

9. Ландау Л. Д., Теллер Э. Zur Theorie der Schalldispersion. Physik Z. Sow., 1936, vol. 10, p. 34.
10. Herzfeld K. F., Litovitz T. A. Dispersion and Absorption of Ultrasonic Waves. N. Y. Acad. Press, 1959.
11. Herzfeld K. F. Deactivation of the Vibration during Collision of Two Diatomic Molecules. Z. Phys., 1959, B. 156, S. 265.
12. Parker J. G. Rotational and Vibrational Relaxation in Diatomic Gases. Phys. Fluids, 1959, vol 2, No 4, p. 449.
13. Никитин Е. Е. О вычислении вероятности колебательного возбуждения молекул при столкновениях. Оптика и спектроскопия, 1959, т. 6. вып. 2, стр. 141.
14. G. Row G. J., Ellis C. P. High-Temperature Gas Viscosities. I. Nitrous Oxide and Oxygen. J. Chem. Phys., 1958, vol. 28, No 6, p. 1198.
15. Monchick L. Collision Integrals for the Exponential Repulsive Potential. Phys. Fluids, 1959, vol. 2, No 6, p. 695.
16. McCoubrey J. C., Milward R. C., Ubbelohde A. R. Transition Probabilities for the Transfer of Vibrational Energy. Trans. Farad. Soc., 1961, vol. 57, part 9, p. 1472.

### ВЛИЯНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОЙ И КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ НА ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛАСТИНКЕ

Ю. П. Дунькин, Янь Си-цинъ

(Ленинград)

При полете тел со сверхзвуковыми скоростями температура газа вблизи их поверхности может существенно превышать температуру окружающей среды. Такое повышение температуры сопровождается возбуждением внутренних степеней свободы молекул газа. Однако это возбуждение осуществляется не мгновенно, а в течение некоторого времени, которое называется временем реакции. Ниже приводятся некоторые результаты исследования влияния неравновесного возбуждения вращательных и колебательных степеней свободы (вращательной и колебательной релаксации) на ламинарный пограничный слой на плоской пластинке. Излагается приближенный метод решения системы уравнений, описывающих это явление.

1. В соответствии с методом квазиравновесных зон [1] можно рассматривать отдельно возбуждение вращательных и колебательных степеней свободы.

Ограничимся случаем двухатомного газа. При этом уравнения непрерывности и количества движения останутся прежними, а в уравнении энергии вектор потока тепла будет иметь вид

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T - \lambda_+ \nabla T_+ \quad (1.1)$$

Здесь  $\lambda$ ,  $T$  и  $\lambda_+$ ,  $T_+$  — теплопроводность и температура «активных» и «инертных» (релаксирующих) степеней свободы. Связь между  $T$  и  $T_+$  находится при помощи релаксационного уравнения, которое в [2] приведено без доказательства для постоянной теплоемкости. Дадим вывод этого уравнения для случая переменной теплоемкости.

2. Рассмотрим простейший случай, когда система может находиться только в двух квантовых состояниях 0 и 1. Тогда уравнения сохранения числа частиц каждого состояния  $n_0$  и  $n_1$  можно записать так:

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \operatorname{div} n_0 (\mathbf{v} + \mathbf{w}_0) = p_{10} n_1 - p_{01} n_0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \operatorname{div} n_1 (\mathbf{v} + \mathbf{w}_1) = p_{01} n_0 - p_{10} n_1 \quad (2.2)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — массовая (гидродинамическая) скорость;  $\mathbf{w}_i$  — тепловая (диффузионная) скорость частиц, находящихся в  $i$ -квантовом состоянии;  $p_{ij}$  — вероятность перехода из состояний  $i$  в состояния  $j$ . При равновесии

$$p_{01} n_0^* = p_{10} n_1^* \quad (2.3)$$

Здесь  $n_0^*$  и  $n_1^*$  соответственно значения числа частиц  $n_0$  и  $n_1$  в равновесном состоянии. При этом в силу сохранения числа частиц

$$n_0 + n_1 = n_0^* + n_1^* = n \quad (2.4)$$

Умножим (2.1) на  $E_0$  энергию состояния 0, а (2.2) — на  $E_1$  — энергию состояния 1; складывая полученные выражения и учитывая (2.3) и (2.4), находим

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}E) + \operatorname{div} \sum_i n_i E_i \mathbf{w}_i = \frac{E^* - E}{\tau} \quad (2.5)$$

$$E = n_0 E_0 + n_1 E_1, \quad E^* = n_0^* E_0 + n_1^* E_1, \quad \tau^{-1} = p_{01} + p_{10} \quad (2.6)$$

Здесь  $E$  — внутренняя энергия инертных степеней свободы единицы объема,  $\tau$  — время релаксации.

