

УДК 536.252+53.098+536.33

**Магнитогидродинамическое
свободноконвективное течение
по изотермической вертикальной
конической поверхности с вязкостью,
зависящей от температуры^{*}**

Е. Сандапани¹, А.Р. Рагаван², Г. Палани²

¹*Университет Мадраса, Ченнай, Тамил Наду, Индия*

²*Государственный колледж искусств им. Амбедкара, Ченнай,
Тамил Наду, Индия*

E-mail: gpalani32@yahoo.co.in

В настоящей работе изучается свободноконвективное течение по изотермической вертикальной конической поверхности, погруженной в жидкость с переменной вязкостью и магнитогидродинамическими свойствами. При использовании соответствующих переменных базовые уравнения преобразуются в безразмерные уравнения пограничного слоя. Эти уравнения затем решаются численно с использованием очень эффективного неявного конечно-разностного метода, известного как схема Кранка–Николсона. В работе рассматриваются подробные результаты для скорости, температуры, поверхностного трения и коэффициентов теплопереноса для ряда значений вязкости, параметра магнитного поля и числа Прандтля. Для проверки обоснованности полученных численных результатов проведено сравнение с данными литературных источников и обнаружено идеальное их соответствие.

Ключевые слова: вершина, магнитогидродинамика, конечная разность, число Нуссельта, вертикальный конус, переменная вязкость.

Введение

Свободноконвективные течения и теплообмен в них являются важными моментами в тепловом проектировании различного промышленного оборудования, а также в ядерных реакторах и геофизической динамике жидкости. Многие авторы изучали проблему ламинарного свободноконвективного течения в двухмерном осесимметричном случае. В статьях [1, 2] разработаны общие соотношения для автомодельных решений для изотермических осесимметричных тел, которые показали существование стационарного решения для вертикального конуса. Методы аппроксимации пограничного слоя использовались при получении выражения для безразмерного коэффициента теплопереноса. В работе [3] проведены еще два исследования изотермических осесимметричных тел, для которых существуют автомодельные решения и использован интегральный метод для получения

^{*} Работа выполнена при финансовой поддержке Комиссии университета по грантам (Нью Дели, Индия) в рамках крупномасштабного исследовательского проекта (F.No.38-224/2009(SR)).

результатов по теплопереносу в широком диапазоне чисел Прандтля. Авторы также представили результаты, полученные численным интегрированием дифференциальных уравнений с числом Прандтля 0,72. Они пришли к выводу, что форма тела влияет на теплоперенос сильнее всего при более низких числах Прандтля. Автомодельные решения для свободной конвекции на вертикальном конусе были подробно изучены в работе [4]. Авторы показали, что автомодельные решения уравнений пограничного слоя для конуса существуют, когда распределение температуры стенки — степенная функция расстояния вдоль луча конуса. Позднее в статье [5] был продолжен анализ работы [4] в плане исследования жидкости с более низким числом Прандтля и были получены численные решения для жидких металлов. Это позволило сделать вывод, что толщина пограничного слоя для жидкости с низким числом Прандтля больше. С другой стороны, задача [4] в дальнейшем изучалась в работе [6] для случая жидкости с высоким числом Прандтля. Эффект сплюснутости естественного конвективного течения по сужающемуся конусу с постоянным пристенным тепловым потоком изучался в [7]. В работе [8] использован интегральный метод для изучения суммарной теплоотдачи от вертикальных конусов в ламинарной естественной конвекции. Статья [9] посвящена изучению вязкой несжимаемой жидкости с переходным ламинарным свободноконвективным течением по неизотермическому вертикальному конусу. Безразмерные определяющие уравнения решались при использовании неявного конечно-разностного метода.

Ламинарное свободноконвективное течение в пограничном слое электропроводящей жидкости в присутствии магнитного поля исследовалось многими учеными, так как оно часто встречается в промышленных и технологических приложениях, включающих покрытие поверхностей металлов, рост кристаллов и охлаждение реактора.

