

УДК 532.538

## ЗАДАЧА О ТЕЧЕНИИ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ НАД ЩИТОМ ПРИ НАЛИЧИИ ВИХРЯ

В. П. Житников, А. А. Ошмарин, С. С. Поречный, Н. М. Шерыхалина

Уфимский государственный авиационный технический университет, 450000 Уфа  
E-mail: zhitnik@ugatu.ac.ru

Исследовано ограниченное свободной поверхностью течение идеальной невязкой весомой несжимаемой жидкости вдоль полубесконечной пластины с образованием вихря вблизи ее кромки. Рассмотрены течения типа уединенной волны. Найдено единственное решение со свободным вихрем.

Ключевые слова: плоская модель, весомая жидкость, точечный вихрь.

**Введение.** Термин “гидродинамическая неопределенность” связан с существованием множества решений задачи, построенных с использованием модели идеальной жидкости. В качестве примера можно указать на неопределенность выбора точки отрыва свободной поверхности от гладкой поверхности обтекаемого тела. В данной работе изучаются проблемы, обусловленные такой неопределенностью и приводящие к необходимости выбора решения модельной задачи о водосливе, представляющей теоретический интерес, а также приближенно описывающей течение жидкости в центробежной форсунке.

Для разрешения неопределенности используются эмпирические или полуэмпирические закономерности. Для центробежной форсунки был разработан “принцип максимального расхода” (ПМР) [1]. Однако теория центробежной форсунки, незавершенность которой обусловлена отсутствием адекватных гидродинамических и соответственно математических моделей, и в настоящее время вызывает интерес исследователей. В работе [2] на основе законов сохранения проведен расчет течения в центробежной форсунке, результаты которого существенно отличаются от данных, полученных с помощью ПМР. В [3] этот подход был подвергнут критике, в ответ на которую в работе [4] с использованием метода, предложенного в [2], в качестве модельного плоского течения были рассчитаны параметры плоской задачи о водосливе. Поскольку в указанных работах построение течений не проводилось, целью настоящей работы является численное исследование решений задачи о водосливе.

**1. Постановка задачи.** Моделью течения в центробежной форсунке с насадком Борда является осесимметричное движение жидкости, закрученной вдоль оси симметрии  $x$  (рис. 1) [2–4]. При этом составляющие скорости жидкости связаны соотношениями  $V_{full}^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_\varphi^2$ ,  $V_\varphi = \Gamma_\varphi / (2\pi r)$ .

При отсутствии влияния силы тяжести и постоянном давлении на свободной поверхности  $P = P_0$  из уравнения (интеграл Бернулли)

$$\rho V^2 / 2 + P + \rho g y = c \quad (1)$$

( $c = \text{const}$ ) следуют соотношения

$$\frac{V^2}{V_{full}^2} + \frac{\Gamma_\varphi^2}{2\pi^2 V_{full}^2 R^2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 = 1, \quad V^2 = V_x^2 + V_y^2. \quad (2)$$

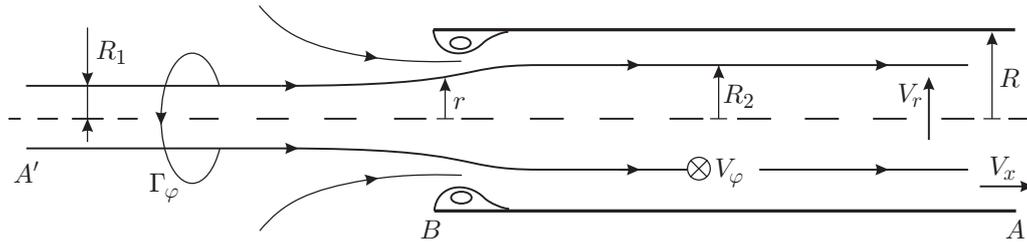


Рис. 1. Схема течения жидкости через центробежную форсунку с цилиндрическим насадком

