

4. Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм.— М.: ИЛ, 1948.
5. Кузнецов В. В. Канонический тензор в теории упругости // ПМТФ.— 1987.— № 5.
6. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии.— М.: Гостехиздат, 1956.
7. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.— М.: Мир, 1976.
8. Кузнецов В. В. Геометрические инварианты нелинейной теории оболочек // Изв. АН СССР. МТТ.— 1990.— № 2.
9. Кузнецов В. В., Сойников Ю. В. Анализ деформаций оболочек при произвольных перемещениях методом конечных элементов // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 1.
10. Кузнецов В. В. О структуре вариаций энергии нелинейных моделей оболочек // Прикл. механика.— 1988.— Т. 24, № 10.
11. Кузнецов В. В. Рекуррентные соотношения для коэффициентов вариаций энергии нелинейных упругих систем // Изв. АН СССР. МТТ.— 1989.— № 4.

г. Новосибирск

Поступила 23/1 1990 г.,
в окончательном варианте — 26/11 1990 г.

УДК 539.3

А. Г. Колпаков

ТОНКИЕ УПРУГИЕ ПЛАСТИНКИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СТРОЕНИЯ С ВНУТРЕННИМИ ОДНОСТОРОННИМИ КОНТАКТАМИ

Излагается процедура получения формального асимптотического разложения, реализующего переход от трехмерной задачи теории упругости в тонком слое к задаче теории пластинок для тел периодического строения с системой периодически распределенных контактов.

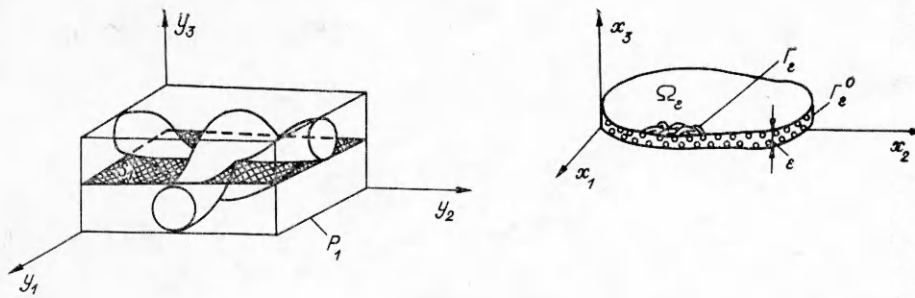
Тела периодического строения с системами односторонних контактов (в [1] рассмотрено тело с системой трещин, занимающее фиксированную область) практически широко реализуются именно в виде тонких пластинок и оболочек: сетчатых оболочек, тканей различного плетения, подкрепленных оболочек и т. п. Периодичность строения таких тел — прямое следствие технологии их изготовления. Размер ячейки периодичности сопоставим с толщиной области. Роль односторонних контактов, являющихся также результатом технологии изготовления, в механических свойствах таких материалов очевидна (пример — различие жесткостей на растяжение и сжатие для плетеных сеток или появление нелинейной зависимости деформация — напряжения для той же сетки, изготовленной на основе применения линейно-упругих материалов). По вопросу перехода от трехмерной задачи теории упругости к двумерной имеется достаточно обширная литература (см., например, [2]). В настоящей работе в части выполнения предельного перехода будем следовать [3], а в части анализа возникающих при этом задач с односторонними ограничениями — [1] (в той мере, в какой это возможно). В связи с чем основное внимание уделено изложению деталей, отличающихся от приводимых в [1, 3].

Постановка задачи. Рассмотрим линейно-упругое тело $(a_{ijkl}(x/\varepsilon))$ — тензор упругих постоянных) периодического строения, занимающее тонкую (характерной толщины $\varepsilon \ll 1$) область Ω_ε . Ячейку периодичности структуры тела обозначим P_ε (см. рисунок). На упругие постоянные наложим стандартные условия [4, 5]: $a_{ijkl}(y) \in L_\infty(R^3)$, $\|a_{ijkl}\|_{L_\infty(R^3)} < \infty$; $a_{ijkl}(y) e_{ij} e_{kl} \geq m$, $\|e_{ij}\|^2 > 0$ для всех $\{e_{ij}\} \neq 0$ таких, что $e_{ij} = e_{ji}$, и для всех $y \in R^3$.

