

УДК 532.59:534.1

АСИМПТОТИКИ ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПОЛЕЙ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕДАХ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва
E-mail: bulatov@index-xx.ru

Рассмотрена задача волновой динамики внутренних гравитационных волн в стратифицированной среде переменной глубины. С использованием модифицированного метода геометрической оптики (вертикальные моды — горизонтальные лучи) построены волновые моды высших приближений асимптотических решений. Показано, что для реальных стратифицированных сред основной вклад в решение вносят первые члены соответствующих асимптотических представлений.

Ключевые слова: внутренние гравитационные волны, метод геометрической оптики, стратифицированная среда.

Динамика внутренних гравитационных волн (ВГВ) в стратифицированных природных средах (океан, атмосфера) существенно зависит от горизонтальной неоднородности. К числу наиболее характерных горизонтальных неоднородностей океана относится изменение рельефа дна. Как правило, при произвольной форме дна строятся асимптотические представления решения. В случае если изменения глубины океана значительно меньше характерной длины ВГВ, при решении задач волновой динамики можно использовать различные обобщения пространственно-временного лучевого метода. Формулировка достаточных условий применимости этого метода требует отдельного рассмотрения.

Как правило, при нахождении решений с помощью метода геометрической оптики или его обобщений в силу значительных математических трудностей удается построить только первый член асимптотики, при этом полагается, что высшие члены асимптотических представлений решений малы. Поэтому построение асимптотик высших приближений позволяет сформулировать определенные критерии достаточности использования лучевых приближений при решении задач волновой динамики стратифицированных сред с переменными параметрами. Следует отметить, что лучевые приближения используются для качественного анализа структур полей ВГВ в океане и наглядной интерпретации результатов. В настоящее время в силу сложности возникающих задач другие методы неприменимы.

В данной работе рассматривается система уравнений, описывающая ВГВ, возбуждаемые в слое стратифицированной среды переменной глубины движущимся источником возмущений. В рамках линейной теории и приближения Буссинеска поле скоростей в системе

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11-01-00335а, 13-05-00151а).

координат, связанной с движущимся источником, удовлетворяет системе уравнений [1, 2]

$$\begin{aligned}
 v^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^{*2}} \left(\Delta W^* + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} W^* \right) + N^2(z^*) \Delta W^* &= Q v^2 \delta''_{\xi^* \xi^*}(\xi^*) \delta(y^* - y_0^*) \delta'(z^* - z_0^*), \\
 \Delta U^* + \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^* \partial z^*} &= Q \delta'(\xi^*) \delta(y^* - y_0^*) \delta(z^* - z_0^*), \\
 \Delta V^* + \frac{\partial^2 W^*}{\partial y^* \partial z^*} &= Q \delta(\xi^*) \delta'(y^* - y_0^*) \delta(z^* - z_0^*), \\
 N^2(z^*) &= -\frac{g}{\rho_0(z^*)} \frac{d\rho_0(z^*)}{dz^*}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где U, V, W — компоненты скорости волнового поля; $N^2(z^*)$ — частота Брента — Вайсяля; v — скорость источника массы мощностью Q (Q — объемный расход в секунду), который движется равномерно на глубине $-z_0^*$ (ось z^* направлена вверх) в отрицательном направлении оси абсцисс x^* ($\xi^* = x^* + vt$) на расстоянии y_0^* от берега. Предполагается, что глубина дна $H^*(y^*)$ зависит только от координаты y_0^* , т. е. не меняется вдоль траектории движения источника. В качестве граничных условий используются приближение “твердой крышки” на поверхности и условие непротекания на дне:

$$z^* = 0: \quad W^* = 0, \quad z^* = -H^*(y^*): \quad W^* + V^* \frac{\partial H^*}{\partial y^*} = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим случай $N^2(z^*) = \text{const}$. Относительно функции $H^*(y^*)$ сделаем следующие предположения: $H^*(y^*) = 0$, при $y < 0$ $H^*(0) = 0$, $H^*(y^*)$ — гладкая монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию $H^*(y^*) \leq \gamma y^*$ при $y^* > 0$, при этом $\gamma \ll 1$. Слой жидкости постоянной глубины $H^*(y^*)$ при фиксированном y^* будем называть волноводом сравнения (по аналогии с подводными звуковыми каналами в акустике) [3]. Как известно, в стратифицированном слое с постоянной глубиной H выражение для максимальной групповой скорости ВГВ имеет вид $C_{\max} = NH/\pi$ [2]. Выберем вертикальный масштаб $l = v/N$, а в качестве горизонтального масштаба L возьмем корень уравнения $\pi v = NH^*(L)$. В силу условий, наложенных на функцию $H^*(y^*)$, $\lambda = L/l \gg 1$; безразмерные и размерные переменные связаны следующим образом: $\xi = \xi^*/L$, $y = y^*/L$, $z = z^*/L$, $h(y) = H^*(Ly)/l$, $U = U^*l^2/Q$, $V = V^*l^2/Q$, $W = W^*l^2/Q$. Тогда безразмерному значению Y , определенному из уравнения $h(y^*) = \pi$, соответствует глубина волновода сравнения $h(y^*)$, для которого имеем $C_{\max}(Y) = v$.

Далее будем полагать, что скорость движения источника v больше $C_{\max}(y_0)$, т. е. $y_0 < Y$ (в силу монотонности $H(y^*)$). Таким образом, в области $y < Y$ максимальная групповая скорость ВГВ для соответствующих волноводов сравнения меньше скорости источника, а в области $y > Y$ — больше.

В безразмерных переменных система уравнений (1) и граничных условий (2) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{\lambda^2} \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W + \Delta W &= \frac{1}{\lambda^2} \delta''_{\xi\xi}(\xi) \delta(y - y_0) \delta'(z - z_0), \\
 \frac{1}{\lambda} \Delta V + \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{\lambda^2} \delta(\xi) \delta'_y(y - y_0) \delta(z - z_0);
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$z = 0: \quad W = 0, \quad z = -h(y): \quad W + h'(y)V/\lambda = 0. \tag{4}$$

Решение задачи (3), (4) ищется в виде, характерном для метода геометрической оптики ($\omega = \omega^*/N$ — безразмерная частота, нормированная на N) [1, 4–6]:

$$\begin{aligned} W &= \int F(z, y, \omega) \exp(i\lambda(\omega\xi - S(y, \omega))) d\omega, \\ V &= \int \Psi(z, y, \omega) \exp(i\lambda(\omega\xi - S(y, \omega))) d\omega, \end{aligned} \quad (5)$$

где амплитудные множители F и Ψ представлены в виде рядов по обратным степеням параметра λ [1, 4–6]:

$$F(z, y, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\lambda}\right)^m F_m(z, y, \omega), \quad \Psi(z, y, \omega) = i \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\lambda}\right)^m \Psi_m(z, y, \omega). \quad (5')$$

Подставляя в (3) решения W и V из (5) с учетом формул (5') и приравнивая члены при одинаковых степенях λ , получаем

$$\begin{aligned} F''_{0zz} + \frac{\varkappa^2}{c^2} F_0 &= 0, & F''_{1zz} + \frac{\varkappa^2}{c^2} F_1 &= -\frac{1}{c^2} (2S'F'_0 + S''F_0), \\ F''_{mzz} + \frac{\varkappa^2}{c^2} F_m &= -\frac{1}{c^2} (2S'F'_{m-1} + S''F_{m-1} + F''_{m-2}), \end{aligned} \quad (6)$$

где $m = 2, 3, \dots$; $\varkappa^2 = \omega^2 + S'_y(y, \omega)$; $c^2 = \omega^2/(1 - \omega^2)$; штрихи в правых частях обозначают производные по горизонтальной переменной y .

Граничные условия имеют вид:

— на поверхности

$$z = 0: \quad F_m = 0, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

— на дне

$$z = -h(y): \quad F_0 = 0, \quad F_m + \Psi_{m-1}h'(y) = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Функции $\Psi_m(z, y, \omega)$ определяются из следующей цепочки равенств (полученных в результате подстановки (5), (5') во второе уравнение (3) и приравнивания членов с одинаковыми степенями λ):