В работе [10] рассматривалось нестационарное двухмерное ламинарное свободноконвективное течение несжимаемой вязкой электропроводящей (ньютоновской или полярной) жидкости через пористую среду, ограниченную бесконечной вертикальной плоской поверхностью постоянной температуры. Рассматривались влияние параметров жидкости, таких как число Грасгофа, число Прандтля, проницаемость, всасывание и магнитный параметр на скорость, угловую скорость и температуру. Обсуждались результаты расчетов, представленные графически. В работе [11] проведено численное исследование нестационарного смешанного конвективного потока на вертикальном конусе, вращающемся с угловой скоростью, зависящей от времени, под влиянием поперечного магнитного поля. Анализ нестационарной ламинарной смешанной конвекции вокруг вращающейся сферы с магнитным полем был проделан в работе [12]. Нестационарный ламинарный тепломассоперенос на вращающемся вертикальном конусе с магнитным полем и тепловыделением или абсорбцией численно исследовался в [13]. Ламинарное свободноконвективное течение в пограничном слое в присутствии поперечного магнитного поля на нагретом направленном вниз конусе, вращающемся с постоянной угловой скоростью вокруг оси симметрии, изучалось в работе [14] с использованием переменных подобия. Нестационарной задаче сопряженного тепломассообмена микрополярной жидкости в магнитодинамической (МГД) свободной конвекции вблизи вертикальной бесконечной пористой пластины с экспоненциальным уменьшением тепловыделения, с учетом вязкой диссипации и эффектов электронагрева, посвящена работа [15].

Все вышеупомянутые исследования ограничивались жидкостью с постоянной вязкостью. Однако известно, что это физическое свойство может претерпевать значительные изменения с изменением температуры [16]. Такое изменение также влияет на течение. Вязкость воды уменьшается почти на 240 %, когда температура варьируется от 10 °C ($\mu = 0,0131 \text{ г/см с}$) до 50 °C ($\mu = 0,00548 \text{ г/см с}$)

(см. [17]), где μ — динамическая вязкость воды. Таким образом, неучтенные изменения вязкости могут привести к значительным погрешностям. Кроме того, вязкость жидкости — это мера ее сопротивления потоку, которое зависит от температуры. Следовательно, чтобы точно предсказать поведение потока, необходимо рассматривать изменение вязкости в задачах о течениях жидкости. В работе [18] проанализировано двумерное смешанное конвективное течение вдоль вертикальной пластины вязкой несжимаемой жидкости с вязкостью, зависящей от температуры. В работе [19] исследован эффект излучения в свободноконвективном потоке вдоль пористой вертикальной пластины жидкости с изменяющейся вязкостью. В работе [20] изучено влияние изменения свойств жидкости на пограничные слои с растяжимой поверхностью. В статье [21] показано, что в случае, когда рассматривается эффект изменения вязкости, характеристики потока могут существенно изменяться по сравнению со случаем с постоянной вязкостью. В работе [22] изучено влияние вязкости, зависящей от температуры, на смешанное конвективное течение вдоль вертикальной пластины. Статья [23] посвящена исследованию естественного конвективного течения по вертикальному волнообразному конусу с переменной вязкостью, которая линейно зависит от температуры.

В предыдущих исследованиях обнаружено, что изменением вязкости в зависимости от температуры вызваны макроскопические физические явления механики жидкости. Нестационарный свободноконвективный поток вязкой несжимаемой жидкости по нагретому вертикальному конусу с изменениями вязкости и МГД получил меньше внимания в литературе. Поэтому проблема нестационарного свободноконвективного течения по полубесконечному изотермическому вертикальному конусу с МГД рассматривается в настоящем исследовании с учетом вариаций вязкости. Температура поверхности предполагалась выше температуры окружающей жидкости. Полуэмпирическая формула для зависимости вязкости от температуры предложена в [17].