Если предположить, что частицы, находящиеся в разных квантовых состояниях, механически эквивалентны, т. е. имеют одинаковые законы взаимодействия, то согласно [2,3]

$$\sum_i n_i E_i \mathbf{w}_i = -nD \sum_i E_i \nabla \frac{n_i}{n} = -nD \sum_i E_i \left[ \frac{d}{dT_+} \frac{n_i}{n} \right] \nabla T_+ = \rho D C_{v+} \nabla T_+ \equiv \lambda_+ \nabla T_+ \quad (2.7)$$

Здесь  $D$  — коэффициент самодиффузии,  $\rho = nm$  — плотность,  $c_{v+}$  — теплоемкость внутренних (релаксирующих) степеней свободы, отнесенная к единице массы газа.

Вводя внутреннюю энергию инертных степеней свободы единицы массы  $\varepsilon = E/\rho$  и используя (2.7), окончательно получим

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \rho \frac{\varepsilon^* - \varepsilon}{\tau} + \operatorname{div}(\lambda_+ \nabla T_+) \quad (\varepsilon = \varepsilon(T_+), \quad \varepsilon^* = \varepsilon(T)) \quad (2.8)$$

Для системы, находящейся в  $i$  произвольных квантовых состояниях, не удается так просто ввести время релаксации и получить релаксационное уравнение типа (2.8). Уравнение такого типа имеет место лишь для некоторых определенных моделей молекул [4]. При  $c_{v+} = \text{const}$  уравнение (2.8) переходит в уравнение (6.42) работы [2].

3. Используя (2.8), систему уравнений ламинарного пограничного слоя на пластине с учетом релаксации внутренних степеней свободы можно представить в виде

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), & \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) &= 0 \\ \rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_+ \frac{\partial T_+}{\partial y} \right), & \rho &= \rho R T \\ \rho u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \rho \frac{\varepsilon^* - \varepsilon}{\tau} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_+ \frac{\partial T_+}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $i = i_a + \varepsilon$  — полная удельная энтальпия,  $i_a$  — энтальпия активных степеней свободы. Граничные условия будут

$$u = v = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad u = u_\infty \quad \text{при } y = \infty \quad (3.2)$$

для теплоизолированной пластинки

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T_+}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad i = i_\infty \quad \text{при } y = \infty \quad (3.3)$$

для каталитической пластинки с постоянной температурой  $T_w$  (постоянной энтальпией  $i_w$ )

$$i = i_w \quad \text{при } y = 0, \quad i = i_\infty \quad \text{при } y = \infty \quad (3.4)$$

На поверхности каталитической пластинки успевает установиться термодинамическое равновесие. Исключением может быть [5] передняя кромка пластины  $x = 0$ . Набегающий поток также равновесный, поэтому для каталитической пластинки

$$T_+ = T \quad \text{при } y = 0, \quad y = \infty \quad (3.5)$$

При решении системы (3.1) — (3.5) ограничимся случаем, когда теплоемкость газа постоянна, а числа  $P$  Прандтля активных и инертных степеней свободы равны. Тогда третье уравнение (3.1) примет вид

$$\rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{P} \frac{\partial i}{\partial y} \right) \quad (3.6)$$

Используя преобразование Дородницына

$$\xi = x, \quad \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_\infty} dy \quad (3.7)$$

первые два и последнее уравнение (3.1), а также уравнение (3.6) приведем к следующему виду:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial \xi} + V \frac{\partial u}{\partial \eta} &= v_{\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( c \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), & \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} &= 0 \\ u \frac{\partial i}{\partial \xi} + V \frac{\partial i}{\partial \eta} &- v_{\infty} c \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{v_{\infty}}{P} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( c \frac{\partial i}{\partial \eta} \right) \\ u \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} &= \frac{v_{\infty}}{P} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( c \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) + \frac{\varepsilon^* - \varepsilon}{\tau} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь

$$V = u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{r}{\rho_{\infty}}, \quad v_{\infty} = \frac{\mu_{\infty}}{\rho_{\infty}}, \quad c = \frac{\mu \rho}{\mu_{\infty} \rho_{\infty}} \quad (3.9)$$