Формализация условия одностороннего контакта имеет следующий вид [1, 4]. Пусть тело закреплено по поверхности Γ_ε^0 (см. рисунок). Введем пространство функций $V = \{u \in \{H^1(\Omega_\varepsilon)\}^3: u(x) = 0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon^0\}$. Тогда условие одностороннего идеального контакта в терминах перемещений u^ε примет вид [1, 4]

$$(1) \quad u^\varepsilon \in M = \{u \in V: [u \cdot n] \geq 0 \text{ на контактных поверхностях}\}$$

(n — нормаль к контактирующим поверхностям). Помимо (1) далее требуется его аналог, описывающий условие того же одностороннего



контакта на ячейке периодичности в терминах локальных переменных $y = x/\epsilon$ [1]:

$$\tilde{M} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \in \{H^1(P_1)\}^3: [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] \geq 0 \text{ на контактных поверхностях и } \mathbf{u}(y) \text{ пе-} \\ \text{риодичны по } (y_1, y_2) \in S_1 \end{array} \right\}.$$

Здесь квадратные скобки — скачок (см. [1]); S_1 — проекция ячейки периодичности P_1 на плоскость Oy_1y_2 (см. рисунок); $P_1 = (1/\epsilon)P_\epsilon = \{y = x/\epsilon: x \in P_\epsilon\}$. Как известно [1], M и \tilde{M} — замкнутые выпуклые множества.

Перемещения \mathbf{u}^ϵ рассматриваемого тела находятся из решения вариационного неравенства [1, 4]

$$(2) \quad \int_{\Omega_\epsilon} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^\epsilon - \mathbf{v})_{i,j} dv - \epsilon^a \int_{\Gamma_\epsilon} \mathbf{g}(\mathbf{u}^\epsilon - \mathbf{v}) ds \geq - \epsilon^b \int_{\Omega_\epsilon} \mathbf{f}(\mathbf{u}^\epsilon - \mathbf{v}) dv$$

для любой $\mathbf{v} \in M$, где

$$(3) \quad \sigma_{ij} = (1/\epsilon^2) a_{ijkl}(\mathbf{x}/\epsilon) u_{k,l}^\epsilon.$$

Множители ϵ^a , ϵ^b в (2) определяют порядок нагрузок на внешних поверхностях пластинки и массовых сил. Присутствие $1/\epsilon^3$ в (3) связано с известной оценкой жесткости пластинки на изгиб [5].

З а м е ч а н и е 1. Область контакта элементов описываемого тела заранее не известна, она определяется при решении задачи (задачи со свободными границами [1, 4]).

При наложении на внешние силы обычных условий $\mathbf{f} \in C^1(R^3)$, $\mathbf{g} \in C^1(R^3)$, $\|\mathbf{f}\|_{C^1}, \|\mathbf{g}\|_{C^1} \leq m < \infty$ задача (1)–(3) разрешима в M для любого $\epsilon > 0$ [1, 4]. Исследуем задачу при $\epsilon \rightarrow 0$.

Формальное асимптотическое разложение задачи (1)–(3) будем строить согласно [3] в виде решения

$$(4) \quad \mathbf{u}^\epsilon = \mathbf{u}^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}}) + \epsilon \mathbf{u}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \dots = \epsilon^k \mathbf{u}^{(k)};$$

пробной функции

$$(5) \quad \mathbf{v}^\epsilon = \mathbf{v}^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}}) + \epsilon \mathbf{v}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \dots = \epsilon^k \mathbf{v}^{(k)};$$

напряжения

$$(6) \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{\epsilon^3} \sigma_{ij}^{(-3)}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \frac{1}{\epsilon^2} \sigma_{ij}^{(-2)}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) + \dots = \epsilon^m \sigma_{ij}^{(m)}.$$

По повторяющимся индексам производится суммирование. Здесь $k = 0, 1, \dots$; $m = -3, -2, -1, 0, \dots$; $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$; $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\epsilon = (x_1/\epsilon, x_2/\epsilon, x_3/\epsilon)$. Все функции в правых частях (4)–(6) предполагаются периодическими по y_1, y_2 с ячейкой периодичности S_1 . Обозначим $\mathbf{w} = \mathbf{u}^\epsilon - \mathbf{v}$. Эта функция представима в виде $\mathbf{w} = \epsilon^k \mathbf{w}^{(k)}$ ($\mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{v}^{(k)}$). Подставим (4)–(6) в (2), (3). Перейдя к переменным $\tilde{\mathbf{v}} = (x_1, x_2, x_3/\epsilon)$, в которых область Ω_ϵ толщины порядка ϵ переходит в область $\Omega_1 = \{(x_1, x_2, y_3 = x_3/\epsilon): \mathbf{x} \in \Omega_\epsilon\}$ толщины порядка единицы, и учитывая, что для функций переменных $\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}$ операторы дифференцирования $\partial/\partial x_i$ пере-