В процессе решения задачи течения жидкости разрабатывались и применялись различные вычислительные подходы, среди которых — метод конечных разностей. Безразмерные определяющие уравнения решаются численно с использованием неявной конечно-разностной схемы Кранка–Николсона. Изучается влияние изменений вязкости и МГД на характеристики нестационарного течения, такие как скорость, температура, сдвиговое напряжение и коэффициент теплопереноса.

1. Базовые уравнения и математический анализ

Рассматривались нестационарные ламинарные свободноконвективные течения в пограничном слое вдоль нагретого вертикального конуса в присутствии магнитного поля, приложенного по нормали к поверхности, и при зависимости от температуры вязкости (см. рис. 1). Использовались пространственные координаты с осью x вдоль поверхности и y — по нормали к ней. Тепловые граничные условия на поверхности полагались изотермическими.

Температура окружающей жидкости полагалась постоянной, равной T'_∞ . В момент времени $t' > 0$ температура поверхности конуса внезапно поднималась до T'_w ($> T'_\infty$) и сохранялась на том же уровне все время $t' > 0$. Полувертикальный угол конуса равен φ , а r выбирается как локальный радиус конуса. Предполагается, что эффектом вязкой диссипации в уравнении энергии можно пренебречь. При этом допущении уравнения массы, импульса и энергии для пограничного слоя в приближении Буссинеска имеют следующий вид:

$$\partial(ru)/\partial x + \partial(rv)/\partial y = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T' - T'_\infty) \cos \phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}, \quad (3)$$

где u и v — компоненты скорости соответственно по направлениям x и y , T' — температура жидкости в пограничном слое, T'_∞ — температура вдали от поверхности конуса, t' — время, g — ускорение силы тяжести, β — объемный коэффициент теплового расширения, ρ — плотность, B_0^2 — индукция магнитного поля, а σ — электропроводность жидкости.

Начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} t' \leq 0: & \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T' = T'_\infty \quad \text{для всех } x \text{ и } y, \\ t' > 0: & \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T' = T'_w \quad \text{при } y = 0, \\ & \quad u = 0, \quad T' = T'_\infty \quad \text{при } x = 0, \\ & \quad u \rightarrow 0, \quad T' \rightarrow T'_\infty \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Из множества зависимостей вязкости от температуры T , имеющих в литературе, мы рассмотрим только формулу, предлагаемую в работе [17], которая имеет следующий вид:

$$\mu(T') = \mu_\infty / (1 + b(T' - T'_\infty)), \quad (5)$$

где b — константа, а μ_∞ — вязкость окружающей жидкости.

Интересующие нас физические свойства — локальное поверхностное трение τ_x и локальное число Нуссельта Nu_x , соответственно заданные как

$$\tau_x = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad Nu_x = \frac{x}{T'_w - T'_\infty} \left(- \frac{\partial T'}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (6)$$

Также среднее поверхностное трение $\bar{\tau}_L$ и средний коэффициент теплопередачи на поверхности конуса задается как

$$\bar{\tau}_L = \frac{2}{L^2} \int_0^L x \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx, \quad \bar{h} = \frac{2k}{L^2} \int_0^L \frac{x}{T'_w - T'_\infty} \left(- \frac{\partial T'}{\partial y} \right)_{y=0} dx. \quad (7)$$

Таким образом, среднее число Нуссельта задается формулой

$$\bar{Nu}_L = \frac{L\bar{h}}{k} = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{x}{T'_w - T'_\infty} \left(- \frac{\partial T'}{\partial y} \right)_{y=0} dx, \quad (8)$$

где k — теплопроводность жидкости.