Граничные условия

$$u = v = 0, \quad i = i_w \quad \text{или} \quad \frac{\partial i}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0; \quad u = u_{\infty}, \quad i = i_{\infty} \quad \text{при} \quad y = \infty \quad (3.10)$$

Так как параметр Чемпэна — Рубезина  $c$  меняется в пограничном слое сравнительно мало [6], в дальнейшем будем полагать  $c = \text{const}$ . Введем новую переменную  $\zeta$  и функцию тока  $\psi$  по формулам

$$\zeta = \eta \left( \frac{\xi v_{\infty} c}{u_{\infty}} \right)^{-1/2}, \quad \psi = (\xi v_{\infty} u_{\infty} c)^{1/2} f(\zeta)$$

Тогда первое уравнение (3.8) примет вид

$$2f''' + ff' = 0 \quad (3.11)$$

В качестве первого приближения будем считать, что полная энтальпия газа  $i$  зависит только от  $\zeta$ . Тогда из третьего уравнения (3.18) имеем

$$i'' + \frac{1}{2} P f i' + P u_{\infty}^2 (f'')^2 = 0 \quad (3.12)$$

Граничные условия для уравнений (3.11), (3.12) будут

$$f = f' = 0, \quad i = i_w \quad \text{или} \quad i' = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0; \quad f' = 1, \quad i = i_{\infty} \quad \text{при} \quad \zeta = \infty \quad (3.13)$$

Решения задачи (3.11) — (3.13) известны [7]. Однако профиль полной энтальпии  $i$  еще не определяет профиля температуры газа. Чтобы найти его, надо решить релаксационное уравнение (3.8).

4. Для случая постоянного времени релаксации  $\tau = \tau_{\infty}$  последнее уравнение (3.8) в переменных  $\xi, \zeta$  имеет вид

$$f' \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} - \frac{f}{2\xi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} = \frac{1}{\xi P} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \zeta^2} + \frac{\varepsilon^* - \varepsilon}{u_{\infty} \tau_{\infty}} \quad (4.1)$$

Введем безразмерные величины

$$I = \frac{i - i_w}{i_{\infty} - i_w}, \quad u = \frac{a\varepsilon - i_w}{i_{\infty} - i_w}, \quad \chi = \frac{\xi}{u_{\infty} \tau_{\infty}} \quad \left( a = \frac{c_{pa} + a_{vi}}{c_{vi}} \right) \quad (4.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_{ra} &= \frac{5}{2} R, & 0 \leq c_{vi} \leq R, & & \frac{7}{2} \leq a < \infty & \left( \begin{array}{l} \text{для вращательной} \\ \text{релаксации} \end{array} \right) \\ c_{ra} &= \frac{7}{2} R, & 0 \leq c_{vi} \leq R, & & \frac{9}{2} \leq a < \infty & \left( \begin{array}{l} \text{для колебательной} \\ \text{релаксации} \end{array} \right) \end{aligned}$$

При значениях параметра релаксации  $\chi \ll 1$  инертные степени свободы молекул почти во всем пограничном слое не возбуждены: «замороженное» течение; при значениях  $\chi > 1$  течение близко к равновесному.

Тогда уравнение (4.1) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} + \frac{1}{2} f \frac{\partial u}{\partial \chi} + b\chi(I - u) = \chi f' \frac{\partial u}{\partial \chi} \quad \left( b = \frac{c_{pa} + c_{vi}}{c_{pa}} \right) \quad (4.3)$$

Здесь  $1 \ll b \ll 7/5$  — для вращательной релаксации,  $1 \ll b \ll 9/7$  — для колебательной релаксации.

