ЛИТЕРАТУРА

1. **Brown L. M., Ham R. K.** Dislocation-particle interactions.— In: Strengthening methods in crystals/Ed. Kelly A. and Nicholson R. B. London etc.: Applied science publishers LTD, 1971.
2. **Келли А., Никльсон Р.** Дисперсионное твердение. М.: Металлургия, 1965.
3. **Гитгарц М. И.** Упругие напряжения и деформации в выделении и матрице при распаде твердого раствора сплава ЭИ437А.— ФММ, 1966, т. 22, № 2.
4. **Brown L. M., Stobbs W. M.** The work-hardening of coppersilica. I. A model based on internal stresses, with no plastic relaxation.— Phil. Mag., 1971, v. 23, N 185.
5. **Hazzledine P. M. and Hirsch P. B.** A coplanar Orowan loops model for dispersion hardening.— Phil. Mag., 1974, v. 30, N 6.
6. **Алексеев А. А., Струнин Б. М.** Изменение упругой энергии кристалла при его пластической деформации.— Кристаллография, 1975, т. 20, № 6.
7. **Алексеев А. А., Струнин Б. М.** Об изменении упругой энергии кристалла при его пластической деформации.— ФТТ, 1975, т. 17, № 5.
8. **Эшелби Дж.** Континуальная теория дефектов.— В кн.: Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1963.

Поступила 29/VIII 1983 г.

УДК 548.571

ОБЩАЯ МОДЕЛЬ ДИСЛОКАЦИИ СОМИЛИАНЫ

Ш. Х. ХАННАНОВ

(Уфа)

1. В основе статистического описания пластического формоизменения, эволюции субструктуры, разрушения и других процессов в реальных твердых телах лежит континуальная теория дефектов (см., например, [1—3]). Среди всевозможных дефектов важное место занимают дислокации и дисклинации, распределениями которых можно представлять практически любые субструктуры. Рассмотрение дислокаций и дисклинаций как различных дефектов не всегда удобно и оправдано, поскольку те и другие являются дислокациями Вольтерра (только лишь разного типа). С другой стороны, дефекты более общего типа — дислокации Сомилианы [2] — могут служить средством единого описания дислокаций и дисклинаций. В [4] сделан шаг в этом направлении и предложена модель дислокации Сомилианы, заданная своими базисными полями пластических дисторсий β_{ni}^{P} и скоростей смещений v_l^P. Однако такая дислокация Сомилианы описывает лишь так называемую дислокационную модель дефектов [3]. Этого вполне достаточно для вычисления динамических полей упругих напряжений, создаваемых дефектами, но при этом не отражаются некоторые дисклинационные характеристики дефектной структуры. Цель данной работы — получение общей модели дислокации Сомилианы, которая в равной мере учитывает как дислокационные, так и дисклинационные характеристики дефектов. Как будет показано ниже, такая модель должна быть обобщением дисклинации (поворотной дислокации Вольтерра).

2. Обычное (первоначальное) определение дислокации Сомилианы формулируется в терминах полных полей смещения u_l^T, которые на дефектной поверхности S претерпевают произвольно изменяющийся вдоль S скачок $\left[u_l^T\right]$ [2]. При построении общей модели дислокации Сомилианы мы поступим иначе, а именно: дадим определение модели через базисные пластические поля, как это делалось в [4].

Общую модель дислокации Сомилианы будем рассматривать как непосредственное обобщение дисклинации, которая в континуальной теории дефектов определяется заданием четырех базисных пластических полей: e_{kl}^P — тензора деформации, $\varkappa_{mq}^P$ — тензора изгиба-кручения, v_l^P — вектора скоростей смещения, ω_q^P — вектора скоростей вращения [5, 6]. Выражения для базисных полей для обычной дисклинации получаются путем рассмотрения дисклинации с замкнутой поверхностью $S(t)$, охватывающей объем $V(t)$, где t — время. Исходным является выражение для полных смещений $u_l^T(\mathbf{r}, t)$ внутри объема $V(t)$ [5]

$$u_l^T(\mathbf{r}, t) = \int\limits_V \delta(\mathbf{R}) \left\{b_l + \varepsilon_{lqr}\Omega_q\left(x_r' - x_r^0\right)\right\} dV', \tag{2.1}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ — разность радиус-векторов точки наблюдения и интегрирования; $\delta(\mathbf{r})$ — трехмерная дельта-функция Дирака; b_l, Ω_q — векторы относительной трансляции и поворота берегов разреза $S(t)$; ε_{lqr} — единичный антисимметричный тензор; x_r — декартовы координаты радиус-вектора $\mathbf{r}$; x_r^0 — координаты точки, через которую проходит ось поворота. Базисные поля находятся по следующей схеме [5, 6].

