УДК 537.84

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Г. В. Алексеев

Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041 Владивосток

Формулируются задачи управления для стационарной модели магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области с непроницаемой идеально проводящей границей. Исследуется их разрешимость, обосновывается применение принципа Лагранжа, выводятся и анализируются системы оптимальности.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, вязкая жидкость, задачи управления.

Задачи управления течениями вязкой проводящей жидкости играют важную роль в ряде прикладных областей магнитной гидродинамики, в том числе при разработке магнитогидродинамических (МГД) генераторов, создании новых подводных двигателей, моделировании систем охлаждения ядерных реакторов, управлении термоядерным синтезом [1, 2]. Разработке методов и алгоритмов решения указанных задач посвящено большое количество работ. Менее изучены теоретические вопросы, связанные с анализом разрешимости и исследованием свойств решений задач управления. Настоящая работа посвящена рассмотрению указанных вопросов для МГД-модели вязкой жидкости.

1. Постановка краевой задачи. Пусть Ω — ограниченная область с непроницаемой идеально проводящей границей Γ. Рассмотрим в области Ω краевую задачу для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой жидкости, в безразмерных переменных имеющую вид

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p - \mu\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{f}, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0; \tag{1.1}$$

$$\nu_m\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \boldsymbol{E} + \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{E}_0, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0, \qquad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0; \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{1.3}$$

Здесь $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ — векторы скорости и напряженностей электрического и магнитного полей соответственно; p — давление; $\nu = 1/\mathrm{Re}$; $\nu_m = 1/\mathrm{Re}_m$; Re — число Рейнольдса; Re_m — магнитное число Рейнольдса; μ — безразмерный параметр; $\boldsymbol{f}$ — безразмерный вектор плотности внешних массовых сил; $\boldsymbol{E}_0$ — напряженность сторонних сил (о физическом смысле и свойствах функции $\boldsymbol{E}_0$ подробнее см. [3, с. 47]).

Целью работы являются формулировка и исследование задач управления для модели (1.1)–(1.3). Для того чтобы сформулировать задачу управления, разобьем исходные данные, т. е. пару $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{E}_0)$, на две группы: группу жестких (неизменяемых) данных и группу управлений. К первой группе отнесем плотность $\boldsymbol{f}$, к группе управлений — функцию $\boldsymbol{E}_0$, которую будем считать неизвестной и которую будем выбирать из условия минимума определенного функционала качества (см. п. **3**).

Для исследования сформулированной таким образом задачи управления будем применять методику, разработанную в [4–6] для задач управления на основе стационарных моделей тепломассопереноса. С ее помощью задачи управления сводятся к задачам, принадлежащим классу условных экстремальных задач в гильбертовых пространствах, где в качестве основного ограничения используется слабая (в смысле обобщенных функций) формулировка модели. К полученной задаче применяется развитая теория решения абстрактных задач такого типа (см., например, [7]). Использование этого подхода существенно упрощает вывод системы оптимальности и сводит задачу ее построения к проверке ряда условий, обеспечивающих справедливость указанной теории. В данном случае такими условиями являются непрерывная дифференцируемость функционала качества и операторов рассматриваемой модели по переменным состояния (скорости, давлению, температуре), которая обычно имеет место, и их выпуклая зависимость от управляющих параметров, которая, как правило, подразумевается. Основным условием, подлежащим проверке, является фредгольмовость линейного оператора, равного производной Фреше по состоянию от оператора рассматриваемой модели.

Отметим, что близкая по постановке задача управления для упрощенной МГД-модели (в которой напряженность $\boldsymbol{H}$ считается заданной) рассмотрена в [8], где в качестве управления выбрана нормальная к границе компонента электрического тока.

При построении соответствующей теории для модели (1.1)–(1.3) будем использовать пространства Соболева $H^s(D)$, $L^2(\Omega) \equiv H^0(\Omega)$ и их векторные аналоги $\boldsymbol{H}^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$, где под D понимается Ω либо Γ. Скалярные произведения в $L^2(\Omega)$ и $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ будем обозначать через $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, норму в $L^2(\Omega)$ — через $\|\cdot\|$, норму либо полунорму в $H^1(\Omega)$ и $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ — через $\|\cdot\|_1$ либо $|\cdot|_1$, отношение двойственности для пары X и X^* — через $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{X^*\times X}$ или через $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. Положим $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega)\colon (p,1) = 0\}$, $H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega)\colon \varphi\big|_\Gamma = 0\}$, $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)^3$, $\boldsymbol{H}_T^1(\Omega) = \{\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)\colon \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}\big|_\Gamma = 0\}$, $\boldsymbol{H}(\mathrm{rot};\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)\colon \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)\}$, $\boldsymbol{H}^1(\Delta;\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)\colon \Delta\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)\}$. Здесь, в частности, $\boldsymbol{H}_T^1(\Omega)$ состоит из векторов $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$, тангенциальных на Γ. Детальное описание свойств этих пространств приведено в [9–11]. Пусть выполняются следующие условия:

Условие 1. Ω — выпуклый многогранник либо ограниченная конечносвязная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{1,1}$, состоящей из p_0+1 связных компонент $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{p_0}$ (Γ_0 — граница неограниченной компоненты множества $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$), и существуют поверхности $\Sigma_i \in C^2$, $i = 1, 2, \ldots, q_0$ такие, что $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \varnothing$ при $i \neq j$, причем множество $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{q_0} \Sigma_i$ односвязно и липшицево.

Условие 2. $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$.

Условие 3. $\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$.

Числа q_0 и p_0, входящие в условие 1, называются соответственно первым и вторым числами Бетти. Они являются топологическими характеристиками области Ω, причем $p_0 = 0$ тогда и только тогда, когда граница Γ связна, а $q_0 = 0$ тогда и только тогда, когда область Ω односвязна. Введем два пространства гармонических в Ω векторов $\mathcal{H}(e)$ и $\mathcal{H}(m)$, состоящих из решений однородных задач электрического и магнитного типа:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Как известно, пространства $\mathcal{H}(e)$ и $\mathcal{H}(m)$ конечномерны, причем $\dim\mathcal{H}(e) = p_0$, $\dim\mathcal{H}(m) = q_0$ [12]. Обозначим через $\mathcal{H}(m)^\perp$ ортогональное дополнение к $\mathcal{H}(m)$ в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$.