ходят в $\partial/\partial x_\alpha + (1/\varepsilon)\partial/\partial y_\alpha$ при $\alpha = 1, 2$ и в $(1/\varepsilon)\partial/\partial y_3$ при $i = 3$, получаем

$$(7) \quad \varepsilon \int_{\Omega_1} \{ \varepsilon^m \sigma_{i\alpha}^{(m)} \varepsilon^k w_{i,\alpha x}^{(k)} + \varepsilon^m \sigma_{ij}^{(m)} \varepsilon^{k-1} w_{i, jy}^{(k)} \} d\tilde{v} - \\ - \varepsilon^a \int_{\Gamma} \langle g \varepsilon^k w^{(k)} \rangle_\gamma d\tilde{x} \geq - \varepsilon \int_{\Omega_1} \varepsilon^b f \varepsilon^k w^{(k)} d\tilde{v}$$

($m = -3, -2, \dots, k = 0, 1, \dots$). Символы $_{,\alpha x}$ и $_{,jy}$ обозначают дифференцирование по x_α и y_j соответственно. Здесь и далее греческие индексы принимают значения 1, 2, а латинские — 1, 2, 3.

З а м е ч а н и е 2. В переменных $y = x/\varepsilon$ ячейка периодичности P_ε переходит в ячейку $P_1 = (1/\varepsilon)P_\varepsilon$ фиксированного размера.

Подстановка (4), (6) в определяющие соотношения (3) дает с учетом приведенного выше правила дифференцирования равенство [3]

$$(8) \quad \sigma_{ij}^{(m)} = a_{ijk\alpha}(\mathbf{y}) u_{k,\alpha x}^{(m+3)} + a_{ijhl}(\mathbf{y}) u_{k,ly}^{(m+4)} \quad (m = -3, -2, \dots).$$

Приступим к анализу соотношений (7), (8), который будем осуществлять путем исследования задачи при различных k, m и подходящим образом выбранной пробной функции v в (7).

А. Возьмем $k = 0$, т. е. w имеет вид $w = w^{(0)}(\tilde{x}) \in V$ [1] (в (4), (5) $u^{(1)} = v^{(2)}$, $u^{(2)} = v^{(1)}$ и т. д.). В силу того что для рассматриваемой функции $w_{i,jy} = 0$, неравенство (7) запишется как

$$(9) \quad \int_{\Omega_1} \varepsilon^{m+1} \sigma_{i\alpha}^{(m)} w_{i,\alpha x}^{(0)} d\tilde{v} - \varepsilon^a \int_{\Gamma} \langle g w^{(0)} \rangle_\gamma d\tilde{x} \geq - \int_{\Omega_1} \varepsilon^{b+1} f w^{(0)} d\tilde{v}$$

($m = -3, -2, \dots$) для всех $w^{(0)} \in V$.

З а м е ч а н и е 3. Функции $\sigma_{i\alpha}^{(m)}(\tilde{x}, x/\varepsilon)$ быстроосциллирующие по x на второй позиции, в связи с чем [3]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_1} \sigma_{i\alpha}^{(m)}(\tilde{x}, x/\varepsilon) d\tilde{v} = \int_{\Gamma} \langle \sigma_{i\alpha}^{(m)} \rangle(\tilde{x}) d\tilde{x},$$

где $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{\text{mes } S_1} \int_{P_1} d\mathbf{y}$ — среднее по ячейке периодичности P_1 в переменных y .

Тогда (9) с учетом того, что $w^{(0)}(\tilde{x}) \in V$ и V является пространством, дает (подробнее см. аналогичный случай в [1])

$$(10) \quad \begin{aligned} \text{при } m = -3 \quad \langle \sigma_{i\alpha}^{(-3)} \rangle_{,\alpha x} &= 0, \\ \text{при } m = -2 \quad \langle \sigma_{i\alpha}^{(-2)} \rangle_{,\alpha x} &= 0, \\ \text{при } m = -1 \quad \langle \sigma_{i\alpha}^{(-1)} \rangle_{,\alpha x} + \langle g_i \rangle_\gamma &= \langle f_i \rangle. \end{aligned}$$

При получении (10) полагалось $b = -1$, $a = 0$. Здесь $\langle \cdot \rangle_\gamma = \frac{1}{\text{mes } S_1} \int_\gamma d\mathbf{y}$ — среднее по свободным (боковым) граням γ ячейки периодичности P_1 . При выводе (10) приравнивались члены только при неположительных степенях ε .