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= -\frac{S'F'_{0z}}{\varkappa^2}, & \Psi_1 &= -\frac{S'F'_{1z} + 2\Psi'_0S' + \Psi_0S'' + F''_{0yz}}{\varkappa^2}, \\ \Psi_m &= -\frac{S'F'_{mz} + 2\Psi'_{m-1}S' + \Psi_{m-1}S'' + F''_{m-1yz} + \Psi''_{m-2}}{\varkappa^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Нулевое приближение (определение функций F_0 и Ψ_0). Рассмотрим первое уравнение из системы (6):

$$\begin{aligned} F''_{0zz} + \frac{\varkappa^2}{c^2} F_0 &= 0, \\ z = 0, \quad z = -h(y): \quad F_0 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Краевая задача (9) дает набор собственных чисел (локальных дисперсионных соотношений)

$$\varkappa_n(y, \omega) = \frac{\omega n \pi}{\sqrt{1 - \omega^2} h(y)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

и собственных функций

$$F_{0n} = A_{0n}(y, \omega) \sin \frac{n\pi z}{h(y)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

с неопределенной амплитудной зависимостью $A_{0n}(y, \omega)$. Тогда для эйконала $S(y, \omega)$ имеем выражение

$$S_n(y, \omega) = \omega \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{(1 - \omega^2) h^2(y)} - 1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для нахождения не зависящей от z функции $A_{0n}(y, \omega)$ используем условие разрешимости краевой задачи для F_1 (второго уравнения (6)), которое получим, умножив уравнение для F_1 на F_{0n} и проинтегрировав его по z от $-h(y)$ до 0. В результате имеем

$$F'_{0nz} F_{1n} \Big|_{z=-h(y)} = -\frac{1}{c^2} \int_{-h(y)}^0 \frac{\partial}{\partial y} (F_{0n}^2 S') dz.$$

С учетом граничных условий на дне (7), (8) для F_{1n} получаем

$$F_{1n} \Big|_{z=-h(y)} = \frac{S'_n h' F'_{0nz}}{\varkappa_n^2} \Big|_{z=-h(y)},$$

а с учетом выражения (10) для F_{0n} для $A_{0n}(y, \omega)$ получаем уравнение переноса

$$S'_n(y, \omega) h'(y) A_{0n}^2(y, \omega) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (S'_n(y, \omega) h(y) A_{0n}^2(y, \omega)). \quad (11)$$

Из уравнения переноса (11) следует закон сохранения

$$h^3(y) S'_n(y, \omega) A_{0n}^2(y, \omega) = \text{const},$$

из которого находим

$$A_{0n}^2(y, \omega) = \frac{h(y_0)}{h(y)} \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 - (1 - \omega^2) h^2(y_0)}{n^2 \pi^2 - (1 - \omega^2) h^2(y)}} A_{0n}(y_0, \omega). \quad (12)$$

Функция $A_{0n}(y_0, \omega)$ определяется на основе принципа локальности [1, 4], т. е. из решения задачи для слоя постоянной глубины $h(y_0)$:

$$A_{0n}(y_0, \omega) = \frac{2ic \sin(n\pi z_0/h(y_0))}{\pi \sqrt{n^2 \pi^2 - (1 - \omega^2) h^2(y_0)}}.$$

Таким образом, функция $F_{0n}(z, y, \omega)$ определена.

Функция Ψ_{0n} определяется из первого уравнения (8).

Вычисление амплитуд высших приближений ($m \geq 1$). Сначала рассмотрим случай $m = 1$ (при $m > 1$ алгоритм нахождения амплитуд A_{mn} принципиально не меняется, однако вычислительная процедура усложняется). Процедура нахождения амплитуд A_{mn} аналогична процедуре определения амплитуд акустических волн [3, 4].

Функцию $F_1(z, y, \omega)$ будем искать, решая краевую задачу

$$F''_{1nzz} + \frac{n^2 \pi^2}{h^2(y)} F_{1n} = -\frac{1}{c^2} (2S'_n F'_{0nz} + S''_n F_{0n}), \quad (13)$$

$$z = 0: \quad F_{1n} = 0, \quad z = -h(y): \quad F_{1n} = \frac{S'_n(y, \omega) h'(y) F'_{0nz}}{\varkappa_n^2(y, \omega)}.$$

Решение задачи (13) находим в виде

$$F_{1n}(z, y, \omega) = a_1(y, \omega) \sin \frac{n\pi z}{h(y)} + B_{1n}(z, y, \omega). \quad (14)$$

Здесь $B_{1n}(z, y, \omega)$ — частное решение (13), удовлетворяющее граничному условию при $z = 0$, при этом граничное условие на дне выполняется автоматически с учетом специально определенной функции $A_{0n}(y, \omega)$.