При исследовании задачи основную роль будут играть пространства $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\colon \mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0\}$, $\boldsymbol{V}_T = \{\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{H}_T^1(\Omega) \cap \mathcal{H}(m)^\perp\colon \mathrm{div}\,\boldsymbol{h} = 0\}$, произведение $X = \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}_T$, а также двойственные к ним пространства $\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega) = (\boldsymbol{H}_0^1(\Omega))^*$, $\boldsymbol{V}^*$, $\boldsymbol{V}_T^*$ и $X^* = \boldsymbol{V}^*\times\boldsymbol{V}_T^*$. Каждое из пространств $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{V}_T$ является гильбертовым с нормой $\|\cdot\|_1$.

Пространство X гильбертово с нормой $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{h}) \to \|(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{h})\|_1 = (\|\boldsymbol{v}\|_1^2 + \|\boldsymbol{h}\|_1^2)^{1/2}$. Справедливо ортогональное разложение [12]

$$\boldsymbol{L}^2(\Omega) = \operatorname{rot} \boldsymbol{V}_T \oplus \nabla H_0^1(\Omega) \oplus \mathcal{H}(e), \tag{1.4}$$

которое означает, что любой вектор $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ представим единственным образом в виде $\boldsymbol{f} = \operatorname{rot} \boldsymbol{q} + \nabla\varphi + \boldsymbol{e}$. Здесь векторный потенциал $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{V}_T$, скалярный потенциал $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ и гармонический вектор $\boldsymbol{e} \in \mathcal{H}(e)$ однозначно определяются по $\boldsymbol{f}$.

Введем билинейные и трилинейные формы:

$$\begin{gathered} a_0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int\limits_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v}\, d\Omega, \qquad a_1(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{\Psi}) = \int\limits_\Omega \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}\, d\Omega, \\ c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \equiv \int\limits_\Omega [(\boldsymbol{u} \cdot \operatorname{grad})\boldsymbol{v}] \cdot \boldsymbol{w}\, d\Omega, \qquad c_1(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{u}) = \int\limits_\Omega (\operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi} \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{u}\, d\Omega. \end{gathered} \tag{1.5}$$

При выполнении условия 1 введенные формы непрерывны, а формы a_0 и a_1 к тому же коэрцитивны на пространствах $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{V}_T$ соответственно [11, 12]. Существуют также константы C_1, α_i, γ_i, γ_i' $(i = 0, 1)$, зависящие от Ω, с которыми выполняются неравенства

$$|a_0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leqslant \|\boldsymbol{u}\|_1 \|\boldsymbol{v}\|_1 \quad \forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)^2, \qquad a_0(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geqslant \alpha_0 \|\boldsymbol{v}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}; \tag{1.6}$$

$$|a_1(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{\Psi})| \leqslant C_1^2 \|\boldsymbol{H}\|_1 \|\boldsymbol{\Psi}\|_1 \quad \forall (\boldsymbol{H}, \boldsymbol{\Psi}) \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)^2, \qquad a_1(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Psi}) \geqslant \alpha_1 \|\boldsymbol{\Psi}\|_1^2 \quad \forall \boldsymbol{\Psi} \in \boldsymbol{V}_T; \tag{1.7}$$

$$|c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leqslant \gamma' \|\boldsymbol{u}\|_1 \|\boldsymbol{v}\|_1 \|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{L}^4(\Omega)} \leqslant \gamma \|\boldsymbol{u}\|_1 \|\boldsymbol{v}\|_1 \|\boldsymbol{w}\|_1 \qquad \forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)^3; \tag{1.8}$$

$$|c_1(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{v})| \leqslant \gamma_1' \|\boldsymbol{\Psi}\|_1 \|\boldsymbol{H}\|_1 \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{L}^4(\Omega)} \leqslant \gamma_1 \|\boldsymbol{\Psi}\|_1 \|\boldsymbol{H}\|_1 \|\boldsymbol{v}\|_1 \qquad \forall (\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)^3. \tag{1.9}$$

Кроме того, известно (см., например, [9]), что

$$c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0, \quad c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}, \quad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \quad \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega). \tag{1.10}$$

Положим $\nu_1 = \mu\nu_m$, $a((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}), (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi})) \equiv \nu a_0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \nu_1 a_1(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{\Psi})$, $\lambda_* = \min(\alpha_0\nu, \alpha_1\nu_1)$. В силу (1.6), (1.7) форма a коэрцитивна на пространстве X с константой λ_*, так что

$$a((\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi}), (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi})) \geqslant \lambda_* \|(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi})\|_1^2 \equiv \lambda_*(\|\boldsymbol{v}\|_1^2 + \|\boldsymbol{\Psi}\|_1^2) \qquad \forall (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi}) \in X. \tag{1.11}$$

Ниже будем использовать следующие формулы Грина:

$$(\boldsymbol{u}, \operatorname{grad}\varphi) = -(\operatorname{div} \boldsymbol{u}, \varphi) \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \quad \varphi \in H^1(\Omega); \tag{1.12}$$

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{q}, \operatorname{rot} \boldsymbol{w}) = -\langle \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{n}, \boldsymbol{w} \rangle_\Gamma \qquad \forall \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{H}(\mathrm{rot}; \Omega), \quad \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega); \tag{1.13}$$

$$-(\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}) \equiv \int\limits_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v}\, d\Omega \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1(\Delta; \Omega), \quad \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega). \tag{1.14}$$

Здесь $\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{H}^{-1/2}(\Gamma)$ — тангенциальный след функции $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{H}(\mathrm{rot}; \Omega)$; $\langle \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{n}, \boldsymbol{w} \rangle_\Gamma$ — значение функционала $\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{n}$ на элементе $\boldsymbol{w}\big|_\Gamma \in \boldsymbol{H}^{1/2}(\Gamma)$.

Отметим, что разрешимость задачи (1.1)–(1.3) исследовалась в ряде работ [13, 14]. Однако результатами этих работ мы не можем воспользоваться, так как в них рассматривались другие функциональные пространства и условия на исходные данные. Поэтому сначала исследуем разрешимость задачи (1.1)–(1.3) (задачи 1).