Б. Теперь примем в (7) $k = 1$ и возьмем пробную функцию в виде

$$(11) \quad w = \varepsilon w^{(1)}(\tilde{x}, y) = \varepsilon y_3 v_0(\tilde{x}), \quad v_0 \in V$$

(т. е. $u^{(0)} = v^{(3)}$, $v^{(1)} = u^{(1)} + y_3 v_0(\tilde{x})$, $u^{(2)} = v^{(2)}$ и т. д.). Получим

$$(12) \quad \int_{\Omega_1} \{ \varepsilon^{m+2} \sigma_{i\alpha}^{(m)} y_3 v_{0i,\alpha x} + \varepsilon^{m+1} \sigma_{ij}^{(m)} \delta_{3j} v_{0i} \} d\tilde{v} - \\ - \int_{\Gamma} \varepsilon^{a+1} \langle g y_3 v_0 \rangle_\gamma d\tilde{x} \geq - \int_{\Omega_1} \varepsilon^{b+2} f y_3 v_0 d\tilde{v}.$$

Обозначим [3] через $\bar{M}_{ij}^{(m)} = \frac{1}{\text{mes } S_1} \int_{P_1} \sigma_{ij}^{(m)} y_3 dy$ моменты. В силу того что $v_0(\tilde{x}) \in V$, а V — пространство, из (12) имеем [1] для неположительных степеней ε

$$(13) \quad \text{при } m = -3 \quad -M_{i\alpha, \alpha x}^{(-3)} + \langle \sigma_{i3}^{(-2)} \rangle = 0, \langle \sigma_{i3}^{(-3)} \rangle = 0;$$

$$(14) \quad \text{при } m = -2 \quad -M_{i\alpha, \alpha x}^{(-2)} + \langle \sigma_{i3}^{(-1)} \rangle = 0.$$

З а м е ч а н и е 4. При $b = -1$, $a = 0$ поверхностные $\varepsilon^a g$ и массовые $\varepsilon^b f$ силы не дают вклада в (14). При других a , b возможно появление соответствующих им членов.

В. Далее рассмотрим локальную задачу, которая возникает, если в (7) положить $m = -3$, $k = 1$ и выбрать пробную функцию в виде $w = \varepsilon w^{(1)}(y)$ (w — периодическая по y_1, y_2 функция на S_1 , для нее $w_{i, \alpha x}^{(1)} = 0$):

$$(15) \quad \int_{\Omega_1} \varepsilon^{-1} \sigma_{ij}^{(-3)} w_{i,jy}^{(1)} d\tilde{v} \geq 0 \text{ для любой } v^{(1)} \in M.$$

Напомним, что $w^{(1)} = u^{(1)} - v^{(1)}$. Подставим соотношение (8), принимающее при $m = -3$ вид $\sigma_{ij}^{(-3)} = a_{ijk\alpha}(y) u_{k, \alpha x}^{(0)} + a_{ijkl}(y) u_{k, ly}^{(0)}$, в (15). Так как в силу периодичности функций интегрирование по Ω_1 сводится к интегрированию по P_1 (см. замечание 3), имеем

$$(16) \quad \int_{P_1} \sigma_{ij}^{(-3)} (u^{(1)} - v^{(1)})_{i,jy} dy \geq 0 \text{ для любой } v^{(1)} \in \tilde{M};$$

$$(17) \quad \sigma_{ij}^{(-3)} = a_{ij\beta\alpha} \gamma_{\beta\alpha}(u^{(0)}) + a_{ij3\alpha} u_{3, \alpha x}^{(0)} + a_{ijkl} u_{k, ly}^{(0)},$$

где $\gamma_{\beta\alpha}(u^{(0)}) = (1/2)(u_{\beta, \alpha x}^{(0)} + u_{\alpha, \beta x}^{(0)})$ — усредненные деформации (т. е. соответствующие усредненным перемещениям $u^{(0)}$) в плоскости пластинки. Задача (16) представляет собой ячеечную задачу (на ячейке периодичности P_1) «нулевого порядка» в смысле [3].