Граничные условия

$$u(\chi, 0) = 0 \quad \text{или} \quad u'(\chi, 0) = 0 \quad u(\chi, \infty) = 1 \quad (4.4)$$

Будем искать решение (4.3) в виде ряда по параметру релаксации  $\chi$

$$u(\zeta, \chi) = \varepsilon_0(\zeta) + \varepsilon_1(\zeta)\chi + \varepsilon_2(\zeta)\chi^2 + \dots \quad (4.5)$$

При этом  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(0) = \varepsilon_1(0) = \dots = \varepsilon_n(0) = 0 \quad \text{или} \quad \varepsilon_0'(0) = \varepsilon_1'(0) = \dots = \varepsilon_n'(0) = 0 \quad (4.6) \\ \varepsilon_0(\infty) = 1, \quad \varepsilon_1(\infty) = \varepsilon_2(\infty) = \dots = \varepsilon_n(\infty) = 0 \end{aligned}$$

Подставляя (4.5) в (4.3) и приравнявая члены при одинаковых степенях  $\chi$ , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0'' + \frac{1}{2} P f \varepsilon_0' &= 0 \\ \varepsilon_1'' + \frac{1}{2} P f \varepsilon_1' - P f' \varepsilon_1 &= -P b (1 - \varepsilon_0) \\ \varepsilon_2'' + \frac{1}{2} P f \varepsilon_2' - 2P f' \varepsilon_2 &= P b \varepsilon_1 \quad (4.7) \\ \dots & \\ \varepsilon_n'' + \frac{1}{2} P f \varepsilon_n' - n P f' \varepsilon_n &= P b \varepsilon_{n-1} \end{aligned}$$

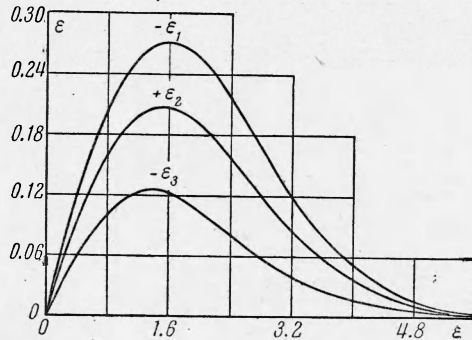
Решение для  $\varepsilon_0$  имеет вид

$$\varepsilon_0 = c_1 \int_0^{\zeta} \exp\left(-\frac{1}{2} P \int_0^{\zeta} f d\zeta\right) d\zeta + c_2 \quad (4.8)$$

Здесь  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные интегрирования. Используя (3.11) и (4.6), получим

$$\varepsilon_0 = \int_0^{\zeta} [f'']^P d\zeta \int_0^{\infty} [f'']^P d\zeta \quad (\varepsilon_0 = f' \text{ при } P = 1) \quad (4.9)$$

На фиг. 1 представлены решения  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  для теплоизолированной пластинки при  $M_\infty = 3, \gamma_\infty = 1.4, P = 1, b = 7/5$  (вращательная релаксация). Так как  $|\varepsilon_0| > |\varepsilon_1| > |\varepsilon_2| > |\varepsilon_3|$  и ряд (4.5) является знакопеременным, то он сходится даже при  $\chi \sim 1$ .

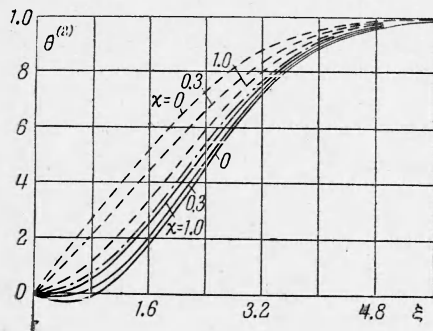


Фиг. 1

Следовательно, полученное решение охватывает практически всю релаксационную область.

На фиг. 2 приведены сплошными линиями профили безразмерной поступательной температуры  $\theta^{(1)}$  и пунктирными линиями профили вращательной температуры  $\theta^{(2)}$  при разных значениях  $\chi$  для упомянутого выше случая теплоизолированной пластинки; штрих-пунктирная кривая соответствует безразмерному равновесному профилю температуры  $\theta^{(0)}$ ; при этом

$$\begin{aligned} \theta^{(1)} &= \frac{T^{(1)} - T_w}{T_\infty - T_w}, & \theta^{(2)} &= \frac{T^{(2)} - T_w}{T_\infty - T_w} \\ \theta^{(0)} &= \frac{T^{(0)} - T_w}{T_\infty - T_w} \end{aligned}$$



Фиг. 2

На фиг. 3 представлены профили  $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}$  и  $\theta^{(0)}$  для охлаждаемой каталитической пластинки  $T_w = 1/3 T_\infty$  при  $M_\infty = 3, \gamma_\infty = 1.4, P = 1, b = 7/5$ .