2. Исследование задачи 1. Введем элемент $\boldsymbol{F} \in X^*$: $\langle \boldsymbol{F}, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi}) \rangle = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) + \mu(\boldsymbol{E}_0, \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi})$. Очевидно, что

$$\|\boldsymbol{F}\|_{X^*} \leqslant M \equiv \|\boldsymbol{f}\| + \mu \|\boldsymbol{E}_0\|. \tag{2.1}$$

Умножим первое уравнение в (1.1) на $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, а первое уравнение в (1.2) — на $\mu \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}$ ($\boldsymbol{\Psi} \in \boldsymbol{V}_T$), проинтегрируем по Ω и применим формулы (1.12)–(1.14). Учитывая, что в силу (1.13) и условий $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$ в Ω, $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} = 0$ на Γ $(\boldsymbol{E}, \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}) = 0$, получим

$$\nu \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v}\, d\Omega + \int_\Omega [(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{v}\, d\Omega - \mu \int_\Omega (\operatorname{rot} \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{v}\, d\Omega - \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, d\Omega; \quad (2.2)$$

$$\nu_1 \int_\Omega \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}\, d\Omega + \mu \int_\Omega (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{u}) \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}\, d\Omega = \mu \int_\Omega \boldsymbol{E}_0 \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}\, d\Omega. \quad (2.3)$$

Складывая сужение тождества (2.2) на пространство $\boldsymbol{V}$ и (2.3), приходим к слабой формулировке задачи 1: найти пару $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}) \in X \equiv \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}_T$, удовлетворяющую тождеству, которое с учетом обозначений п. **1** имеет вид

$$a((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}), (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi})) + c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \mu[c_1(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{u}) - c_1(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{v})] = \langle \boldsymbol{F}, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi}) \rangle \quad \forall (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi}) \in X. \quad (2.4)$$

Следует отметить, что хотя в тождество (2.4) не входят давление p и электрическое поле $\boldsymbol{E}$, их можно восстановить по паре $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}) \in X$, удовлетворяющей (2.4). Действительно, полагая в (2.4) $\boldsymbol{\Psi} = 0$, имеем $\nu a_0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - \mu c_1(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})$ $\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$. Введем функционал $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{f})$ в $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, действующий по формуле $\langle \boldsymbol{L}, \boldsymbol{v} \rangle = \nu a_0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - \mu c_1(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})$. Очевидно, что $\boldsymbol{L} \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$, причем сужение $\boldsymbol{L}$ на $\boldsymbol{V}$ удовлетворяет условию $\langle \boldsymbol{L}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ $\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$. В этом случае из [10, с. 22] следует существование функции (давления) $p \in L_0^2(\Omega)$ такой, что выполняется тождество (2.2), эквивалентное уравнению (1.1) в смысле обобщенных функций.

Полагая в (2.4) $\boldsymbol{v} = 0$, приходим к тождеству (2.3), которое означает, что вектор $\nu_m \operatorname{rot} \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{E}_0$ ортогонален $\operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}$ ($\boldsymbol{\Psi} \in \boldsymbol{V}_T$ — произвольная вектор-функция). В силу (1.4) это возможно тогда и только тогда, когда $\nu_m \operatorname{rot} \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{E}_0 = \operatorname{grad} \varphi + \boldsymbol{e}$. Здесь $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ — скалярный потенциал; $\boldsymbol{e} \in \mathcal{H}(e)$ — некоторый вектор. Положим $\boldsymbol{E} = \operatorname{grad} \varphi + \boldsymbol{e}$. Тогда с учетом условий $\operatorname{rot} \boldsymbol{e} = 0$, $\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n}\big|_\Gamma = 0$, $\varphi\big|_\Gamma = 0$ получим $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$, $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n}\big|_\Gamma = 0$, при этом тройка $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{E})$ удовлетворяет всем соотношениям в (1.2).

Отметим, что парой $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}) \in \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}_T$, удовлетворяющей (2.4), давление $p \in L_0^2(\Omega)$ и электрическое поле $\boldsymbol{E}$ определяются единственным образом. Это позволяет корректно ввести следующее определение.

Определение 2.1. Слабым решением задачи 1 назовем любую пару $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}) \in X \equiv \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}_T$, удовлетворяющую тождеству (2.4).

Для доказательства существования решения $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}) \in X$ задачи (2.4) введем в пространстве X оператор G: $X \to X$, действующий по формуле $G(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{h}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}) \in X$. Здесь пара $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}) \in X$ является решением линейной задачи

$$a((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}), (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi})) + a_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{h}}((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}), (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi})) = \langle \boldsymbol{F}, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi}) \rangle \qquad \forall (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi}) \in X, \quad (2.5)$$

полученной линеаризацией нелинейной задачи (2.4), где

$$a_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{h}}((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}), (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi})) = c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \mu[c_1(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{u}) - c_1(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{v})]. \quad (2.6)$$

Ясно, что слагаемое $c_1(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{u})$ в (2.6), полученное линеаризацией конвективного слагаемого $c_1(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{u})$ в (2.4), имеющего смысл максвеллова адвективного члена, и слагаемое $-c_1(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{v})$, полученное линеаризацией слагаемого, содержащего лоренцеву силу $-c_1(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{v})$ и входящего в (2.4), уничтожаются при $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi})$. Поскольку к тому же в силу (1.10) $c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$ при $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, коэрцитивность основной формы a на X, вытекающая из (1.11), влечет за собой коэрцитивность суммы форм $a + a_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{h}}$ в (2.5), причем с той же константой λ_*. В этом случае из теоремы Лакса — Мильграма [10] следует, что для любой пары $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{h}) \in X$ решение $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}) \in X$ задачи (2.5) существует и единственно, причем с учетом (2.1) выполняется оценка

$$\|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H})\|_1 \equiv (\|\boldsymbol{u}\|_1^2 + \|\boldsymbol{H}\|_1^2)^{1/2} \leqslant M/\lambda_* = (\|\boldsymbol{f}\| + \mu\|\boldsymbol{E}_0\|)/\lambda_*. \tag{2.7}$$

Введем в пространстве X шар $B_r = \{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi}) \in X\colon \|(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi})\|_1 \leqslant r\}$, где $r = M/\lambda_*$. Из построения шара B_r следует, что оператор G отображает B_r в себя. Легко доказывается, что G компактен и непрерывен. В этом случае из теоремы Шаудера вытекает, что оператор G имеет неподвижную точку $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}) = G(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}) \in X$. Указанная точка $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H})$ и является искомым решением задачи (2.4). Сформулируем полученный результат.

Теорема 2.1. *При выполнении условий* 1–3 *существует по крайней мере одно решение* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}) \in X$ *задачи* (2.4)*, причем для этого решения выполняется оценка* (2.7).