Будем полагать, что изменение ординаты  $y$  на свободной поверхности мало по сравнению с радиусом трубы  $R$ . Положим также, что  $h, V_0$  — асимптотические толщина струи и скорость жидкости на бесконечности справа,  $r = R - y$ . Тогда условие (2) можно линеаризовать:

$$\frac{V^2}{V_0^2} + 2K \frac{y}{h} = c_1, \quad K = \frac{\Gamma_\varphi^2}{2\pi^2 V_0^2} \left(\frac{h}{R}\right)^3. \quad (3)$$

В случае если  $K = 1/\text{Fr}^2$  ( $\text{Fr} = V_0/\sqrt{gh}$ ;  $c_1 = \text{const} = 1 + 2/\text{Fr}^2$ ;  $g$  — ускорение свободного падения), уравнение (3) совпадает с интегралом Бернулли (1) для плоского течения весомой жидкости при постоянном давлении.

Таким образом, решение плоской задачи о течении весомой жидкости (о водосливе) может быть использовано для приближенного описания процессов в центробежной форсунке. Сравнение плоских и осесимметричных течений [5, 6] показывает отсутствие качественных различий форм границ и зависимостей параметров. В случае течения в трубе при небольших по сравнению с ее радиусом толщинах струи исчезает и количественное различие.

Рассмотрим задачу об обтекании препятствия в виде прямолинейной полубесконечной пластины  $ABD$  потоком идеальной невязкой весомой несжимаемой жидкости с образованием в точке  $C$  вихря с интенсивностью  $\Gamma < 0$  (рис. 2). В точке  $E$ , расположенной ниже точки  $B$  по потоку и находящейся на границе замкнутой зоны течения вокруг вихря, скорость равна нулю. Течение считается потенциальным и соленоидальным. Решение задачи можно получить в виде аналитической функции комплексной переменной  $w(z)$ , где  $z = x + iy$ ;  $w = \varphi + i\psi$  — комплексный потенциал;  $\varphi$  — потенциал течения;  $\psi$  — функция тока. Тогда вектор комплексно-сопряженной скорости частиц жидкости равен  $\bar{V} = dw/dz$ . Границы потока являются непроницаемыми. Областью потока на плоскости комплексного потенциала является полоса с присоединенной полуполосой (рис. 3,а), представляющей собой образ ограниченной области потока вокруг вихря.

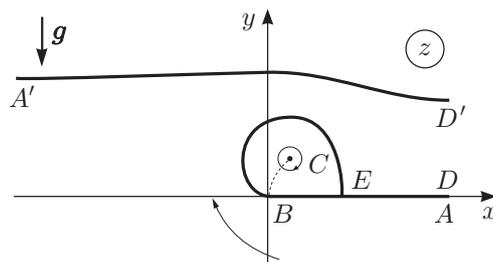


Рис. 2. Область течения на физической плоскости

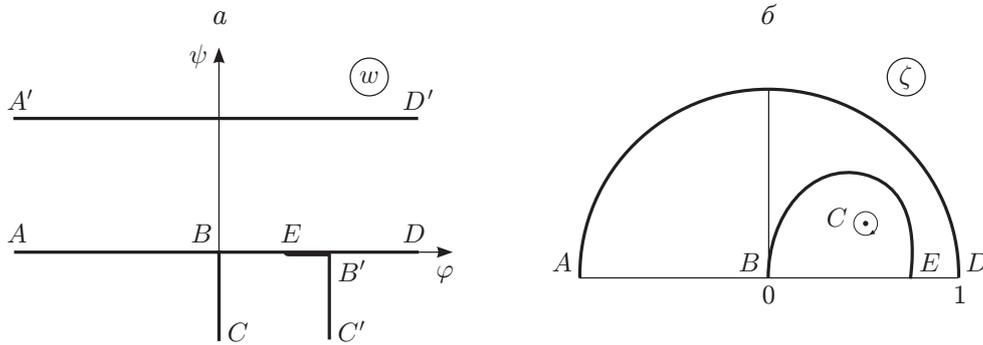


Рис. 3. Области течения на плоскостях комплексного потенциала (а) и параметрической переменной (б)

Пусть  $V_0$  — скорость на бесконечности справа,  $h$  — асимптотическая толщина струи справа, сила тяжести направлена вертикально вниз. На свободной поверхности  $AD$  значение модуля вектора скорости жидкости  $V$  связано с высотой точки  $y$  уравнением (3). На других участках границы имеют место следующие краевые условия:  $\theta = \pi$  на  $AB$ ,  $\theta = \pi$  на  $BE$ ,  $\theta = 0$  на  $ED$  ( $\theta$  — угол наклона вектора скорости к оси  $x$ ;  $C$  — точка, в которой расположен вихрь;  $E$  — критическая точка).