Функцию $B_{1n}(z, y, \omega)$ можно найти, например, с использованием метода вариации постоянных:

$$B_{1n}(z, y, \omega) = \frac{S'_n(y, \omega)A_{0n}(y, \omega)}{2n\pi c^2 h(y)} \left(n\pi z^2 \sin \frac{n\pi z}{h(y)} - 2z \cos \left(\frac{n\pi z}{h(y)} \right) h(y) \right) h'(y).$$

Из выражения (14) находим амплитуду собственной функции $a_1(y, \omega)$, которая определяется из условия ортогональности правой части краевой задачи для $F_{2n}(z, y, \omega)$:

$$F_{2n}''_{zz} + \frac{n^2\pi^2}{h^2(y)} F_{2n} = -\frac{1}{c^2} (2F'_{1n}S'_n + F_{1n}S''_n + F''_{0n}),$$

$$z = 0: F_{2n} = 0, \quad z = -h(y): F_{2n} = h'(y) \frac{2\Psi'_{0n}S'_n + \Psi_{0n}S''_n + F''_{0n}yz + F'_{1nz}S'_n}{z^2} \quad (15)$$

и собственной функции $\sin(n\pi z/h(y))$.

Умножив уравнения (15) на $\sin(n\pi z/h(y))$ и проинтегрировав их по z от 0 до -1 , получаем

$$\frac{n\pi h'(y) \cos n\pi}{h(y)} \frac{S'_n F'_{1nz} + 2\Psi'_{0n}S'_n + \Psi_{0n}S''_n + F''_{0n}yz}{z_n^2} \Big|_{z=-h(y)} =$$

$$= -\frac{1}{c^2} \int_{-h(y)}^0 (2F'_{1n}S'_n + F_{1n}S''_n + F''_{0n}) \sin \frac{n\pi z}{h(y)} dz, \quad (16)$$

где функция F_{1n} определена в (14).

Относительно амплитуды $a_{1n}(y, \omega)$ уравнение (16) — линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно представить в виде

$$\frac{\partial a_{1n}(y, \omega)}{\partial y} + \frac{\partial \ln r(y, \omega)}{\partial y} a_{1n}(y, \omega) = R(y, \omega), \quad (17)$$

где $r(y, \omega) = \ln [h(y)(n^2\pi^2 - (1 - \omega^2)h^2(y))^{1/4}]$; правая часть $R(y, \omega)$ — известная функция.

В соответствии с принципом локальности начальное условие имеет вид

$$a_{1n}(y_0, \omega) = 0.$$

Решение уравнения (17), удовлетворяющее этому начальному условию, записывается в виде

$$a_{1n}(y, \omega) = \frac{1}{r(y, \omega)} \int_{y_0}^y r(\eta, \omega) R(\eta, \omega) d\eta. \quad (18)$$

Выражение (18) является характерным для асимптотик высших приближений, получаемых с помощью метода геометрической оптики и его модификаций [3, 4]. Заметим, что из уравнения переноса (17) с нулевой правой частью следует такой же закон сохранения (12),

что и из однородного уравнения переноса (11). Таким образом, функция $F_{1n}(z, y, \omega)$ полностью определена.

Функция $\Psi_1(z, y, \omega)$ определяется из второго уравнения (8). Аналогично можно построить более высокие приближения F_m и Ψ_m при $m > 1$.

Результаты численных расчетов. Целью численных расчетов было сравнение функций $F_0(z, y, \omega)$ и $F_1(z, y, \omega)$, $\Psi_0(z, y, \omega)$ и $\Psi_1(z, y, \omega)$. Расчеты проводились для случая линейного профиля дна с углом наклона 7° и первой моды ($n = 1$), характерных для зоны Арктического бассейна [7, 8]. Углу наклона 7° соответствуют параметры $\lambda = 44,8$, $y_0 = 0,7$. Все расчеты проводились в “докритической зоне” $y_0 < y < y_*$, где y_* — точка поворота, т. е. y_* — корень уравнения $S'_{1y}(y, \omega) = 0$ и в данном случае $y_* = 1/\sqrt{1 - \omega^2}$.