При введении безразмерных величин

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L} Gr_L^{1/4}, \quad U = \frac{uL}{\nu} Gr_L^{-1/2},$$

$$V = \frac{v}{L} Gr_L^{-1/4}, \quad t = \frac{\nu t'}{L^2} Gr_L^{1/2},$$

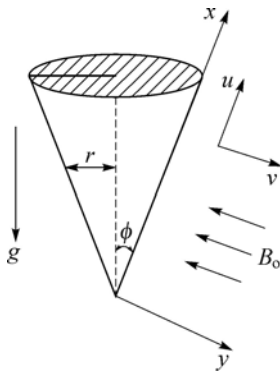


Рис. 1. Модель течения и система координат.

$$R = \frac{r}{L}, \quad T = \frac{T' - T'_\infty}{T'_w - T'_\infty}, \quad \text{Gr}_L = \frac{g\beta(T'_w - T'_\infty)L^3 \cos \phi}{\nu^2}, \quad (9)$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad M = \frac{\sigma\beta_0^2 L^2}{\rho\nu} \text{Gr}_L^{-1/2}, \quad r = x \sin \phi, \quad \lambda = b(T'_w - T'_\infty), \quad \mu_\infty = \rho\nu,$$

где ν — исходная кинематическая вязкость, λ — параметр изменения вязкости, Pr — число Прандтля жидкости, M — параметр магнитного поля, Gr_L — модифицированное число Грасгофа, L — характерная длина, $r = x \sin \phi$, уравнения (1)–(3) сводятся к следующему безразмерному виду:

$$\partial U / \partial X + \partial V / \partial Y + U / X = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = T + \frac{1}{(1 + \lambda T)} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \frac{\lambda}{(1 + \lambda T)^2} \frac{\partial T}{\partial Y} \frac{\partial U}{\partial Y} - MU, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}. \quad (12)$$

Запишем соответствующие начальные и граничные условия в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} t \leq 0: & \quad U = 0, \quad V = 0, \quad T = 0 \quad \text{для всех } X \text{ и } Y, \\ t > 0: & \quad U = 0, \quad V = 0, \quad T = 1 \quad \text{при } Y = 0, \\ & \quad U = 0, \quad T = 0 \quad \text{при } X = 0, \\ & \quad U \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0 \quad \text{при } Y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Локальное безразмерное поверхностное трение и локальное число Нуссельта задаются как:

$$\tau_X = \frac{\text{Gr}_L^{3/4}}{(1 + \lambda)} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{Y=0}, \quad \text{Nu}_X = \frac{-X(\partial T / \partial Y)_{Y=0} \text{Gr}_L^{1/4}}{T_{Y=0}}. \quad (14)$$

Безразмерное среднее поверхностное трение и среднее число Нуссельта задаются как:

$$\bar{\tau} = \frac{2\text{Gr}_L^{3/4}}{(1 + \lambda)} \int_0^1 X \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{Y=0} dX, \quad \bar{\text{Nu}} = 2\text{Gr}_L^{1/4} \int_0^1 \frac{-X(\partial T / \partial Y)_{Y=0}}{T_{Y=0}} dX. \quad (15)$$

2. Численные методы

Определяющие уравнения (10)–(12) представляют собой связанные системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, решаемые численно при начальных и граничных условиях (13) при использовании неявной конечно-разностной схемы Кранка–Николсона. Конечно-разностные уравнения, соответствующие уравнениям (10)–(12), следующие:

$$\begin{aligned} & \frac{\left[U_{i,j}^{m+1} - U_{i-1,j}^{m+1} + U_{i,j}^m - U_{i-1,j}^m + U_{i,j-1}^{m+1} - U_{i-1,j-1}^{m+1} + U_{i,j-1}^m - U_{i-1,j-1}^m \right]}{4\Delta X} + \\ & + \frac{\left[V_{i,j}^{m+1} - V_{i,j-1}^{m+1} + V_{i,j}^m - V_{i,j-1}^m \right]}{2\Delta Y} + \frac{\left[U_{i,j}^{m+1} + U_{i,j-1}^{m+1} + U_{i,j}^m + U_{i,j-1}^m \right]}{4(i\Delta X)} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{[U_{i,j}^{m+1} - U_{i,j}^m]}{\Delta t} + U_{i,j}^m \frac{[U_{i,j}^{m+1} - U_{i-1,j}^{m+1} + U_{i,j}^m - U_{i-1,j}^m]}{2\Delta X} + \\
 & + V_{i,j}^m \frac{[U_{i,j+1}^{m+1} - U_{i,j-1}^{m+1} + U_{i,j+1}^m - U_{i,j-1}^m]}{4\Delta Y} = \frac{1}{2} [T_{i,j}^{m+1} + T_{i,j}^m] + \\
 & + A \left[\frac{[U_{i,j-1}^{m+1} - 2U_{i,j}^{m+1} + U_{i,j+1}^{m+1} + U_{i,j-1}^m - 2U_{i,j}^m + U_{i,j+1}^m]}{2(\Delta Y)^2} \right] - \\
 & - \lambda A^2 \left[\frac{[U_{i,j+1}^{m+1} - U_{i,j-1}^{m+1} + U_{i,j+1}^m - U_{i,j-1}^m]}{4\Delta Y} \right] \left[\frac{[T_{i,j+1}^{m+1} - T_{i,j-1}^{m+1} + T_{i,j+1}^m - T_{i,j-1}^m]}{-M \frac{[U_{i,j}^{m+1} + U_{i,j}^m]}{2}} \right] - \\
 & - M \frac{[U_{i,j}^{m+1} + U_{i,j}^m]}{2}, \tag{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{[T_{i,j}^{m+1} - T_{i,j}^m]}{\Delta t} + U_{i,j}^m \frac{[T_{i,j}^{m+1} - T_{i-1,j}^{m+1} + T_{i,j}^m - T_{i-1,j}^m]}{2\Delta X} + \\
 & + V_{i,j}^m \frac{[T_{i,j+1}^{m+1} - T_{i,j-1}^{m+1} + T_{i,j+1}^m - T_{i,j-1}^m]}{4\Delta Y} = \\
 & = \frac{1}{Pr} \frac{[T_{i,j-1}^{m+1} - 2T_{i,j}^{m+1} + T_{i,j+1}^{m+1} + T_{i,j-1}^m - 2T_{i,j}^m + T_{i,j+1}^m]}{2(\Delta Y)^2}, \tag{18}
 \end{aligned}$$

где $A = \frac{1}{1 + \lambda 0,5(T_{i,j}^{m+1} + T_{i,j}^m)}$.

Область интегрирования рассматривается как прямоугольник со сторонами $X_{\max}(= 1)$ и $Y_{\max}(= 14)$, где Y_{\max} соответствует $Y = \infty$ и расположен достаточно далеко за динамическим и тепловым пограничным слоем. Максимум Y выбран равным 14 после нескольких предварительных исследований так, что удовлетворяются последние два из граничных условий (13). Чтобы получить экономичную и надежную сетку для расчетов, исследовано условие независимости решения от сетки. На основании этих исследований сетка 50×700 с $\Delta X = 0,02$ и $\Delta Y = 0,02$ выбрана для всех последующих расчетов. Также проводилось исследование зависимости решения от шага по времени, которое показало, что $\Delta t = 0,01$ дает надежные результаты. Здесь подстрочный индекс i обозначает узловую точку сетки в направлении X , j — в направлении Y , а подстрочный индекс m — вдоль направления t . На любом временном шаге коэффициенты $U_{i,j}^m$ и $V_{i,j}^m$, появляющиеся в разностных уравнениях, рассматриваются как константы. Величины U , V и T известны на всех узловых точках сетки при $t = 0$ из начальных условий. Расчеты U , V и T на временном уровне $(m + 1)$, использующие величины предыдущего временного уровня (m) , проводятся следующим образом: конечно-разностное уравнение (18) в каждой внутренней узловой точке на определенном i -уровне порождает тридиагональную систему уравнений. Такая система уравнений решается алгоритмом Томаса, как описано в работе [24]. Таким образом, величины T находятся

в каждой узловой точке для конкретного i на $(m + 1)$ временном уровне. При использовании величин T на временном уровне $(m + 1)$ в уравнении (17) величины U на временном уровне $(m + 1)$ находятся подобным образом. Итак, величины T и U известны на конкретном i -уровне. Наконец, величины V рассчитываются явно при использовании уравнения (16) в каждой узловой точке на конкретном i -уровне на временном уровне $(m + 1)$. Этот процесс повторяется для разных уровней i . Таким образом, величины T , U и V известны во всех точках решетки в области прямоугольника на временном уровне $(m + 1)$.