Путем дифференцирования по координатам вычисляется полная дисторсия β^T_{kl}

$$\beta^T_{kl} = u^T_{l,k}, \tag{2.2}$$

где индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей декартовой координате. Симметричная часть β^T_{kl} (2.2) представляет полную деформацию

$$e^T_{kl} = \beta^T_{(kl)}, \tag{2.3}$$

где (kl) — операция симметрирования по указанным индексам. Базисное поле пластической деформации e^P_{kl} определяется как сингулярная часть e^T_{kl} (2.3), сосредоточенная на $S(t)$.

Дифференцирование (2.1) по времени t дает вектор скорости полного смещения v^T_l

$$v^T_l = \frac{\partial}{\partial t} u^T_l. \tag{2.4}$$

Базисное поле пластического смещения v^P_l снова определяется как сингулярная часть v^T_l (2.4), сосредоточенная на $S(t)$.

Полный вектор поворота φ^T_q находится как вектор, ассоциированный с антисимметричной частью полной дисторсии β^T_{kl} (2.2):

$$\varphi^T_q = \frac{1}{2} \varepsilon_{klq}\beta^T_{kl}. \tag{2.5}$$

Путем дифференцирования φ^T_q (2.5) по координатам вычисляется полный тензор изгиба-кручения $\varkappa^T_{mq}$:

$$\varkappa^T_{mq} = \varphi^T_{q,m}. \tag{2.6}$$

Сингулярная часть $\varkappa^T_{mq}$, сосредоточенная на $S(t)$, соответствует тензору пластического изгиба-кручения $\varkappa^P_{mq}$.

Наконец, путем дифференцирования по времени φ^T_q (2.5) находится полный вектор скоростей вращения

$$w^T_q = \frac{\partial}{\partial t} \varphi^T_q, \tag{2.7}$$

и сингулярная часть w^T_q, сосредоточенная на $S(t)$, принимается за базисный вектор скорости пластического вращения w^P_q.

Описанная выше процедура вычисления базисных полей (2.2)—(2.7) может быть представлена в более лаконичной форме, если воспользоваться аппаратом моторного исчисления (шестимерным пространством с ковариантным дифференцированием) [7]. Полные базисные поля e^T_{kl}, $\varkappa^T_{mq}$, v^T_l, w^T_q составляют пару моторов (в записи моторы изображаются матрицами-столбцами), которые получаются дифференцированием мотора из векторов φ^T_q, u^T_l (индексы у тензоров опускаем):

$$\begin{pmatrix} \varkappa^T \\ e^T \end{pmatrix} = \operatorname{grad} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}^T \\ \mathbf{u}^T \end{pmatrix}; \tag{2.8}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w}^T \\ \mathbf{v}^T \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}^T \\ \mathbf{u}^T \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Здесь grad есть операция вида [7]

$$\operatorname{grad} \begin{pmatrix} \varphi^T_k \\ u^T_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^T_{k,i} \\ u^T_{k,i} - \varepsilon_{ik\alpha}\varphi^T_\alpha \end{pmatrix},$$

а $\partial/\partial t$ означает

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi^T_k \\ u^T_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial t}\varphi^T_k \\ \dfrac{\partial}{\partial t} u^T_k \end{pmatrix}.$$

При выводе выражений для базисных полей в общей модели дислокации Сомилианы будем следовать указанной выше процедуре, но откажемся от предположения о постоянстве векторов b_l, Ω_q, считая их функциями координат и времени. Это является вполне естественным обобщением обычной дисклинации. Поскольку b_l, Ω_q — произвольные функции, то и выражение в фигурных скобках под интегралом (2.1) будет произвольным векторным полем $P_l(\mathbf{r}, t)$, так что вместо (2.1) можно записать

$$u_l^T = \int\limits_{V(t)} \delta(\mathbf{R})\, P_l(\mathbf{r}', t')\, dV'. \tag{2.10}$$

