt{2}\pi \frac{\nu_q J}{\sqrt{\lambda(J - sm\lambda)}}.$$

Формула (6.4) аналогична ряду известных эмпирических зависимостей [20], например формулам Б. Ф. Снисченко и З. Д. Копалиани

$$l = 4,2h, \quad (6.5)$$

К. В. Гришанина

$$l = (2/\lambda)^{1/3}h, \quad (6.6)$$

А. В. Караушева

$$l = 0,44\sqrt{1,4/\lambda + \sqrt{2/(g\lambda)}}h. \quad (6.7)$$

Так как при заданных выше характерных параметрах s , ν_q , φ и числе Фруда $\text{Fr} \simeq sm$ диапазон значений коэффициента K в формуле (6.4) включает весь диапазон значений эмпирических множителей при h , можно предположить, что формула (6.4) является обобщением формул (6.5)–(6.7).

В случае выполнения условия $\text{Fr} \gg sm$ зависимость (6.4) можно представить в виде

$$l = K_s U \sqrt{h/g}, \quad (6.8)$$

где $K_s = 2\sqrt{2}\pi\nu_q$. При значениях скорости потока, существенно превышающих скорость начала движения частиц, формула (6.8) согласуется с формулой, полученной в работе [21]:

$$l = C_s(\gamma g d^3/\nu^2)^{0,1} U \sqrt{h/g}.$$

Здесь C_s — экспериментально определяемый параметр; d — диаметр частиц; ν — вязкость жидкости.

В точке бифуркации $\text{Fr} = \text{Fr}_b$ от рассмотренного семейства ответвляется семейство донных волн с волновым числом $Y > 0$. Значение Fr_b можно найти, подставляя зависимость $X(\text{Fr})$ (6.2) в уравнение $F_2(X, 0) = 0$, которое сводится к кубическому уравнению

$$a_0 \text{Fr}_b^3 + a_1 \text{Fr}_b^2 + a_2 \text{Fr}_b + a_3 = 0, \quad (6.9)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= 36m(1+s), & a_1 &= f^2 - 12(1+s)(3-4m), \\ a_2 &= -8(f+2(1+s)(3-m)), & a_3 &= -16s, & f &= -10 \text{tg } \varphi \nu_q s - 1. \end{aligned}$$

Положительный корень кубического уравнения (6.9) является искомой точкой бифуркации $\text{Fr} = \text{Fr}_b$.

Значениям $\text{Fr} \geq \text{Fr}_b$ соответствует семейство двумерных волн (кривые 2, 3 на рис. 2). Амплитуда роста этих волн (кривая 4) выше амплитуды роста одномерных волн (штриховая кривая 5).

При $\text{Fr} > \text{Fr}_c$ амплитуда роста одномерной волны $\sigma_r(\text{Fr})$ становится отрицательной — происходит смыв одномерных донных возмущений:

$$\text{Fr}_c = 1 - \frac{m - \sqrt{(1 - 3s \text{tg } \varphi \nu_q)^2 + 12s^2 \text{tg } \varphi \nu_q}}{2(1+s)}.$$

Скорость роста двумерных донных волн максимальна при числе Фруда

$$\text{Fr}_f = 2(\sqrt{s(1+s)} - s)/m.$$

Расчет волновых чисел X , Y при различных значениях параметров руслового потока показал, что величина волнового числа поперечных возмущений Y всегда ограничена и имеет максимальное значение при равенстве волновых чисел $X(\text{Fr}_m) = Y(\text{Fr}_m)$. Число

Фруда Fr_m и зависимость $Y_{\max} = Y(Fr_m)$ можно найти из уравнений (6.1), подставляя в них $X^2 = Y^2 = W$. В результате имеем два квадратных уравнения $a_i(Fr)W^2 + b_i(Fr)W + c_i(Fr) = 0$, $i = 1, 2$ с коэффициентами, зависящими от числа Фруда.