5. В действительности  $\tau$  является функцией температуры и давления газа. Используя предположение о постоянной теплоемкости, можно представить  $\tau^{(2)}$  для вращательной релаксации в виде [8]

$$\tau^{(2)} = \frac{D'}{\rho \sqrt{T}} = \frac{D}{\rho \sqrt{i}} \quad (D = \text{const}) \quad (5.1)$$

для колебательной [9]

$$\tau^{(1)} = \frac{A}{p} i \exp(Bi^{-1/2}) \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{i_k}{i}\right) \right\}^{-1} \quad (A, B = \text{const}) \quad (5.2)$$

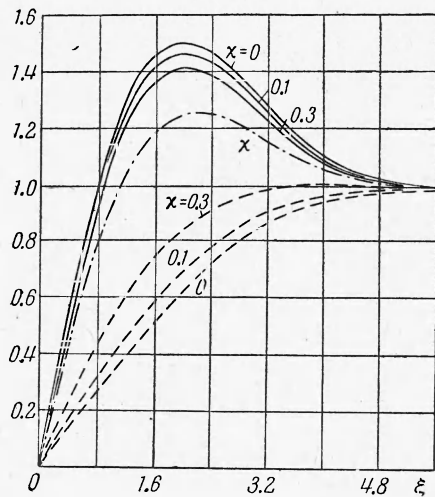
Здесь  $i_k$  — энтальпия при характеристической температуре колебаний. Если ввести безразмерную величину

$$Q(I) = \frac{\tau}{\tau_\infty} \quad (5.3)$$

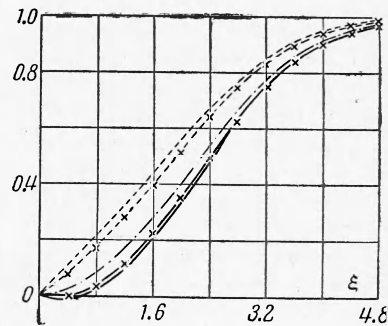
в частности, для вращательной релаксации

$$Q(I) = \left[ \frac{i_\infty - i_w}{i_\infty} I + \frac{i_w}{i_\infty} \right]^{1/2} \quad (5.4)$$

то можно воспользоваться уравнениями предыдущего параграфа, заменив в них  $b$   $b/Q(I)$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 4 приведены профили  $\theta^{(1)}$ ,  $\theta^{(2)}$ ,  $\theta^{(0)}$  (сплошные линии) для теплоизолированной пластинки при  $M_\infty = 3$ ,  $\gamma_\infty = 1.4$ ,  $P = 1$ ,  $b = 7/5$ ,  $\chi = 0.3$  для постоянного и переменного (кривые с крестиками)  $\tau$ . Видно, что в случае переменного  $\tau$  профили  $\theta^{(1)}$  и  $\theta^{(2)}$  ближе к равновесному профилю, чем в случае  $\tau = \text{const}$ . Это связано с ростом температуры в пограничном слое и соответствующим уменьшением времени релаксации.

Поступила 27 IV 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лунькин Ю. П. О структуре ударных волн. ЖТФ, 1957, т. 27, № 6.
2. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория жидкостей и газов. ИЛ., 1961.
3. Чемпэн С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. ИЛ, 1960.
4. Shuler K. E. Relaxation processes in multistate systems. The Physics of Fluids, 1959, vol. 2, № 4.
5. Стулов В. П. Пограничный слой на пластине с учетом неравновесной диссоциации. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 3, 5.
6. Charman D. R., Rubesin M. W. Temperature and velocity profiles in the compressible laminar boundary layer with arbitrary distribution of surface temperature. J. Aeronaut. Sc., 1949, vol. 16, № 9.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. ИЛ, 1956.
8. Кривцова Н. В., Лунькин Ю. П. Возбуждение вращений молекул за ударной волной. ЖТФ, 1962, т. 32, № 1.
9. Bluthé P. A. Comparison of exact and approximate methods for analysing vibrational relaxation regions. J. Fluid Mech., 1961, vol. 10, № 1.