**2. Метод решения.** Области на плоскостях  $z$  и  $W$  конформно отображаются на верхний полукруг  $\zeta$  (рис. 3, б). С помощью метода особых точек Чаплыгина функцию  $w(\zeta)$  представим в виде

$$w(\zeta) = hV_0 \left( \frac{2}{\pi} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} + \frac{\gamma}{2\pi i} \ln \frac{(\zeta-p)(\zeta-1/p)}{(\zeta-\bar{p})(\zeta-1/\bar{p})} \right), \quad \gamma = \frac{\Gamma}{hV_0},$$

где  $p$  — образ точки  $z_C$ , в которой расположен вихрь, на плоскости  $\zeta$ . Комплексное значение параметра  $p$  либо считается заданным, либо выбирается из условия равенства нулю силы, действующей на вихрь со стороны потока. Производная функции  $w(\zeta)$  имеет вид

$$\frac{dw}{d\zeta} = Q \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2}{1-\zeta^2} + \frac{\gamma}{4i} \left( \frac{1}{\zeta-p} + \frac{1}{\zeta-p^{-1}} - \frac{1}{\zeta-\bar{p}} - \frac{1}{\zeta-\bar{p}^{-1}} \right) \right].$$

Условие конечности скорости в точке отрыва  $B$  ( $\zeta = 0$ ) приводит к необходимости выполнения двух равенств:  $(dw/d\zeta)(0) = 0$ ,  $(dz/d\zeta)(0) = 0$ , первое из которых связывает параметры  $\gamma$  и  $p$  следующим образом:

$$2 + \frac{\gamma}{4i} \left( -\frac{1}{p} - p + \frac{1}{\bar{p}} + \bar{p} \right) = 0, \quad \gamma = -\frac{4|p|}{(1-|p|)\operatorname{Im} p}.$$

При решении с использованием модифицированного метода Леви — Чивиты функцию  $z(\zeta)$  будем искать в виде суммы степенного ряда и некоторых функций, учитывающих заданные особенности в точках:

$$z(\zeta) = h(z_0(\zeta) + z_1(\zeta) + z_2(\zeta)).$$

Здесь  $z_0(\zeta)$  — функция, отображающая полукруг на некоторую фигуру с боковым разрезом:

$$z_0(\zeta) = A_1 \frac{2}{\pi} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} - A_2 \frac{4}{\pi} \frac{\zeta}{(\zeta+1)^2} + A_3 \ln(1-\zeta^2). \quad (4)$$

В результате функция  $z_0(\zeta)$  отображает полукруг  $\zeta$  на область, форма которой приближенно соответствует форме свободной поверхности течения весомой жидкости.

Функция  $z_1(\zeta) = z(\zeta)/h - z_0(\zeta) - z_2(\zeta)$  имеет действительные значения на действительном диаметре, является аналитической внутри полукруга и непрерывной на границе. Следовательно, ее можно аналитически продолжить на весь круг и искать в виде сходящегося степенного ряда с действительными коэффициентами

$$z_1(\zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \zeta^m. \quad (5)$$

Функция (5) необходима для выполнения условия Бернулли. Функция  $z_2(\zeta)$  введена для учета особенности решения  $z(\zeta)$  при  $\zeta = 1$  и выбрана по аналогии с решениями задач со свободной поверхностью весомой жидкости [7]:

$$z_2(\zeta) = A_4((1 - \zeta)^\alpha - 1), \quad (6)$$

где  $\alpha$  — первый корень трансцендентного уравнения Стокса

$$\alpha \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \alpha \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\operatorname{Fr}^2}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

В (6) также учитывается, что функция  $z_2(\zeta)$ , как и функция  $z(\zeta)$ , должна иметь действительные значения на действительном диаметре.