Исключая из полученной системы уравнений переменную W , находим результат двух полиномов [22], который с точностью до членов второго порядка по s имеет вид

$$b_0 Fr^4 + b_1 Fr^3 + b_2 Fr^2 + b_3 Fr + b_4 = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} b_0 &= 50(40\nu_q s \operatorname{tg} \varphi + 18s + 9), & b_1 &= 2600\nu_q s \operatorname{tg} \varphi - 711s - 351, \\ b_2 &= 2(-2260\nu_q s \operatorname{tg} \varphi - 2673s - 1269), & b_3 &= 64(-170\nu_q s \operatorname{tg} \varphi + 63s + 45), & b_4 &= 4608s. \end{aligned}$$

Минимальный корень полученного результата является искомым значением Fr_m :

$$Fr_m \approx \frac{32}{25} \left(1 + \left(\frac{27}{28} - \frac{462}{5} \nu_q \operatorname{tg} \varphi \right) s \right).$$

Подставляя это значение Fr_m в одно из уравнений $a_i(Fr_m)W^2 + b_i(Fr_m)W + c_i(Fr_m) = 0$, $i = 1, 2$, находим приближенное значение W . Тогда

$$Y_{\max} = \sqrt{W} \approx 1,39s \operatorname{tg} \varphi + \frac{0,67 - 0,59s}{\nu_q}. \quad (6.10)$$

Выражение (6.10) позволяет оценить максимально допустимую моду n , реализующуюся в канале шириной b и глубиной h . Из условия $Y = n\pi h/b < Y_{\max}$ находим

$$n < \frac{bY_{\max}}{\pi h} \approx \frac{0,2b}{\nu_q h}.$$

7. Определение скорости движения донных возмущений. Определим скорость движения вдоль оси X донных возмущений:

$$V_x = -\frac{\operatorname{Im}(\sigma)}{k_x} = C_0 \sqrt{gh} Fr^{3/2} \frac{5s \operatorname{tg} \varphi (3X^2 + Y^2) ((1 - Fr)X^2 + Y^2) + AB Fr (X^2 + Y^2)}{sZ}. \quad (7.1)$$

При малых числах Фруда, когда реализуются одномерные волны $Y = 0$, из формул (5.7), (7.1) можно получить выражение для скорости донного возмущения, совпадающее с аналогичным выражением для одномерного случая [19]:

$$V_x = \frac{4\lambda^{3/2}}{\gamma\kappa(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \varphi} U Fr. \quad (7.2)$$

Из формулы (7.2) следует, что при малых числах Фруда скорость распространения донных волн не зависит от макротурбулентной вязкости потока и движения свободной поверхности жидкости (от параметров ν_q , s). Основными параметрами, оказывающими влияние на этот процесс, являются плотность частиц, угол их внутреннего трения и коэффициент гидравлического сопротивления.

В случае

$$\frac{4\lambda^{3/2}}{\gamma\kappa(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \varphi} = 0,0188 \quad (7.3)$$

асимптотическая формула (7.2), справедливая при значениях скорости потока, существенно превышающих скорость начала движения частиц, совпадает с известной формулой [23]

$$V_x = 0,0188U Fr, \quad (7.4)$$

результаты расчета по которой согласуются с многочисленными экспериментальными данными [24]. Заметим, что равенство (7.3) выполняется при стандартных средних значениях физико-механических параметров донного материала $\operatorname{tg} \varphi = 0,5$, $\gamma = 1$, $\varepsilon = 0,4$, $\varkappa = 0,4$, $\lambda = 0,0068$. Однако очевидно, что в реальных потоках значения физико-механических параметров (которые часто даже не фиксируются в экспериментах) могут существенно изменяться, что приводит к существенным отклонениям от эмпирической зависимости (7.4).

Для наиболее коротких поперечных длин волн выполняется условие $X = Y$. В этом случае компоненты скорости движения донных возмущений равны:

$$V_x = |V_y| \approx C_0 \sqrt{gh} \frac{0,88s + 0,86 - 46,3s\nu_q \operatorname{tg} \varphi}{s\nu_q}.$$

Заключение. В работе для плановой задачи проведено обобщение формулы расхода наносов с учетом влияния на него возмущений свободной поверхности. Полученные формулы для расхода наносов и следующее из них уравнение русловых деформаций дна подтверждаются многочисленными экспериментальными данными.

На основе обобщенной формулы расхода наносов сформулирована и решена двумерная задача устойчивости песчаного дна канала к двумерным пространственным возмущениям.