Установим достаточные условия единственности слабого решения задачи 1.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия* 1–3*. Тогда существует не более одного слабого решения задачи* 1*, удовлетворяющего условиям*

$$\|\boldsymbol{u}\|_1 + \frac{\gamma_1}{\gamma}\,\frac{\sqrt{\mu}}{2}\,\|\boldsymbol{H}\|_1 < \frac{\alpha_0\nu}{\gamma}, \qquad \|\boldsymbol{u}\|_1 + \frac{\sqrt{\mu}}{2}\,\|\boldsymbol{H}\|_1 < \frac{\alpha_1\nu_m}{\gamma_1\mu}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Предположим, что задача 1 имеет два решения $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{H}_1)$ и $(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{H}_2)$. Тогда их разность $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \in \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2 \in \boldsymbol{V}_T$ удовлетворяет условию

$$\nu a_0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + \nu_1 a_1(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}) + c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}) + \mu c_1(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{u}_1) - \mu c_1(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{u}) = 0. \tag{2.9}$$

В силу (1.8), (1.9) справедливы следующие оценки:

$$\begin{gathered} |c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u})| \leqslant \gamma\|\boldsymbol{u}_1\|_1\|\boldsymbol{u}\|_1^2, \qquad \mu|c_1(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{u}_1)| \leqslant \gamma_1\mu\|\boldsymbol{u}_1\|_1\|\boldsymbol{H}\|_1^2, \\ \mu|c_1(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{u})| \leqslant \gamma_1\mu\|\boldsymbol{H}_1\|_1\|\boldsymbol{H}\|_1\|\boldsymbol{u}\|_1 \leqslant \gamma_1\sqrt{\mu}\|\boldsymbol{H}_1\|_1(\mu\|\boldsymbol{H}\|_1^2 + \|\boldsymbol{u}\|_1^2)/2. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Используя (2.10), из (2.9) с учетом (1.6), (1.7) получим

$$(\alpha_0\nu - \gamma\|\boldsymbol{u}_1\|_1 - \gamma_1\sqrt{\mu}\|\boldsymbol{H}_1\|_1/2)\|\boldsymbol{u}\|_1^2 + (\alpha_1\nu_1 - \gamma_1\mu\|\boldsymbol{u}_1\|_1 - \gamma_1\mu\sqrt{\mu}\|\boldsymbol{H}_1\|_1/2)\|\boldsymbol{H}\|_1^2 \leqslant 0. \tag{2.11}$$

Предполагая, что решение $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{H}_1)$ удовлетворяет условиям (2.8), из (2.11) получаем $\boldsymbol{u} = 0$, $\boldsymbol{H} = 0$ и, следовательно, $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_2$. Отметим, что в силу теоремы 2.1 условие (2.8) заведомо выполняется, если исходные данные $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{E}_0$ "малы" в том смысле, что $(1 + æ\sqrt{\mu})(\|\boldsymbol{f}\| + \mu\|\boldsymbol{E}_0\|) \leqslant \lambda_* \min(\alpha_0\nu/\gamma, \alpha_1\nu_m/\gamma_1)$, где $æ = (1/2)\max(1, \gamma_1/\gamma)$.

3. Постановка и исследование задачи управления. Далее будем считать, что плотность тока $\boldsymbol{E}_0$ является искомым управлением, которое обозначим через $\boldsymbol{g}$ ($\boldsymbol{g}$ изменяется в некотором множестве K). Будем считать, что для K выполняется

Условие 4. $K \subset \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ — непустое замкнутое выпуклое множество.

Для того чтобы сформулировать задачу управления, введем функционал качества вида $J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}) = \tilde{J}(\boldsymbol{x}) + \alpha\|\boldsymbol{g}\|^2/2$, $\alpha = \mathrm{const}$. Здесь $\tilde{J}\colon X \to \mathbb{R}$ — слабополунепрерывный снизу функционал. В дополнение к условию 4 предположим, что выполняется

Условие 5. $\alpha \geqslant 0$ и K — ограниченное множество либо $\alpha > 0$ и функционал $\tilde{J}$ ограничен снизу.

Рассматривая функционал J на слабых решениях задачи 1, запишем основное ограничение (2.4) между состоянием $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H})$ и управлением $\boldsymbol{g}$ в виде

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}) \equiv F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{g}) = 0. \tag{3.1}$$

Здесь F — оператор, действующий из $X \times K$ в X^* по формуле $\langle F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}), (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi})\rangle = a((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}), (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi})) + c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \mu[c_1(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{u}) - c_1(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{v})] - \langle \boldsymbol{F}, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi})\rangle$. Рассмотрим задачу

$$J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}) \equiv J(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{g}) \to \inf, \qquad F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}) = 0, \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}) \in X \times K. \tag{3.2}$$

В качестве возможных функционалов качества будем рассматривать следующие:

$$J_1(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\operatorname{rot}\boldsymbol{u}|^2\,d\Omega, \quad J_2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_d|^2\,d\Omega, \quad J_3(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}_d|^2\,d\Omega. \quad (3.3)$$

Здесь $\boldsymbol{u}_d \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $\boldsymbol{H}_d \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ — заданные функции. (О функционалах J_k см. [8, 11].) Положим $Z_{ad} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}) \in X \times K\colon F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}) = 0,\ J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}) < \infty\}$.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия* 1, 2, 4, 5 *и* $\tilde{J}\colon X \to \mathbb{R}$ *— слабополунепрерывный снизу функционал, а множество* Z_{ad} *не пусто. Тогда существует по крайней мере одно решение задачи* (3.2).

Доказательство. Обозначим через $(\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{g}_m) \equiv (\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{H}_m,\boldsymbol{g}_m) \in Z_{ad}$ минимизирующую последовательность, для которой $\lim\limits_{m\to\infty} J(\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{g}_m) = \inf\limits_{(\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{g}_m)\in Z_{ad}} J(\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{g}_m) \equiv J^*$. В силу условия 5 и теоремы 2.1 для управлений $\boldsymbol{g}_m$ и решений $(\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{H}_m)$ задачи 1 выполняются оценки $\|\boldsymbol{g}_m\| \leqslant c_1$, $\|\boldsymbol{u}_m\|_1 \leqslant c_2$, $\|\boldsymbol{H}_m\|_1 \leqslant c_3$, где константы c_1, c_2, c_3 не зависят от m. Отсюда вытекает, что существуют слабые пределы $\boldsymbol{g}^* \in K$, $\boldsymbol{u}^* \in \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{H}^* \in \boldsymbol{V}_T$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{\boldsymbol{g}_m\}$, $\{\boldsymbol{u}_m\}$, $\{\boldsymbol{H}_m\}$. Рассуждая так же, как в [5], получаем $F(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{H}^*,\boldsymbol{g}^*) = 0$, при этом из слабой полунепрерывности снизу функционала J следует $J(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{H}^*,\boldsymbol{g}^*) = J^*$.