Расчеты выполняются до тех пор, пока не достигнуто стационарное решение. Стационарное решение полагается достигнутым, когда абсолютная разность между величинами U , как и температуры T на двух последовательных временных шагах, меньше 10^{-5} во всех точках сетки.

Производные в уравнениях (14) и (15) оцениваются аппроксимацией по пяти точкам, затем интегралы оцениваются с использованием замкнутой формулы интегрирования Ньютона–Котеса. Конечно-разностная схема безусловно устойчива. Локальная ошибка усечения $O(\Delta t^2 + \Delta Y^2 + \Delta X)$ стремится к нулю при Δt , ΔX и ΔY , стремящихся к нулю. Поэтому схема совместима. Устойчивость и совместимость обеспечивают сходимость.

3. Результаты и обсуждение

Для обоснования применяемой численной методики полученные профили скорости и температуры сравниваются с аналогичными из результатов работы [4] для случая постоянной вязкости ($\lambda = 0$) и $M = 0$ для $Pr = 0,7$, поскольку ни экспериментальных, ни аналитических исследований данной проблемы не существует. Результаты сравнения, показанные на рис. 2 и 3, должны хорошо согласоваться. Также локальное поверхностное трение и локальное число Нуссельта для разных величин числа Прандтля для изотермического случая, постоянной вязкости ($\lambda = 0$) и $M = 0$ при $X = 1$ в стационарном состоянии сравниваются с результатами работы [5] в табл. 1 и хорошо согласуются друг с другом.

Результаты моделирования представлены для выявления влияния переменной λ , определяющей зависимость вязкости от температуры, параметра магнитного поля и числа Прандтля (Pr) на скорость, температуру, коэффициенты сдвигового напряжения и теплопереноса. Расчеты проводились для разных величин

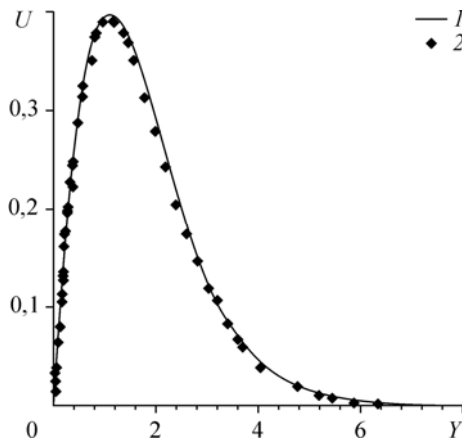


Рис. 2. Сравнение профилей скорости в стационарном состоянии при $X = 1$.

1 — результат настоящей работы, 2 — по данным работы [4]. $Pr = 0,7$, $M = 0$, $\lambda = 0$.

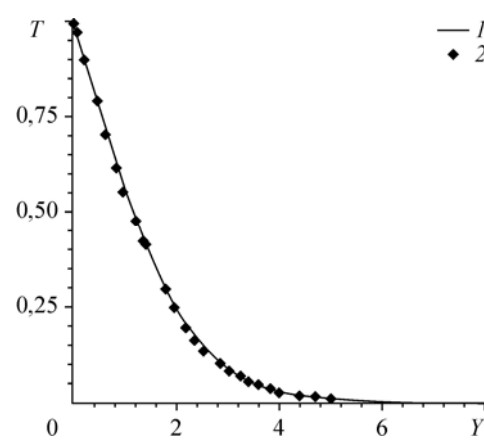


Рис. 3. Сравнение профилей температуры в стационарном состоянии при $X = 1$.

1 — результат настоящей работы, 2 — по данным работы [4]. $Pr = 0,7$, $M = 0$, $\lambda = 0$.