Как показано выше, в точке  $B$  ( $\zeta = 0$ ) производная

$$\frac{1}{h} \frac{dz}{d\zeta}(\zeta) = A_1 \frac{4}{\pi} \frac{1}{1 - \zeta^2} - A_2 \frac{4}{\pi} \frac{1 - \zeta}{(\zeta + 1)^3} - \frac{A_3 2\zeta}{1 - \zeta^2} - A_4 \alpha (1 - \zeta)^{\alpha-1} + \sum_{m=1}^{\infty} m C_m \zeta^{m-1}$$

равна нулю. Следовательно,

$$\frac{1}{h} \frac{dz}{d\zeta}(0) = A_1 \frac{4}{\pi} - A_2 \frac{4}{\pi} - A_4 \alpha + C_1 = 0.$$

Установим связь между коэффициентами  $A_1, A_3$ . Поскольку в точке  $A$  функция  $z(\zeta)$  имеет особенность,  $w \sim \ln(\zeta + 1)$ ,  $z \sim (\zeta + 1)^{-2}$  и производная  $(dw/dz)(1) = 0$ . Тогда из (3) получаем

$$y_A/h = 1 + \operatorname{Fr}^2/2.$$

С учетом (4) находим

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \operatorname{Im} \frac{z(e^{i\sigma})}{h} = A_1 - A_3 \frac{\pi}{2} = 1, \quad \lim_{\sigma \rightarrow \pi} \operatorname{Im} \frac{z(e^{i\sigma})}{h} = A_1 + A_3 \frac{\pi}{2} = \frac{y_A}{h} = 1 + \frac{\operatorname{Fr}^2}{2}.$$

Отсюда имеем

$$A_1 = 1 + \operatorname{Fr}^2/4, \quad A_3 = \operatorname{Fr}^2/(2\pi).$$

Таким образом, определен вид функции  $z(\zeta)$ .

Для того чтобы вычислить силу, действующую со стороны потока на вихрь, функцию  $w(z)$  представим в виде суммы

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_C) + w_1(z),$$

где  $w_1(z)$  — функция, аналитическая в окрестности точки  $z = z_C$ . Тогда

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\gamma Q}{2\pi i} \frac{1}{z - z_C} + \frac{dw_1}{dz}. \quad (7)$$

В соответствии с формулой Чаплыгина — Жуковского [8] и с учетом соотношения (7) величина, комплексно сопряженная силе давления потока, действующей на тело, равна

$$\bar{F} = i\rho Q\gamma \frac{dw_1}{dz}(z_C), \quad c_F = \frac{2}{\rho Q V_0} \bar{F} = \frac{2i\gamma}{V_0} \frac{dw_1}{dz}(z_C). \quad (8)$$

Введем обозначения

$$f(\zeta) = (\zeta - p) \frac{dw}{dz}, \quad g(\zeta) = (\zeta - p) \frac{dw}{d\zeta}. \quad (9)$$

Заметим, что в силу выражения (7) функции  $f$  и  $g$  являются аналитическими в полукруге  $|\zeta| < 1, \text{Im } \zeta > 0$ . Согласно (9) имеем

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{g(\zeta)}{f(\zeta)}. \quad (10)$$

С учетом (9), (10) вычислим  $(dw_1/dz)(z_C)$  в (8) в виде предела

$$\frac{dw_1}{dz}(z_C) = \lim_{z \rightarrow z_C} \left[ \frac{1}{z - z_C} \left( (z - z_C) \frac{dw}{dz} - \frac{\gamma Q}{2\pi i} \right) \right] = \frac{1}{2g} (gf)'(p).$$

Для вычисления силы при решении задачи методом прямого конформного отображения удобно использовать функции  $g(\zeta)$  и  $dz/d\zeta$ :

$$\frac{dw_1}{dz}(z_C) = \left( \frac{dz}{d\zeta} \right)^{-2} \left( \frac{dz}{d\zeta} \frac{dg}{d\zeta} - \frac{g}{2} \frac{d^2z}{d\zeta^2} \right)(p). \quad (11)$$

Для того чтобы решить задачу о свободном вихре, приравняем выражение (11) к нулю. Тогда получаем два уравнения (для действительной и мнимой частей силы) для определения комплексной величины  $p$ .