Отметим, что каждый из функционалов J_1, J_2 и J_3 неотрицателен, ограничен снизу и слабополунепрерывен снизу. Отсюда и из теоремы 3.1 вытекает

Теорема 3.2. *Если выполняются условия теоремы* 3.1, *то существует по крайней мере одно решение экстремальной задачи* (3.2) *при* $\tilde{J} = J_k$, $k = 1, 2, 3$.

Докажем возможность применения для экстремальной задачи (3.2) принципа неопределенных множителей Лагранжа. Как и в [4–6], воспользуемся экстремальным принципом в гладковыпуклых задачах условной минимизации [7]. Вычислим сначала частную производную Фреше $F'_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{g}})\colon X \to X^*$ от оператора F. Из ее определения следует, что в любой точке $(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{g}}) \equiv (\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{H}},\hat{\boldsymbol{g}}) \in X \times K$ производная $F'_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{g})$ есть линейный непрерывный оператор, ставящий в соответствие каждому элементу $(\boldsymbol{w},\boldsymbol{h}) \in X$ функционал $F'_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{g}})(\boldsymbol{w},\boldsymbol{h}) \in X^*$, действующий по формуле

$$\langle F'_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{g}})(\boldsymbol{w},\boldsymbol{h}),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\Psi})\rangle = \nu a_0(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) + \nu_1 a_1(\boldsymbol{h},\boldsymbol{\Psi}) + [c(\hat{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) + c(\boldsymbol{w},\hat{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{v})] +$$
$$+ \mu[c_1(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{h},\hat{\boldsymbol{u}}) + c_1(\boldsymbol{\Psi},\hat{\boldsymbol{H}},\boldsymbol{w})] - \mu[c_1(\hat{\boldsymbol{H}},\boldsymbol{h},\boldsymbol{v}) + c_1(\boldsymbol{h},\hat{\boldsymbol{H}},\boldsymbol{v})]$$
$$\forall(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\Psi}) \in X = \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}_T. \quad (3.4)$$

Простой анализ показывает, что для всех функционалов в (3.3) производные Фреше по $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{H}$ в любой точке $\hat{\boldsymbol{x}} \in X$ существуют и принадлежат пространству X^*. В частности,

$$\langle (J_1)'_{\boldsymbol{u}}(\hat{\boldsymbol{x}}),\boldsymbol{w}\rangle = \int\limits_\Omega \operatorname{rot}\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{w}\,d\Omega, \quad \langle (J_2)'_{\boldsymbol{u}}(\hat{\boldsymbol{x}}),\boldsymbol{w}\rangle = \int\limits_\Omega (\hat{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{u}_d)\cdot\boldsymbol{w}\,d\Omega \quad \forall\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{V}. \quad (3.5)$$

Введем множество $F(\hat{\boldsymbol{x}},K) = F(\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{H}},K)$, являющееся выпуклым подмножеством пространства X^*. Положим $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) \in X$ и введем для функционала J лагранжиан $\mathcal{L}$ по формуле $\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g},\lambda_0,\boldsymbol{z}) = \lambda_0 J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}) + \langle F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}),(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\rangle_{X^*\times X}$.

Теорема 3.3. *Пусть при выполнении условий* 1, 2, 4 $(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{g}}) \equiv (\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{H}},\hat{\boldsymbol{g}}) \in X \times K$ *— точка локального минимума в задаче* (3.2) *и функционал* $J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g})$ *непрерывно дифференцируем по* $\boldsymbol{x}$ *в точке* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *для любого элемента* $\boldsymbol{g} \in K$ *и является выпуклым по* $\boldsymbol{g}$ *для каждой точки* $\boldsymbol{x} \in X$. *Тогда существует ненулевой множитель Лагранжа* $(\lambda_0,\boldsymbol{z}) \equiv (\lambda_0,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^+ \times X$ *такой, что справедливо уравнение Эйлера — Лагранжа*

$$\lambda_0\langle J'_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{g}}),(\boldsymbol{w},\boldsymbol{h})\rangle_{X^*\times X} + \langle F'_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{g}})(\boldsymbol{w},\boldsymbol{h}),(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\rangle_{X^*\times X} = 0 \qquad \forall(\boldsymbol{w},\boldsymbol{h}) \in X \quad (3.6)$$

и выполняется принцип минимума $\mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{g}}, \lambda_0, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \leqslant \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{g}, \lambda_0, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ для $\boldsymbol{g} \in K$ или

$$(\boldsymbol{g} - \hat{\boldsymbol{g}}, \boldsymbol{\eta}) \leqslant \lambda_0[J(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{g}) - J(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{g}})] \qquad \forall \boldsymbol{g} \in K. \tag{3.7}$$

Доказательство. В силу теоремы 3 в [7, гл. 1] для доказательства существования лагранжева множителя $(\lambda_0, \boldsymbol{z})$ с учетом дифференцируемости F на X для каждого $\boldsymbol{g} \in K$ и выпуклости множеств K и $F(\hat{\boldsymbol{x}}, K)$ нужно показать, что оператор $F'_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{g}})$: $X \to X^*$ является фредгольмовым. В силу (3.4) $F'_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{g}}) = \hat{F}_1 + \hat{F}_2$, где $\langle \hat{F}_1(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{h}), (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi})\rangle = a((\boldsymbol{w}, \boldsymbol{h}), (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi})) + c(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) + \mu[c_1(\boldsymbol{\Psi}, \hat{\boldsymbol{H}}, \boldsymbol{w}) - c_1(\boldsymbol{h}, \hat{\boldsymbol{H}}, \boldsymbol{v})]$; $\langle \hat{F}_2(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{h}), (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi})\rangle = c(\boldsymbol{w}, \hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) + \mu[c_1(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{h}, \hat{\boldsymbol{u}}) - c_1(\hat{\boldsymbol{H}}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{v})]$. Очевидно, что оператор $\hat{F}_1$: $X \to X^*$ линеен, непрерывен и, более того, коэрцитивен, поскольку в силу (1.10), (1.11) $\langle \hat{F}_1(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi}), (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi})\rangle = a((\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi}), (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi})) \geqslant \lambda_* \|(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Psi})\|_1^2$. Кроме того, из (1.8), (1.9) и компактности вложения $\boldsymbol{H}^1(\Omega) \subset \boldsymbol{L}^4(\Omega)$ вытекает непрерывность и компактность оператора $\hat{F}_2$. Отсюда следует, что оператор $F'_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{g}}) = \hat{F}_1 + \hat{F}_2$ является фредгольмовым как сумма изоморфизма и непрерывного компактного оператора.