В [3] при исследовании линейной задачи принципиальную роль играет возможность решения в явном виде ячеечной задачи со свободным членом $a_{ij3\alpha} u_{3, \alpha x}^{(0)}$ (17). В рассматриваемом случае задача нелинейная и решение в явном виде не находится. В связи с чем анализ задачи проводится иным, нежели в [3], способом. Представим решение задачи (16) как

$$(18) \quad u_k^{(1)} = \tilde{u}_k^{(1)} - \delta_{k\alpha} y_3 u_{3, \alpha x}^{(0)}(\tilde{x}).$$

Подставив (18) в (16), получим

$$\int_{P_1} \sigma_{ij}^{(-3)} (\tilde{u} - v^{(1)})_{i,jy} dy - \int_{P_1} \sigma_{ij}^{(-3)} u_{3, \alpha x}^{(0)} \delta_{i\alpha} \delta_{j3} dy \geq 0$$

для любой $v^{(1)} \in \tilde{M}$, что можно переписать в виде

$$(19) \quad \int_{P_1} \sigma_{ij}^{(-3)} (\tilde{u} - v^{(1)})_{i,jy} dy - \int_{P_1} \sigma_{\alpha 3}^{(-3)} u_{3, \alpha x}^{(0)} dy \geq 0$$

для любой $v^{(1)} \in \tilde{M}$. В силу второго равенства в (10) из (19) следует

$$\int_{P_1} \sigma_{\alpha 3}^{(-3)} u_{3, \alpha x}^{(0)}(\tilde{x}) dy = \text{mes } S_1 \langle \sigma_{\alpha 3}^{(-3)} \rangle u_{3, \alpha x}^{(0)} = 0.$$

После чего (19) принимает вид

$$(20) \quad \int_{P_1} \sigma_{ij}^{(-3)} (\tilde{u} - v^{(1)})_{i,jy} dy \geq 0 \text{ для любой } v^{(1)} \in \tilde{M}.$$

Подстановка $\mathbf{u}^{(1)}$, согласно (18), в (17) дает

$$(21) \quad \sigma_{ij}^{(-3)} = a_{ij\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ij3\alpha}u_{3,\alpha x}^{(0)} + a_{ijkl}u_{k,ly}^{(1)} = a_{ij\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha}(\mathbf{u}^{(0)}) + \\ + a_{ij3\alpha}\tilde{u}_{3,\alpha x}^{(0)} + a_{ijkl}\tilde{u}_{k,ly}^{(1)} - a_{ij3\alpha}u_{3,\alpha x}^{(0)} + 0 = a_{ij\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ijkl}\tilde{u}_{k,ly}^{(1)}.$$

В результате, подставив (21) в (20), имеем задачу для определения $\tilde{\mathbf{u}}$:

$$(22) \quad \int_{P_1} \{a_{ij\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ijkl}\tilde{u}_{k,ly}^{(1)}\} (\tilde{\mathbf{u}}^{(1)} - \mathbf{v}^{(1)})_{i,jy} dy \geq 0$$

для любого $\mathbf{v}^{(1)} \in \tilde{M}$. Вариационное неравенство (22) аналогично изученному в [1] при рассмотрении тела с системой трещин. Отличие состоит в том, что на свободных поверхностях γ ячейки периодичности P_1 ставится условие $(a_{ij\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ijkl}\tilde{u}_{k,ly}^{(1)})n_j = 0$, \mathbf{n} — нормаль к γ , а не условие периодичности по y_3 (условия периодичности по y_1, y_2 сохраняются). Исследуем функцию, которая получается путем усреднения (21) по P_1 :

$$(23) \quad \gamma_{\beta\alpha}(\mathbf{u}^{(0)}) \rightarrow \langle a_{ij\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha}(\mathbf{u}^{(0)}) + a_{ijkl}\tilde{u}_{k,ly}^{(1)} \rangle \equiv \Phi_{\beta\alpha}(\mathbf{u}^{(0)})$$