На рис. 1–3 приведены зависимости F_0 , Ψ_0 (сплошные линии) и F_1 , Ψ_1 (штриховые линии) от частоты ω , горизонтальной координаты y , вертикальной координаты z .

Полученные аналитические и численные результаты свидетельствуют о том, что для реальных стратифицированных сред высшие приближения лучевого метода малы по сравнению с первым членом асимптотического решения. Таким образом, для качественного

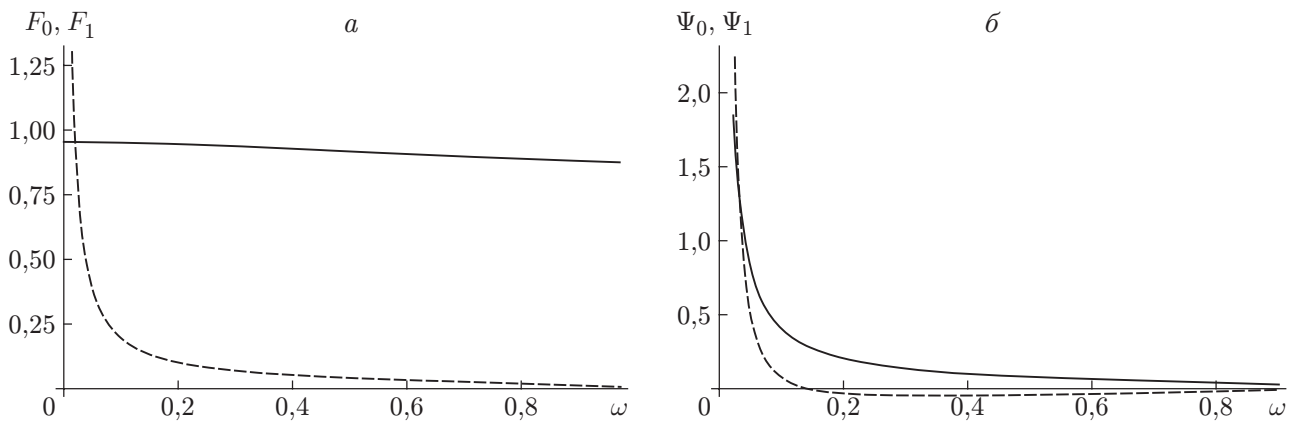


Рис. 1. Зависимости первого F_0 (сплошные линии) и второго F_1 (штриховые линии) приближений вертикальной (а) и горизонтальной (б) скоростей ВГВ от частоты ω при $z = -1,2$, $y = 0,8$

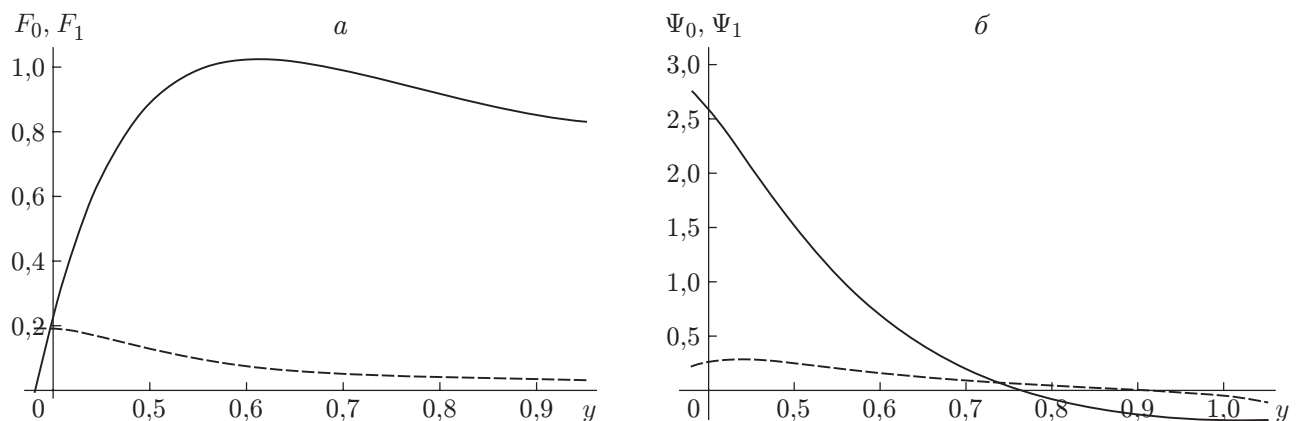


Рис. 2. Зависимости первого F_0 (сплошные линии) и второго F_1 (штриховые линии) приближений вертикальной (а) и горизонтальной (б) скоростей ВГВ от горизонтальной координаты y при $z = -1,2$, $\omega = 0,5$