Таблица 1

Сравнение стационарного локального поверхностного трения (ЛПТ) и числа Нуссельта (ЧН) при $X=1$ с теми же показателями, что в работе [5] (изотермический случай, т. е. $n=0$) для $\lambda=0; M=0$

	Pr = 0,1		Pr = 0,7		Pr = 1,0	
	Данные [5]	Настоящие результаты	Данные [5]	Настоящие результаты	Данные [5]	Настоящие результаты
ЛПТ	1,096	1,09869	0,8195	0,82557	0,76940	0,77228
ЧН	0,2113	0,20875	0,4511	0,44939	0,5104	0,50840

параметра изменения вязкости λ ($= 0, 1, 2, 3$ и 4), магнитного поля M ($= 0,05$ и 2) и Pr ($= 7, 10$ и 20). Рассчитанный переходный режим безразмерной скорости, температуры, поверхностного трения и числа Нуссельта обсуждается подробно в этом разделе.

Рассчитанные зависимости скорости от времени $U(t)$ в точке $(1, 0,84)$ для разных λ , Pr и M показаны графически на рис. 4. Скорость возрастает со временем до достижения максимума в некоторый момент времени. Далее наблюдается умеренное уменьшение до достижения стационарного состояния. Например, когда $\lambda = 3, M = 0$, а Pr = 7, скорость возрастает со временем от нуля и достигает локального максимума ($U = 0,2285$ при $t = 3,47$), а затем постепенно уменьшается со временем и наступает стационарное состояние ($U = 0,22424$ при $t = 6,57$). По нашим наблюдениям, скорость в другом положении ведет себя подобным же образом. Некоторые ученые исследовали этот феномен для задач свободноконвективного потока. На ранней стадии в тепловом потоке преобладает исключительно теплопроводность. Немногим позднее существует период, когда на теплоперенос влияет эффект конвекции с увеличением вертикальных скоростей во времени. Из рис. 4 видно, что величина скорости возрастает с ростом λ , поскольку с ростом λ величина диффузии скорости уменьшается (см. (11)), результатом чего является меньшее сопротивление потоку жидкости в области временной максимальной скорости, чему способствуют и переходные характеристики скорости. Также величина скорости значительно уменьшается, когда параметр магнитного поля возрастает, та же тенденция наблюдалась в течение всего переходного периода.

Рисунки 5–7 показывают вычисленные профили скорости в переходном периоде и стационарном состоянии по координате Y при $X=1$ для разных величин λ , M и Pr соответственно. Скорость начинается с нулевой величины на стенке, достигает максимума очень близко к горячей стенке и дальше постепенно уменьшается до нуля по мере того, как Y возрастает. Разница между временным максимумом и

стационарным состоянием возрастает незначительно с возрастанием изменений вязкости, как показано в табл. 2. Но и временной максимум, и стационарное состояние достигаются значительно раньше для больших величин λ — параметра изменения вязкости. Скорость потока возрастает вблизи стенки для возрастающей

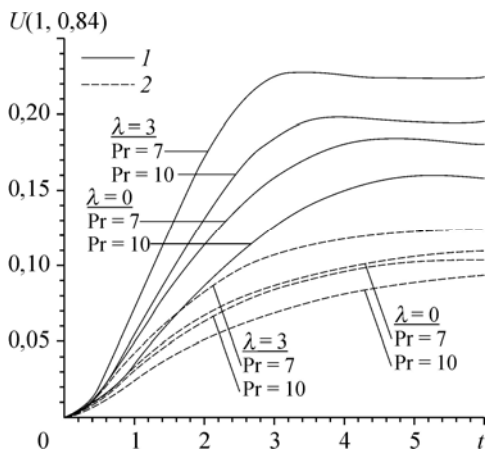


Рис. 4. Зависимости скорости от времени в точке $(1, 0,84)$ для разных λ , Pr и M . $M=0$ (1), 2 (2).