Нетрудно убедиться в том, что каждый из введенных выше функционалов J_1, J_2, J_3 удовлетворяет всем условиям теоремы 3.3. Более того, из уравнения Эйлера — Лагранжа (3.6) можно получить дополнительную информацию об их свойствах. Для этого запишем уравнение (3.6) с учетом (3.4) в виде

$$\lambda_0\langle J'_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{g}}), (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{h})\rangle_{X^* \times X} + \nu a_0(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\xi}) + \nu_1 a_1(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\eta}) + [c(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\xi}) + c(\boldsymbol{w}, \hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\xi})] +$$
$$+ \mu[c_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{h}, \hat{\boldsymbol{u}}) + c_1(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{H}}, \boldsymbol{w})] - \mu[c_1(\hat{\boldsymbol{H}}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{\xi}) + c_1(\boldsymbol{h}, \hat{\boldsymbol{H}}, \boldsymbol{\xi})] = 0 \qquad \forall (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{h}) \in X. \tag{3.8}$$

Полагая в (3.8) сначала $\boldsymbol{h} = 0$, а затем $\boldsymbol{w} = 0$, приходим к следующим тождествам:

$$\nu a_0(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\xi}) + c(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\xi}) + c(\boldsymbol{w}, \hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\xi}) + \mu c_1(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{H}}, \boldsymbol{w}) + \lambda_0\langle J'_{\boldsymbol{u}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{g}}), \boldsymbol{w}\rangle = 0 \qquad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}; \tag{3.9}$$

$$\nu_1 a_1(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\eta}) + \mu c_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{h}, \hat{\boldsymbol{u}}) - \mu[c_1(\hat{\boldsymbol{H}}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{\xi}) + c_1(\boldsymbol{h}, \hat{\boldsymbol{H}}, \boldsymbol{\xi})] + \lambda_0\langle J'_{\boldsymbol{H}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{g}}), \boldsymbol{h}\rangle = 0 \qquad \forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{V}_T. \tag{3.10}$$

В результате получена система оптимальности для нахождения искомого управления $\hat{\boldsymbol{g}}$ и соответствующего ему "оптимального" распределения скоростей и магнитного поля в области Ω. Эта система состоит из трех частей. Первая ее часть имеет вид слабой формулировки (2.4) задачи 1, эквивалентной (3.1), вторая часть есть тождества (3.9), (3.10) для $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$, последняя часть представляет собой неравенство (3.7).

Замечание 3.1. Отметим, что первые две части системы оптимальности формально могут быть получены приравниванием к нулю первых производных (первых вариаций) от лагранжиана $\mathcal{L}$ по соответствующим переменным. В частности, (2.4) получается путем приравнивания к нулю первой вариации лагранжиана $\mathcal{L}$ по $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$, тогда как (3.9) и (3.10) получаются путем приравнивания к нулю первых вариаций по $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{H}$.

Покажем, что систему (3.9), (3.10) можно рассматривать как слабую формулировку некоторой краевой задачи для лагранжевых множителей $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$. Предполагая для простоты, что Ω — односвязная область, так что $\mathcal{H}(m) = \{0\}$ и справедливо вложение $\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{V}_T$, введем линейный оператор $S_{\boldsymbol{V}}$: $\boldsymbol{V}_T^* \to \boldsymbol{V}^*$, действующий по формуле

$$\langle S_{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{l}, \boldsymbol{h}\rangle_{\boldsymbol{V}^* \times \boldsymbol{V}} = \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{h}\rangle_{\boldsymbol{V}_T^* \times \boldsymbol{V}_T} \qquad \forall \boldsymbol{l} \in \boldsymbol{V}_T^*, \quad \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{V}_T. \tag{3.11}$$

Используя вытекающие из (1.12)–(1.14), (1.10) и (1.5) соотношения

$$a_0(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\xi}) = -\langle \Delta\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{w}\rangle, \qquad b(\boldsymbol{w}, \sigma) = \langle \nabla\sigma, \boldsymbol{w}\rangle, \qquad a_1(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\eta}) = \langle \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{w}\rangle,$$

$$c(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\xi}) = -c(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{w}) \equiv -((\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{w}), \qquad c(\boldsymbol{w}, \hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\xi}) \equiv \int_\Omega (\boldsymbol{w} \cdot \nabla)\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\xi}\, d\Omega = (\nabla\hat{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{w}),$$

$$c_1(\boldsymbol{\eta},\hat{\boldsymbol{H}},\boldsymbol{w})=(\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta}\times\hat{\boldsymbol{H}},\boldsymbol{w}),\quad c_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{h},\hat{\boldsymbol{u}})=-(\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta}\times\hat{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{h}),\tag{3.12}$$
$$c_1(\hat{\boldsymbol{H}},\boldsymbol{h},\boldsymbol{\xi})=-(\operatorname{rot}\hat{\boldsymbol{H}}\times\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{h}),\qquad c_1(\boldsymbol{h},\hat{\boldsymbol{H}},\boldsymbol{\xi})\equiv(\operatorname{rot}\boldsymbol{h},\hat{\boldsymbol{H}}\times\boldsymbol{\xi})=(\operatorname{rot}(\hat{\boldsymbol{H}}\times\boldsymbol{\xi}),\boldsymbol{h})$$
$$\forall(\boldsymbol{w},\boldsymbol{h})\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)^2,$$

где $\nabla\hat{\boldsymbol{u}}^{\text{т}}$ — тензор, сопряженный с $\nabla\hat{\boldsymbol{u}}$, получим

$$\nu a_0(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\xi})+c(\hat{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{w},\boldsymbol{\xi})+c(\boldsymbol{w},\hat{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{\xi})+\mu c_1(\boldsymbol{\eta},\hat{\boldsymbol{H}},\boldsymbol{w})=-\nu\langle\Delta\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{w}\rangle-$$
$$-((\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{w})+(\nabla\hat{\boldsymbol{u}}^{\text{т}}\cdot\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{w})+\mu(\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta}\times\hat{\boldsymbol{H}},\boldsymbol{w})\qquad\forall\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega);\tag{3.13}$$
$$\nu_1 a_1(\boldsymbol{h},\boldsymbol{\eta})+\mu c_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{h},\hat{\boldsymbol{u}})-\mu[c_1(\hat{\boldsymbol{H}},\boldsymbol{h},\boldsymbol{\xi})+c_1(\boldsymbol{h},\hat{\boldsymbol{H}},\boldsymbol{\xi})]=\nu_m\langle\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{h}\rangle-$$
$$-\mu(\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta}\times\hat{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{h})+\mu(\operatorname{rot}\hat{\boldsymbol{H}}\times\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{h})-\mu(\operatorname{rot}(\hat{\boldsymbol{H}}\times\boldsymbol{\xi}),\boldsymbol{h})\qquad\forall\boldsymbol{h}\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega).\tag{3.14}$$