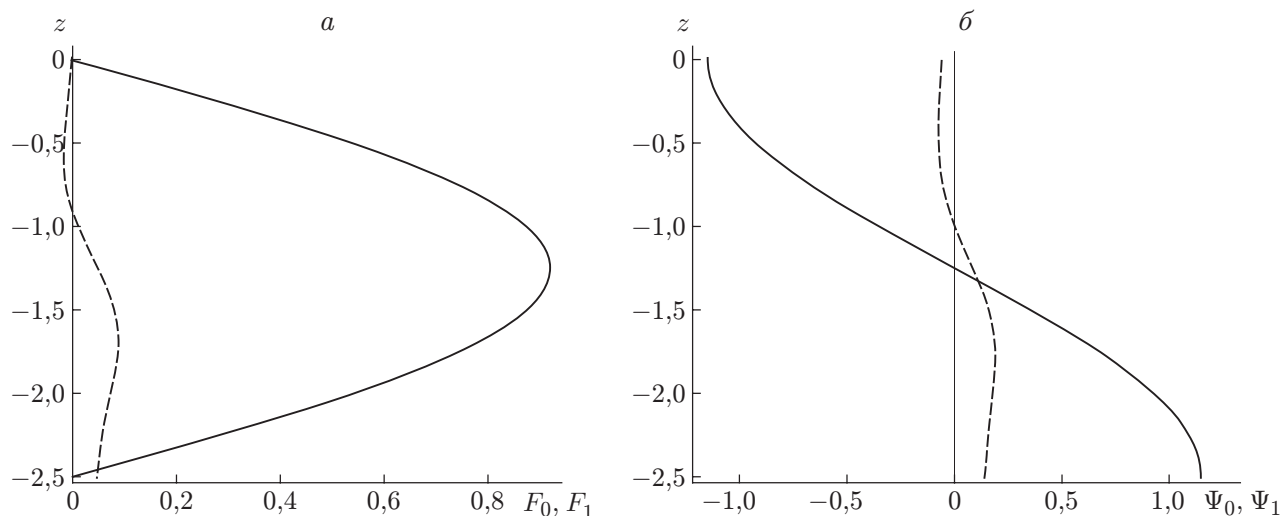


Рис. 3. Зависимости первого F_0 (сплошные линии) и второго F_1 (штриховые линии) приближений вертикальной (*а*) и горизонтальной (*б*) скоростей ВГВ от вертикальной координаты z при $y = 0,8$, $\omega = 0,5$

анализа структур полей ВГВ и интерпретации натуральных измерений в океане можно использовать только первый член асимптотических лучевых приближений решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Булатов В. В.** Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах / В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров. М.: Наука, 2010.
2. **Sutherland B. R.** Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.
3. **Бреховских Л. М.** Акустика неоднородных сред. Т. 2. Звуковые поля в слоистых и трехмерно-неоднородных средах / Л. М. Бреховских, О. А. Годин. М.: Наука, 2009.
4. **Babich V. M.** Asymptotic methods in short-wavelength diffraction theory / V. M. Babich, V. S. Buldyrev. Oxford: Alpha Sci., 2007.
5. **Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V.** Far fields of internal gravity waves in stratified media of variable depth // Russ. J. Math. Phys. 2010. V. 17, N 4. P. 400–412.
6. **Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V.** The uniform asymptotic form of the internal gravity wave field generated by a source moving above a smoothly varying bottom // J. Engng Math. 2011. V. 69, iss. 2. P. 243–260.
7. **Писарев С. В.** Низкочастотные внутренние волны у кромки шельфа Арктического бассейна // Океанология. 1996. Т. 36, № 6. С. 819–826.
8. **Grue J., Svein J. K.** A scaling law of internal run-up duration // Ocean Dynamics. 2010. V. 60. P. 993–1006.

Поступила в редакцию 16/I 2012 г.,
в окончательном варианте — 27/IV 2012 г.