Исходя из (2.10) и проделав необходимые выкладки, получаем выражения для базисных пластических полей в общей модели дислокации Сомилианы:

$$e_{kl}^p = -\int\limits_{S(t)} \delta(\mathbf{R})\, P_l(\mathbf{r}', t')\, dS'_{k(kl)}; \tag{2.11}$$

$$\varkappa_{mq}^p = -\frac{1}{2}\varepsilon_{klq}\int\limits_{S(t)} \delta_{,m}(\mathbf{R})\, P_l(\mathbf{r}', t')\, dS'_k - \frac{1}{2}\varepsilon_{klq}\int\limits_{S(t)} \delta(\mathbf{R})\, P_{l,k}(\mathbf{r}', t')\, dS'_m; \tag{2.12}$$

$$v_l^P = \int\limits_{S(t)} \delta(\mathbf{R})\, P_l(\mathbf{r}', t')\, v_k(\mathbf{r}', t')\, dS'_k; \tag{2.13}$$

$$w_q^P = -\frac{1}{2}\varepsilon_{klq}\int\limits_{S(t)} \delta(\mathbf{R})\, \dot{P}_l(\mathbf{r}', t')\, dS'_k + \frac{1}{2}\varepsilon_{klq}\int\limits_{S(t)} \delta_{,k}(\mathbf{R})\, P_l v_j\, dS'_j - \frac{1}{2}\varepsilon_{klq}\varepsilon_{kmp}\int\limits_{L(t)} \delta(\mathbf{R})\, P_l v_m\, dL'_p, \tag{2.14}$$

где v_k — скорость движения поверхности $S(t)$; точка сверху означает дифференцирование по времени; dL_p — элемент контура L, ограничивающего $S(t)$. Можно убедиться, что в случае, когда общее выражение (2.10) переходит в частное выражение (2.1), формулы (2.11)—(2.14) дают правильные формулы для базисных пластических полей обычной дисклинации [5].

3. Полные базисные поля, как это видно из (2.8), (2.9), кинематически зависимые и подчиняются условиям совместности (интегрируемости системы уравнений (2.8), (2.9))

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix}\varkappa^T\\ e^T\end{pmatrix} = 0; \tag{3.1}$$

$$\operatorname{grad}\begin{pmatrix}\mathbf{w}^T\\ \mathbf{v}^T\end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varkappa^T\\ e^T\end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где rot — операция вида [7]

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix}\varkappa_{\beta k}^T\\ e_{\beta k}^T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon_{i\alpha\beta}\varkappa_{\beta k,\alpha}^T\\ \varepsilon_{i\alpha\beta}\left(e_{\beta k,\alpha}^T + \varepsilon_{k\alpha\gamma}\varkappa_{\beta\gamma}^T\right)\end{pmatrix}.$$

Пластические базисные поля e_{kl}^p, $\varkappa_{mq}^P$, v_l^P, w_q^P не подчиняются в общем случае условиям совместности (3.1), (3.2). Тензоры плотности α_{pl}, θ_{pq} и потоков J_{kl}, S_{kq} непрерывно распределенных дислокаций и дисклинаций, соответствующих дислокационно-дисклинационной модели общей дислокации Сомилианы, можно определить как меру отклонения от условий совместности (3.1), (3.2) для базисных пластических полей:

$$\begin{pmatrix}\theta\\ \alpha\end{pmatrix} = -\operatorname{rot}\begin{pmatrix}\varkappa^P\\ e^P\end{pmatrix}; \tag{3.3}$$

$$\begin{pmatrix}S\\ J\end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varkappa^P\\ e^P\end{pmatrix} - \operatorname{grad}\begin{pmatrix}\mathbf{w}^P\\ \mathbf{v}^P\end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

При этом вследствие определяющих соотношений (3.3), (3.4) тензоры плотности α_{pl}, θ_{pq} и потока J_{kl}, S_{kq} дислокаций и дисклинаций удовлетворяют условиям совместности

$$\operatorname{div}\begin{pmatrix}\theta\\ \alpha\end{pmatrix} = 0; \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\theta\\ \alpha\end{pmatrix} + \operatorname{rot}\begin{pmatrix}S\\ J\end{pmatrix} = 0, \tag{3.6}$$

где div — операция вида [7]

$$\operatorname{div}\begin{pmatrix}\theta_{mk}\\ \alpha_{mk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta_{mk,m}\\ \alpha_{mk,m}+\varepsilon_{km\beta}\theta_{m\beta}\end{pmatrix}.$$