Предположим, что производные Фреше от функционала J удовлетворяют условиям

$$J'_{\boldsymbol{u}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{g}})\in\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega),\qquad S_{\boldsymbol{V}}J'_{\boldsymbol{H}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{g}})\in\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega),\tag{3.15}$$

и введем в $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ функционалы $\boldsymbol{L}_1=-\nu\Delta\boldsymbol{\xi}-(\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi}+\nabla\hat{\boldsymbol{u}}^{\text{т}}\cdot\boldsymbol{\xi}+\mu\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta}\times\hat{\boldsymbol{H}}+\lambda_0 J'_{\boldsymbol{u}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{g}})$ и $\boldsymbol{L}_2=\nu_1\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta}-\mu\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta}\times\hat{\boldsymbol{u}}+\mu\operatorname{rot}\hat{\boldsymbol{H}}\times\boldsymbol{\xi}-\mu\operatorname{rot}(\hat{\boldsymbol{H}}\times\boldsymbol{\xi})+\lambda_0 S_{\boldsymbol{V}}J'_{\boldsymbol{H}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{g}})$. Из (3.13), (3.14) вытекает, что тождество (3.9) и сужение тождества (3.10) на $\boldsymbol{V}$ можно записать в виде $\langle\boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{w}\rangle=0\ \ \forall\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{V}$, $\langle\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{h}\rangle=0\ \ \forall\boldsymbol{h}\in\boldsymbol{V}$. Поскольку в силу (3.15) $\boldsymbol{L}_i\in\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$, из [10, с. 22] следует существование таких функций $\sigma\in L_0^2(\Omega)$ и $\psi\in L_0^2(\Omega)$, что

$$-\nu\Delta\boldsymbol{\xi}-(\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi}+\nabla\hat{\boldsymbol{u}}^{\text{т}}\cdot\boldsymbol{\xi}+\mu\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta}\times\hat{\boldsymbol{H}}+\nabla\sigma=-\lambda_0 J'_{\boldsymbol{u}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{g}})\quad\text{в}\quad\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega);\tag{3.16}$$
$$\nu_1\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta}-\mu\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta}\times\hat{\boldsymbol{u}}+\mu\operatorname{rot}\hat{\boldsymbol{H}}\times\boldsymbol{\xi}-\mu\operatorname{rot}(\hat{\boldsymbol{H}}\times\boldsymbol{\xi})+\nabla\psi=-\lambda_0 S_{\boldsymbol{V}}J'_{\boldsymbol{H}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{g}})$$
$$\text{в}\quad\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega).\tag{3.17}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 3.4. *Пусть* Ω *— односвязная область и выполняются условия теоремы* 3.3 *и* (3.15)*. Тогда существуют функции* $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\in\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}_T$, $\sigma\in L_0^2(\Omega)$, $\psi\in L_0^2(\Omega)$ *и константа* $\lambda_0\geqslant 0$*, которые вместе с элементом* $(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{g}})=(\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{H}},\hat{\boldsymbol{g}})$ *удовлетворяют уравнениям* (3.16), (3.17)*, тождествам* (3.9), (3.10) *и принципу минимума* (3.7)*.*

Замечание 3.2. Несмотря на то что функции σ и ψ формально не входят в выражение для $\mathcal{L}$, по существу, их можно считать множителями Лагранжа, сопряженными с давлением p и потенциалом электрического поля $\boldsymbol{E}$, входящими в модель (1.1), (1.2).

Предположим, что лагранжевы множители $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, σ и ψ, как и функции $\hat{\boldsymbol{u}}$ и $\hat{\boldsymbol{H}}$, обладают дополнительной гладкостью, а именно $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{H}})\in\boldsymbol{H}^1(\Delta;\Omega)$, $(\sigma,\psi)\in H^1(\Omega)$. Тогда из (3.9), (3.10) и (3.16), (3.17) можно вывести "поточечные" дифференциальные уравнения и граничные соотношения для $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, σ, ψ. Действительно, при выполнении этих условий левая часть в (3.17), как и правая часть, является функцией, принадлежащей пространству $\boldsymbol{L}^{3/2}(\Omega)$, причем $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta}\equiv\Delta\boldsymbol{\eta}\in\boldsymbol{L}^2(\Omega)$. С учетом этого можно умножить (3.17) на функцию $\boldsymbol{h}\in\boldsymbol{V}_T\subset\boldsymbol{L}^6(\Omega)$ и проинтегрировать по области Ω. Применяя формулу Грина (1.13) при $\boldsymbol{q}=\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta}\in\boldsymbol{H}(\operatorname{rot};\Omega)$, с учетом (3.12) приходим к тождеству

$$\nu_1 a_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{h})-\nu_1\langle\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta}\times\boldsymbol{n},\boldsymbol{h}\rangle_\Gamma+\mu c_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{h},\hat{\boldsymbol{u}})-\mu c_1(\hat{\boldsymbol{H}},\boldsymbol{h},\boldsymbol{\xi})-\mu c_1(\boldsymbol{h},\hat{\boldsymbol{H}},\boldsymbol{\xi})=$$
$$=-\lambda_0\int\limits_\Omega S_{\boldsymbol{V}}J'_{\boldsymbol{H}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{g}})\cdot\boldsymbol{h}\,d\Omega\qquad\forall\boldsymbol{h}\in\boldsymbol{V}_T.\tag{3.18}$$

Вычитая тождество (3.18) из тождества (3.10), получим

$$\nu_1\langle\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta}\times\boldsymbol{n},\boldsymbol{h}\rangle_\Gamma=\lambda_0\int\limits_\Omega S_{\boldsymbol{V}}J'_{\boldsymbol{H}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{g}})\cdot\boldsymbol{h}\,d\Omega-\lambda_0\langle J'_{\boldsymbol{H}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{g}}),\boldsymbol{h}\rangle\qquad\forall\boldsymbol{h}\in\boldsymbol{V}_T.\tag{3.19}$$

Рассмотрим случай $\tilde{J} = J_1$ (J_1 определяется первой формулой в (3.3)). Простой анализ с учетом (3.5) и (1.13) показывает, что

$$\langle (J_1)'_{\boldsymbol{u}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{g}}), \boldsymbol{w} \rangle = \int\limits_\Omega \operatorname{rot} \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{w} \, d\Omega = \int\limits_\Omega \operatorname{rot}\operatorname{rot} \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{w} \, d\Omega \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V},$$
$$(J_1)'_{\boldsymbol{H}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{g}}) = 0. \tag{3.20}$$