($\tilde{\mathbf{u}}^{(1)}$ — решение (22)). Функция (23) задает определяющие соотношения в плоскости пластинки. Аналогично [1] (отмеченное выше отличие от [1] в данном случае не играет существенной роли) устанавливается, что: а) (23) является гиперупругим законом; б) задача $\langle \sigma_{i\alpha}^{(-3)} \rangle_{,\alpha x} = \Phi_{\beta\alpha}(\mathbf{u}^{(0)})_{,\alpha x} = 0$ (см. (10)) с краевым условием $u_{\alpha}^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$ на $\partial\Gamma$ имеет единственное решение (нулевое). В результате $u_{\alpha}^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$ ($\alpha = 1, 2$), откуда (см. (18))

$$(24) \quad u_{\beta}^{(1)} = -y_3\delta_{\beta\alpha}u_{3,\alpha x}^{(0)} + \tilde{u}_{\beta}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (\alpha, \beta = 1, 2);$$

$$(25) \quad u_3^{(1)} = \tilde{u}_3(\tilde{\mathbf{x}}).$$

Г. Рассмотрим теперь случай $m = -2$ в (8). При этом

$$\sigma_{ij}^{(-2)} = a_{ijkl}(\mathbf{y})u_{k,ly}^{(3)} + a_{ijk\alpha}(\mathbf{y})u_{k,\alpha x}^{(1)}.$$

Подставив выражение $\mathbf{u}^{(1)}$, согласно (24), (25), получим

$$(26) \quad \sigma_{ij}^{(-2)} = a_{ijkl}u_{k,ly}^{(3)} + a_{ij\beta\alpha}\{-y_3u_{3,\beta x}^{(0)} + \tilde{u}_{\beta}\}_{,\alpha x} + \\ + a_{ij3\alpha}\tilde{u}_{3,\alpha x}^{(2)} = a_{ijkl}u_{k,ly}^{(2)} - a_{ij\beta\alpha}y_3u_{3,\beta\alpha x}^{(0)} + a_{ijk\alpha}\tilde{u}_{k,\alpha x}.$$

Положим теперь в (7) $m = -2$, $k = 2$ и возьмем $\mathbf{w} = \varepsilon^2\mathbf{w}^{(2)}(\mathbf{y})$ (\mathbf{w} — периодическая функция по y_1, y_2). Переходя от интегрирования по Ω_1 к интегрированию по P_1 , в силу периодичности функций в (7) [1] имеем

$$(27) \quad \varepsilon^{-1} \int_{P_1} \sigma_{ij}^{(-2)}w_{i,jy}^{(2)} dy \geq 0 \quad \text{для любой } \mathbf{v}^{(2)} \in \tilde{M}.$$

Подстановка (26) в (27) приводит к неравенству

$$(28) \quad \int_{P_1} \{a_{ijkl}u_{k,ly}^{(3)} - a_{ij\beta\alpha}y_3u_{3,\alpha\beta x}^{(0)} + a_{ijk\alpha}\tilde{u}_{k,\alpha x}\} \times \\ \times (\mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{v}^{(2)})_{i,jy} dy \geq 0 \quad \text{для любой } \mathbf{v}^{(2)} \in \tilde{M}.$$

Здесь вновь встречаемся с ситуацией, аналогичной обсуждавшейся в связи с неравенством (16), обусловленной нелинейностью задачи. Поступим следующим образом. Введем функцию

$$(29) \quad \tilde{u}_i^{(2)} = u_i^{(2)} - y_3\delta_{i\alpha}\tilde{u}_{3,\alpha x}.$$

Подставив (29) в (28), получим

$$(30) \quad \int_{P_1} \{a_{ijkl}\tilde{u}_{k,ly}^{(2)} - a_{ij\beta\alpha}y_3u_{3,\alpha\beta x}^{(0)} + a_{ijk\alpha}\tilde{u}_{k,\alpha x}\} \times \\ \times (\tilde{\mathbf{u}}^{(2)} - \mathbf{v}^{(2)})_{i,jy} dy + \text{mes } S_1 \langle \sigma_{\alpha 3}^{(-2)} \rangle(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{u}_{3,\alpha x}(\tilde{\mathbf{x}}) \geq 0.$$

Последний член в левой части (30) равен нулю согласно второму равенству в (10). Итак,

$$(31) \int_{P_1} \{a_{ijkl} \tilde{u}_{k,ly}^{(1)} - a_{ij\beta\alpha} y_3 u_{3,\alpha\beta x}^{(0)} + a_{ij\beta\alpha} \gamma_{\beta\alpha}(\tilde{\mathbf{u}})\} (\tilde{\mathbf{u}}^{(2)} - \mathbf{v}^{(2)})_{i,jy} dy \geq 0$$

для любой $\mathbf{v}^{(2)} \in \tilde{M}$.