Подставляя полученные выше выражения (2.11)—(2.14) для базисных пластических полей в формулы (3.3), (3.4), находим для плотностей и потоков дислокаций и дисклинаций в общей модели дислокации Сомилианы:

$$\alpha_{pl}=\int_L \delta(\mathbf{R})\,P_l\,dL'_p+\varepsilon_{pmk}\int_S \delta(\mathbf{R})\,P_{l,m}dS'_k+\frac{1}{2}\,\varepsilon_{pmk}\int_S \delta(\mathbf{R})\,(P_{l,k}-P_{k,l})\,dS'_m; \tag{3.7}$$

$$\theta_{pq}=\frac{1}{2}\,\varepsilon_{slq}\int_L \delta(\mathbf{R})\,P_{l,s}\,dS'_p-\frac{1}{2}\,\varepsilon_{slq}\varepsilon_{kmp}\int_S \delta(\mathbf{R})\,P_{l,sm}dS'_k; \tag{3.8}$$

$$J_{kl}=\varepsilon_{pmk}\int_L \delta(\mathbf{R})\,P_l v_m dL'_p-\int_S \delta(R)\dot{P}_l dS'_k-\frac{1}{2}\int_S \delta(\mathbf{R})\,(P_{l,k}+P_{k,l})\,v_j dS'_j; \tag{3.9}$$

$$S_{kq}=\frac{1}{2}\,\varepsilon_{pmk}\varepsilon_{nlq}\int_L \delta(\mathbf{R})\,P_{l,n}v_m dL'_p-\frac{1}{2}\,\varepsilon_{nlq}\int_S \delta(\mathbf{R})\,\dot{P}_{l,n}dS'_k-$$
$$-\frac{1}{2}\,\varepsilon_{nlq}\int_S \delta(\mathbf{R})\,P_{l,nk}v_j dS'_j. \tag{3.10}$$

Нетрудно убедиться, что в случае, когда общее выражение (2.10) переходит в частное выражение (2.1), формулы (3.7)—(3.10) дают правильные формулы для обычной дисклинации [5].

4. Полевые уравнения для определения упругих полей e_{mq}, $\varkappa_{kl}$, v_l, w_q, источниками которых являются распределенные в теле дефекты, с учетом (3.1), (3.2) и (3.3), (3.4) принимают вид

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix}\varkappa\\ e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta\\ \alpha\end{pmatrix}; \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varkappa\\ e\end{pmatrix}-\operatorname{grad}\begin{pmatrix}\mathbf{w}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}S\\ J\end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Уравнения (4.1), (4.2) необходимо дополнить динамическим уравнением теории упругости (объемные силы полагаем равными нулю)

$$\sigma_{ij,j}=\rho\dot{v}_j \tag{4.3}$$

и законом Гука

$$\sigma_{ij}=c_{ijkl}e_{kl}, \tag{4.4}$$

где ρ — плотность массы; c_{ijkl} — упругие константы. При соблюдении условий совместности (3.5), (3.6) интегрирование уравнений (4.1)—(4.4) дает для упругих деформаций $e_{mn}(\mathbf{r},\ t)$ [6]

$$e_{mn}(\mathbf{r},t)=\int\{[\varepsilon_{pmk}c_{ijkl}G_{jn,i}(\mathbf{R},T)\,\alpha_{pl}(\mathbf{r}',t')-\rho\dot{G}_{ln}(\mathbf{R},T)\,J_{ml}(\mathbf{r}',t')]-$$
$$-\varepsilon_{pmk}[\varepsilon_{qsl}\,c_{ijkl}\,H_{jn,is}(\mathbf{R},T)\,\theta_{pq}(\mathbf{r}',t')-\rho\dot{H}_{kn,s}(\mathbf{R},T)\,S_{sp}(\mathbf{r}',t')]\}_{(mn)}\,d\mathbf{r}'dt', \tag{4.5}$$

где $G_{jn}(\mathbf{r},\ t)$ — динамическая функция Грина, а потенциальная функция $H_{jn}(\mathbf{r},t)$ определяется соотношением

$$H_{jn}(\mathbf{r},t)=\int(4\pi R)^{-1}G_{jn}(\mathbf{r}',t)\,d\mathbf{r}'$$

($T=t-t'$). Отсюда упругие напряжения σ_{ij}, создаваемые распределенными в теле дефектами, находятся путем подстановки (4.5) в (4.4). Совокупность уравнений (4.1)—(4.4), таким образом, определяет динамическое состояние упругой среды при заданных характеристиках дефектов.

Если в среде общие дислокации Сомилианы распределены непрерывно, то для их описания можно ввести функцию распределения $f(\mathbf{r},\ t;\ q)$, где q — набор обобщенных координат, определяющих тип дислокации Сомилианы. Например, в случае обычных замкнутых дислокационных петель круглой формы $q=\{r,\ \mathbf{n},\ \mathbf{b}\}$, где r — радиус петли, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к S, $\mathbf{b}$ — вектор Бюргерса дислокации. Средние по физически малому объему среды плотности $\overline{\alpha}_{pl}$, $\overline{\theta}_{pq}$ и потоки $\overline{J}_{kl}$, $\overline{S}_{kq}$ дислокаций и дисклинаций при этом находятся путем интегрирования по обобщенным координатам q тензоров $\alpha_{pl}(q)$, $\theta_{pq}(q)$, $J_{kl}(q)$, $S_{kq}(q)$, соответствующих изолированной общей дислокации Сомилианы типа q. Например, для $\bar{\alpha}_{pl}$ будем иметь