Аналитически определены области формирования и изменения донных форм в зависимости от числа Фруда. Найденны значения числа Фруда, определяющие появление одномерной донной волны, минимальное значение длины этой волны, максимальное значение скорости роста ее амплитуды, точку бифуркации, при которой ответвляется двумерное семейство волн, границу смыва одномерных волн, минимальное значение длины поперечной волны.

Анализ зависимостей, полученных для донных волн при малых числах Фруда, показал, что учет макротурбулентной вязкости потока и периодических движений жидкости в потоке необходим при определении длин генерируемых потоком донных волн, но влиянием этих факторов можно пренебречь при вычислении скорости движения донных волн. Однако в общем случае оба эти явления оказывают существенное влияние на процесс генерации и перемещения донных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гришанин К. В.** Устойчивость русел рек и каналов. Л.: Гидрометеоздат, 1974.
2. **Караушев А. В.** Теория и методы расчета речных наносов. Л.: Гидрометеоздат, 1977.
3. **Engelund F.** Instability of erodible beds // J. Fluid Mech. 1970. V. 42, N 2. P. 121–132.
4. **Mantz P. A.** Semi-empirical correlations for fine and coarse cohesionless sediment transport // Proc. Inst. Civ. Engrs. 1983. V. 75, N 2. P. 1–33.
5. **Кондратьев Н. Е.** Основы гидроморфологической теории руслового процесса / Н. Е. Кондратьев, И. В. Попов, Б. Ф. Снищенко. Л.: Гидрометеоздат, 1982.
6. **Клавен А. Б.** Исследования структуры турбулентного потока // Тр. Гос. гидрол. ин-та. 1966. Вып. 136. С. 25–31.
7. **Сидорчук А. Ю.** Морфология и динамика руслового рельефа / А. Ю. Сидорчук, А. Е. Михинов. М.: ВИНТИ, 1985. (Итоги науки и техники. Сер. Гидрология суши; Т. 5).
8. **Callander R. A.** Instability and river channels // J. Fluid Mech. 1969. V. 36, N 3. P. 465–480.
9. **On the cause** and characteristic scales of meandering and braiding in river // J. Fluid Mech. 1976. V. 76. P. 457–480.
10. **Михинов А. Е.** Неустойчивость донных волн в деформируемом русле // Метеорология и гидрология. 1983. № 11. С. 84–91.

11. **Михинов А. Е.** Баланс энергии возмущенного движения в русловых потоках // Метеорология и гидрология. 1987. № 9. С. 82–91.
12. **Знаменская Н. С.** Донные наносы и русловые процессы. Л.: Гидрометеиздат, 1976.
13. **Дебольский В. К.** Динамика русловых потоков и прибрежной зоны моря / В. К. Дебольский, С. Массель, Р. Зайдлер и др. М.: Наука, 1994.
14. **Петров А. Г., Петров П. Г.** Вектор расхода наносов в турбулентном потоке над размываемым дном // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 2. С. 102–112.
15. **Петров А. Г., Потапов И. И.** Постановка и решение задачи об устойчивости несвязного дна канала // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 1. С. 62–74.
16. **Петров А. Г., Потапов И. И.** О развитии возмущений песчаного дна канала // Докл. АН. 2010. Т. 431, № 2. С. 191–195.
17. **Петров П. Г.** Движение сыпучей среды в придонном слое жидкости // ПМТФ. 1991. № 5. С. 72–75.
18. **Wagnold R. A.** An approach to the sediment transport problem from general physics: US Geolog. Survey Prof. Paper 422-I. S. 1., 1966.
19. **Потапов И. И.** Двумерная модель транспорта донных наносов для рек с песчаным дном // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 3. С. 131–139.
20. **Бутаков А. Н.** Гидравлика развития мезоформ речного русла. М.: Изд-во РУНД, 1999.
21. **Шуляк Б. А.** Физика волн на поверхности сыпучей среды и жидкости. М.: Наука, 1971.
22. **Курош А. Г.** Курс высшей алгебры. М.; Л.: ОГИЗ, 1946.
23. **Корчоха Ю. М.** Исследования грядового движения наносов на р. Поломети // Тр. Гос. гидрол. ин-та. 1968. Вып. 161. С. 98–122.
24. **Пушкарев В. Ф.** Движение влекомых наносов // Тр. Гос. гидрол. ин-та. 1948. Вып. 8. С. 93–110.

Поступила в редакцию 26/II 2010 г.