Неравенство (31), представляющее собой ячеечную задачу «первого порядка» в смысле [3] и имеющее единственное решение [1], определяет функцию, ставящую в соответствие величинам $\gamma_{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}$ решение ячеечной задачи (31):

$$(32) \quad (\gamma_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta} \equiv u_{3,\alpha\beta x}^{(0)}) \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}^{(2)} \equiv \Psi(\mathbf{y}, \gamma_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta}).$$

В силу (29), (32)

$$(33) \quad u_i^{(2)} = \Psi_i(\mathbf{y}, \gamma_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta}) + y_3 \delta_{i\alpha} \tilde{u}_{3,\alpha x}.$$

Подстановка (33) в (26), совпадающая с результатом подстановки $\tilde{\mathbf{u}}^{(2)}$ (29) в выражение в квадратных скобках (31), дает

$$(34) \quad \sigma_{ij}^{(-2)} = a_{ijkl} \Psi_k(\mathbf{y}, \gamma_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta})_{,ly} - a_{ij\beta\alpha} y_3 \rho_{\beta\alpha} + a_{ij\beta\alpha} \gamma_{\beta\alpha}.$$

Усреднение (34) по ячейке периодичности P_1 приводит к функции

$$(35) \quad (\gamma_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta}) \rightarrow \langle \sigma_{ij}^{(-2)} \rangle = \langle a_{ijkl} \Psi_k(\mathbf{y}, \gamma_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta})_{,ly} - a_{ij\beta\alpha} y_3 \rho_{\beta\alpha} + a_{ij\beta\alpha} \gamma_{\beta\alpha} \rangle \equiv \Xi_{\alpha\beta}(\gamma_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta}).$$

Умножив (34) на y_3 и усреднив получившееся равенство по P_1 , найдем

$$(36) \quad M_{ij}^{(-2)} = \langle \sigma_{ij}^{(-2)} y_3 \rangle = \langle y_3 a_{ijkl} \Psi_k(\mathbf{y}, \gamma_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta})_{,ly} - y_3^2 a_{ij\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} + y_3 a_{ij\beta\alpha} \gamma_{\beta\alpha} \rangle \equiv \Lambda_{\alpha\beta}(\gamma_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta}).$$

Запишем некоторые из полученных выше соотношений. Имеем из (10)

$$(37) \quad \text{при } m = -2 \quad \langle \sigma_{i\alpha}^{(-2)} \rangle_{,\alpha x} = 0;$$

$$(38) \quad \text{при } m = -1 \quad \langle \sigma_{3\alpha}^{(-1)} \rangle_{,\alpha x} - \langle g_3 \rangle_{,\gamma} = \langle f_3 \rangle;$$

из (14), (35), (36) соответственно

$$(39) \quad -M_{\beta\alpha,\alpha x}^{(-2)} + \langle \sigma_{\beta 3}^{(-1)} \rangle = 0;$$

$$(40) \quad \langle \sigma_{\alpha\beta}^{(-2)} \rangle = \Xi_{\alpha\beta}(\gamma_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta});$$

$$(41) \quad M_{\alpha\beta}^{(-2)} = \Lambda_{\alpha\beta}(\gamma_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta}).$$

Здесь $\gamma_{\alpha\beta} = (1/2)(\tilde{u}_{\alpha,\beta x} + \tilde{u}_{\beta,\alpha x})$ — деформации в плоскости пластинки; $\rho_{\alpha\beta} = u_{3,\alpha\beta x}^{(0)}$ — кривизны пластинки (точнее, ее предельной поверхности).

Краевые условия вытекают из исходных краевых условий $\mathbf{u}^e(\mathbf{x}) = 0$ на Γ_e^0 , переходящих в силу (24), (25) в следующие:

$$(42) \quad u_3^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}}) = 0, \quad \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}(\tilde{\mathbf{x}}) = 0, \quad \tilde{u}_1(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{u}_2(\tilde{\mathbf{x}}) = 0 \text{ на } \partial\Gamma$$

(Γ — проекция области $\tilde{\Omega}_e$ на плоскость Ox_1x_2 , она не зависит от ϵ).