При решении задачи методом коллокаций используем алгоритмы, аналогичные описанным в работе [7]. В бесконечной сумме (5) удерживается конечное число слагаемых  $N$ , а уравнение Бернулли (3) выполняется в дискретных точках  $\sigma_m = \pi m / (2N)$ ,  $m = \overline{0, N}$ . При этом  $y = \text{Im } z$ ,  $V = |dw/dz| = |dw/d\zeta| / |dz/d\zeta|$ . Для решения задачи о свободном вихре требуется также выполнение двух условий равенства нулю составляющих силы, действующей на вихрь. Таким образом, получаем систему  $N + 3$  нелинейных уравнений относительно параметров  $C_m$  ( $m = \overline{1, N - 1}$ ),  $A_4$ ,  $p$ ,  $\Gamma$ , которая решается численно методом Ньютона с регулировкой шага.

Возможность изменения числа точек коллокаций  $N$ , а также использования современных методов анализа результатов численного эксперимента [9] позволяют получить

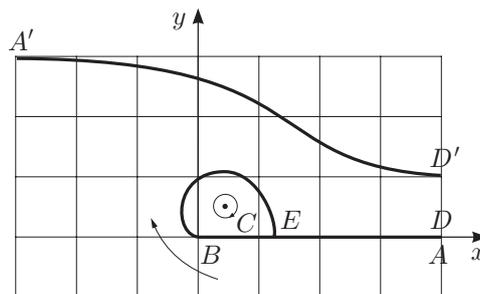


Рис. 4. Формы свободной поверхности и линии тока, разграничивающей основной поток и замкнутую вихревую зону

надежные оценки погрешности вычисления. Для случая свободного вихря некоторые результаты расчетов подтверждаются аналитически ( $Fr = 2$ , ордината точки  $A$   $y_A = 3$  [4]).

Формы свободной поверхности и линии тока, разграничивающей основной поток и замкнутую вихревую зону, показаны на рис. 4.

Проведенные численные исследования показывают, что существует единственное решение со свободным вихрем. Тем не менее для подтверждения возможности физической реализации полученного решения необходимо провести исследование его устойчивости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Диплом** на открытие 389. Закономерность расхода жидкости в закрученном потоке / Г. Н. Абрамович, Л. А. Клячко, И. И. Новиков, В. И. Скобелькин. Заявл. 18.10.90 // Открытия. Изобрет. 1991. № 19. С. 2.
2. **Луговцов Б. А.** Определение основных параметров течения в центробежной форсунке с помощью законов сохранения // ПМТФ. 1989. № 2. С. 68–73.
3. **Степанов Г. Ю.** О статье Б. А. Луговцова “Определение основных параметров течения в центробежной форсунке с помощью законов сохранения” [1] // ПМТФ. 1991. № 4. С. 102–105.
4. **Луговцов Б. А.** О принципе максимального расхода // ПМТФ. 1991. № 4. С. 105–106.
5. **Житников В. П., Терентьев А. Г.** Осесимметричное обтекание газового пузыря идеальной жидкостью // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1993. № 5. С. 15–20.
6. **Terentiev A. G., Zhitnikov V. P., Dimitrieva N. A.** An application of analytic functions to axisymmetric flow problems // Appl. Math. Modelling. 1997. V. 21, N 2. P. 91–96.
7. **Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Шерыхалин О. И.** Исследование закритических режимов в нелинейной задаче о движении вихря под свободной поверхностью весомой жидкости // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 1. С. 70–76.
8. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973.
9. **Житников В. П., Шерыхалина Н. М.** Уточнение решений сложных вычислительных задач с помощью постпроцессорной обработки численных результатов // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 6. С. 61–65.

*Поступила в редакцию 23/XII 2008 г.,  
в окончательном варианте — 15/XII 2009 г.*

---