Используя (3.20), запишем (3.16), (3.17) и (3.19) в виде

$$-\nu \Delta \boldsymbol{\xi} - (\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi} + \nabla \hat{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\xi} + \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{\eta} \times \hat{\boldsymbol{H}} + \nabla \sigma = -\lambda_0 \operatorname{rot}\operatorname{rot} \hat{\boldsymbol{u}} \quad \text{в} \quad \Omega; \tag{3.21}$$

$$\nu_1 \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{\eta} - \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{\eta} \times \hat{\boldsymbol{u}} + \mu \operatorname{rot} \hat{\boldsymbol{H}} \times \boldsymbol{\xi} - \mu \operatorname{rot}(\hat{\boldsymbol{H}} \times \boldsymbol{\xi}) + \nabla \psi = 0 \quad \text{в} \quad \Omega; \tag{3.22}$$

$$\nu_1 \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{\eta} \times \boldsymbol{n}, \boldsymbol{h} \rangle_\Gamma = 0 \qquad \forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{V}_T. \tag{3.23}$$

Уравнения (3.21), (3.22) вместе с соотношениями

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = 0, \ \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \boldsymbol{\xi} = 0, \ \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{\eta} \times \boldsymbol{n} = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{3.24}$$

вытекающими из условий $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{V}_T$ и (3.23), характеризуют при выполнении (3.15) вторую часть системы оптимальности для задачи (3.2) при $\tilde{J} = J_1$.

При изменении вида функционала $\tilde{J}$ некоторые из приведенных соотношений также будут меняться. В частности, для функционала J_2, зависящего, как и J_1, лишь от $\boldsymbol{u}$, изменится уравнение (3.21) для множителя $\boldsymbol{\xi}$, которое с учетом (3.5) примет вид

$$-\nu \Delta \boldsymbol{\xi} - (\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi} + \nabla \hat{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\xi} + \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{\eta} \times \hat{\boldsymbol{H}} + \nabla \sigma = -\lambda_0 (\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}_d) \qquad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.25}$$

тогда как соотношения (3.22) и (3.24) останутся без изменения. Аналогично для функционала J_3, зависящего лишь от $\boldsymbol{H}$, имеем $(J_3)'_{\boldsymbol{u}} = 0$,

$$\langle (J_3)'_{\boldsymbol{H}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{g}}), \boldsymbol{h} \rangle = \int\limits_\Omega (\hat{\boldsymbol{H}} - \boldsymbol{H}_d) \cdot \boldsymbol{h} \, d\Omega \quad \forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{V}_T,$$
$$S_{\boldsymbol{V}}[(J_3)'_{\boldsymbol{H}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{g}})] = \hat{\boldsymbol{H}} - \boldsymbol{H}_d \in \boldsymbol{L}^2(\Omega). \tag{3.26}$$

Учитывая (3.26), из (3.16), (3.17) и (3.19) получим соотношения (3.24) и уравнения

$$-\nu \Delta \boldsymbol{\xi} - (\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi} + \nabla \hat{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\xi} + \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{\eta} \times \hat{\boldsymbol{H}} + \nabla \sigma = 0 \qquad \text{в} \quad \Omega; \tag{3.27}$$

$$\nu_1 \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{\eta} - \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{\eta} \times \hat{\boldsymbol{u}} + \mu \operatorname{rot} \hat{\boldsymbol{H}} \times \boldsymbol{\xi} - \mu \operatorname{rot}(\hat{\boldsymbol{H}} \times \boldsymbol{\xi}) + \nabla \psi = -\lambda_0 (\hat{\boldsymbol{H}} - \boldsymbol{H}_d) \quad \text{в } \Omega. \tag{3.28}$$

В случае, когда функции $\hat{\boldsymbol{u}}$ и $\hat{\boldsymbol{H}}$ известны, соотношения (3.21), (3.22), (3.24), либо (3.25), (3.22), (3.24), либо (3.27), (3.28), (3.24) представляют собой замкнутую систему линейных уравнений для нахождения множителей Лагранжа $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, σ, ψ, эквивалентную в силу теоремы 3.3 линейной фредгольмовой задаче. В общем случае, когда $\hat{\boldsymbol{u}}$ и $\hat{\boldsymbol{H}}$ неизвестны, указанные соотношения представляют собой вторую часть системы оптимальности, соответствующей задаче управления (3.2) для функционалов J_1, J_2 и J_3. Эти соотношения следует рассматривать совместно с тождеством (2.4) либо (3.1), образующим первую часть системы оптимальности, и неравенством (3.7). Очевидно, что решение полученной системы оптимальности является достаточно сложной задачей и требует разработки эффективных численных алгоритмов.

Автор выражает благодарность В. Н. Монахову за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ладиков Ю. П.** Стабилизация процессов в сплошных средах. М.: Наука, 1978.
2. **Blum J.** Numerical simulation and optimal control in plasma physics: with applications in tokamaks. Paris: Gauthier-Villars, 1989.
3. **Никольский В. В.** Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1978.
4. **Алексеев Г. В.** Разрешимость стационарных задач граничного управления для уравнений тепловой конвекции // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 982–998.
5. **Алексеев Г. В.** Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 971–991.
6. **Алексеев Г. В.** Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений теории массопереноса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 3. С. 380–394.
7. **Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
8. **Hou L. S., Ravidran S. S.** Computations of boundary optimal control problems for an electrically conducting fluid // J. Comput. Phys. 1996. V. 128, N 2. P. 319–330.
9. **Ладыженская О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
10. **Girault V., Raviart P. A.** Finite element methods for Navier — Stokes equations. Theory and algorithms. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
11. **Алексеев Г. В.** Теоретический анализ обратных экстремальных задач для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. Владивосток, 1987. (Препр. / ДВО РАН. Ин-т прикл. математики; № 1-2002).
12. **Valli A.** Orthogonal decompositions of $\boldsymbol{L}^2(\Omega)^3$. Galamen, 1995. (Prepr. / Department of Math. Univ. of Toronto; UTM 493).
13. **Солонников В. А.** О некоторых стационарных краевых задачах магнитной гидродинамики // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1960. Т. 59. С. 174–187.
14. **Галанин М. П., Попов Ю. П.** Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах: Математическое моделирование. М.: Наука, 1995.

Поступила в редакцию 11/III 2003 г.,
в окончательном варианте — 16/VI 2003 г.