Уравнения (37)–(39) — уравнения равновесия теории пластинок; (40), (41) — определяющие соотношения. Как видно из предыдущего, соотношения (40), (41), найденные на основании решения ячеечных задач, являются нелинейными функциями деформаций $\gamma_{\alpha\beta}$ и кривизн $\rho_{\alpha\beta}$. При этом (40) описывает свойства пластинки в ее плоскости, а (41) — свойства пластинки на изгиб.

З а м е ч а н и е 5. При отсутствии односторонних контактов формулы (37)–(41) переходят в найденные в [3] для сплошной пластинки.

Обоснование описанного выше формального разложения можно провести, воспользовавшись предложенными в [1, 2, 6] методами.

Полученные результаты позволяют вывести формулы для расчета усредненных характеристик сеток, тканей и т. п. Отметим, что для указанных материалов эффективно применение аппроксимационного метода решения ячеечных задач [7—10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний.— М.: Мир, 1984.
2. Каламкар А. Л., Кудрявцев Б. А., Партоян В. З. Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела.— М.: ВИНТИ, 1987.— Т. 19.
3. Gaillie D. Thin elastic and periodic plates // Math. Meth. Appl. Sci.— 1984.— N 6.
4. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике.— М.: Мир, 1980.
5. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1979.
6. Панасенко Г. П. Осреднение системы уравнений теории упругости для неоднородной пластины // УМН.— 1985.— Т. 40, № 5.
7. Колпаков А. Г. К определению усредненных характеристик упругих каркасов // ПММ.— 1985.— Т. 49, вып. 6.
8. Kolpakov A. G. Mechanics of composite frameworks // Шести национален конгресс по теоретична и приложна механика. Резюме.— Варна, 1989.
9. Annin B. D., Kalamkarov A. L., Kolpakov A. G. Analysis of local stresses in high modulus fiber composites // Localized Damage Computer—Aided Assessment and Control.— Southampton: Comput. Mech. Publ., 1990.— V. 2.
10. Kolpakov A. G. On dependence of velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // IInd World Congr. on Computational Mechanics, Stuttgart, 1990: Extended Abstracts of Lectures.

г. Новосибирск

Поступила 10/V 1990 г.

УДК 534.11 + 539.4

К. С. Адамова, М. А. Каниболотский

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ВИБРОИЗОЛИРУЮЩЕГО ЭКРАНА ПРИ ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

При падении волны на границу раздела сред с различными физико-механическими свойствами в слоистой среде возникает система отраженных и преломленных волн. Меняя количество, размеры и материалы слоев, можно управлять интенсивностью спектра волнового процесса. Естественно, возникает задача оптимизации структуры слоистой среды при различных критериях оптимизации и ограничениях на характеристики волнового процесса. В ряде работ [1—5] рассматривались вопросы оптимизации структуры многослойных звукоотражающих экранов, причем материалы слоев могли выбираться из заданного конечного набора. Исследовались случаи как нормального, так и наклонного падения плоской акустической волны. Если число и последовательность расположения материалов слоев заранее не заданы, то задача оптимизации формулируется в рамках теории оптимального управления. Для вывода необходимых условий оптимальности и построения алгоритма численных расчетов использовался принцип максимума Понтрягина и аппарат игольчатого варьирования. Эти методы, обобщенные в [5], применялись также при оптимальном проектировании свободноколеблющейся слоистой толстостенной сферы минимальной массы [6], в ряде задач статической термоупругости толстостенных сферических сосудов [7, 8], при проектировании слоистой теплозащиты [5, 9, 10] и волновых электромагнитных фильтров [2]. Во всех упомянутых работах спектральные характеристики волнового процесса зависели от одной пространственной переменной и описывались обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В настоящей работе исследуется процесс установившихся колебаний плоского упругослоистого экрана, жестко сцепленного с упругим полупространством, под действием гармонической сосредоточенной силы. Требуется оптимизировать структуру слоистого экрана из условия минимизации суммарного потока мощности волновой энергии в упругое полупространство. Спектральные характеристики волнового процесса будут зависеть от двух пространственных переменных и описываться уравнениями в частных производных. Применяя интегральное преобразование Ханкеля [11] по радиальной координате, удастся сформулировать соответствующую задачу оптимизации для изображений, которые описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены необходимые условия оптимальности, предложены алгоритм и приведены примеры численных расчетов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим установившиеся колебания упругослоистого экрана толщины $l > 0$, жестко сцепленного с упругим полу-