$$\bar{\alpha}_{pl} = \int \alpha_{pl}(q) f(\mathbf{r}, t; q) dq.$$

Здесь функция распределения $f(\mathbf{r}, t; q)$ нормирована так, что число общих дислокаций Сомилианы dN с обобщенными координатами между q и $q + dq$ в единице объема равно $dN = f(\mathbf{r}, t; q)dq$. Эволюцию ансамбля дефектов во времени можно описать с помощью уравнения баланса для функции их распределения $f(\mathbf{r}, t; q)$ вида

$$\partial f/\partial t + \operatorname{div}(\mathbf{Q}f) = I(f, f'), \tag{4.6}$$

где div — операция дивергенции в $(q + 3)$-мерном пространстве; $\mathbf{Q}$ — вектор скорости в том же пространстве: $\mathbf{Q} = \{\dot{q}, \dot{\mathbf{r}}\}$; $I(f, f')$ — столкновительный интеграл, учитывающий скачкообразные процессы изменения состояния дефектов (зарождение, объединение и т. д.). Для замыкания уравнения (4.6) нужно задать динамический закон

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\left(\sigma_{ij}^{+}\right), \tag{4.7}$$

где σ_{ij}^{+} — эффективные напряжения, складывающиеся из внешних и внутренних (создаваемых самими дефектами) напряжений. Вид закона (4.7) определяется из решения задачи о движении одиночного дефекта в поле напряжений σ_{ij}^{+} (см. подробнее в [4]).

Таким образом, предложена общая модель дислокации Сомилианы, которая является дефектом более общего типа, чем обычные дислокации и дисклинации. Общая дислокация Сомилианы определяется заданием базисных пластических полей согласно (2.11)—(2.14); кроме того, ей соответствует дислокационно-дисклинационная модель (представление) с непрерывно распределенными дислокациями и дисклинациями (3.7)—(3.10). Эволюция во времени ансамбля дислокаций Сомилианы может быть описана функцией распределения, подчиняющейся уравнению баланса вида (4.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Косевич А. М.** Дислокации в теории упругости. Киев: Наук. думка, 1978.
2. **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1963.
3. **Де Вит Р.** Континуальная теория дисклинаций. М.: Мир, 1977.
4. **Ханнанов Ш. Х.** К кинетике дислокаций Сомилианы.— ПМТФ, 1984, № 1.
5. **Kossecka E., DeWit R.** Disclination kinematics.— Arch. Mech., 1977, v. 29, N 5.
6. **Kossecka E., DeWit R.** Disclination dynamics.— Arch. Mech., 1977, v. 29, N 6.
7. **Schaeffer H.** Analysis der Motorfelder im Cosseratkontinuum.— Z. angew. Math. Mech., 1967, Bd 47, N 5.

Поступила 26/III 1984 г.

УДК 539.375

ДОКРИТИЧЕСКОЕ ПОДРАСТАНИЕ ТРЕЩИНЫ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКИ

В. И. АСТАФЬЕВ

(Куйбышев)

В последнее десятилетие наблюдается повышенный интерес к вопросам докритического подрастания трещин в металлах, работающих в области высоких температур (T — $(0{,}4—0{,}6)T_{\text{пл}}$). Эти вопросы имеют важное практическое значение для энергетического машиностроения в связи с возможностью предсказания времени работоспособности элементов конструкций с обнаруженной в них трещиной, длина которой значительно меньше критической. Было проведено большое число экспериментальных работ, посвященных изучению кинетики роста таких трещин, выявлению параметров, адекватно описывающих процесс их подрастания. Предложен ряд моделей для теоретического описания процесса подрастания. Эти работы нашли достаточно полное отражение в [1—4]. Абсолютное большинство авторов теоретических работ используют при моделировании роста трещины параметр поврежденности либо иной параметр, достижение которым критического значения определяет момент разрушения в условиях ползучести. В качестве критерия роста трещины принимается условие достижения этим параметром своего критического значения в вершине трещины [5] или на некотором характерном расстоянии от нее [6]. Распределение напряжений у вершины трещины в этих работах соответствовало постоянной либо плавно меняющейся внешней нагрузке. В данной работе рассматривается задача о подрастании трещины при резко меняющейся нагрузке, в частности при ступенчатом изменении нагрузки, характерном для усталостных испытаний конструкций.