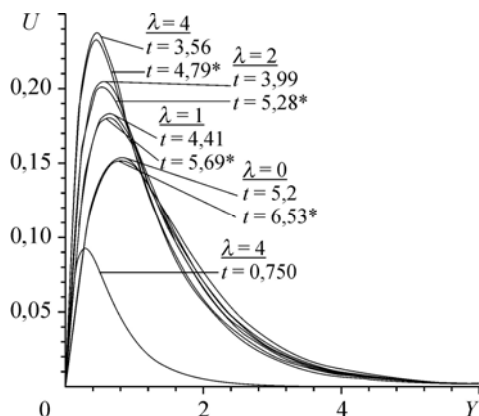


Рис. 5. Изменение профилей скорости во времени при $X = 1$ для разных λ (* — стационарное состояние).

$Pr = 7, M = 0,5.$

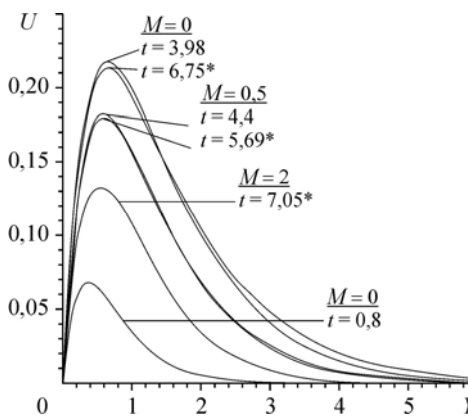


Рис. 6. Изменение профилей скорости во времени при $X = 1$ для разных M (* — стационарное состояние).

$\lambda = 1, Pr = 7.$

величины параметра изменения вязкости, а противоположная тенденция наблюдается вдали от стенки, поскольку вязкость уменьшается с ростом параметра изменения вязкости. Максимальная скорость достигается очень близко к стенке для больших величин λ . Этот качественный эффект возникает, поскольку в случае изменения вязкости ($\lambda > 0$) жидкость может легче двигаться в области, близкой к нагретой поверхности, кроме того, скорость жидкости с $\lambda > 0$ меньше по отношению к жидкости с постоянной вязкостью. Это приводит к более тонкой области динамического и теплового пограничного слоев, и, следовательно, к более высоким коэффициентам теплопереноса на поверхности.

По наблюдениям, скорость уменьшается с ростом параметра магнитного поля (рис. 6). Это происходит потому, что приложение поперечного магнитного поля приводит к силам резистивного типа (сила Лоренца), подобным силам сопротивления, которые противодействуют потоку жидкости и, таким образом, уменьшают ее скорость. Также толщина пограничного слоя уменьшается с ростом магнитного параметра. Разница между временным максимумом и устойчивым состоянием постепенно уменьшается с ростом параметра магнитного поля M , в конечном счете, временного максимума не наблюдается для больших величин параметра магнитного поля M , как показано в табл. 3.

Из рис. 7 можно заметить, что время достижения временного максимума и скорость стационарного состояния возрастает с ростом числа Прандтля Pr . По наблюдениям, скорость уменьшается с ростом Pr , поскольку влияние диффузии скорости возрастает для больших величин Pr . Когда возрастает Pr , тепловая

Таблица 2

Временные максимальные величины (ВМ) и стационарные значения (СЗ) для скорости и температуры для разных величин λ для $M = 0,5, Pr = 7,0$

λ	Скорость		Температура		Время	
	ВМ	СЗ	ВМ	СЗ	ВМ	СЗ
0	0,15342	0,15198	0,98275	0,98262	5,20	6,53
1,0	0,18295	0,18024	0,98086	0,98057	4,40	5,69
2,0	0,20467	0,20135	0,97969	0,97927	3,99	5,28
4,0	0,23746	0,23316	0,97817	0,97758	3,56	4,79

Таблица 3

Временные максимальные величины и стационарные значения для скорости и температуры для разных величин M для $\lambda = 1,0$; $Pr = 7,0$

M	Скорость		Температура		Время	
	ВМ	СЗ	ВМ	СЗ	ВМ	СЗ
0	0,21869	0,21371	0,97984	0,97905	3,98	6,75
0,5	0,18295	0,18024	0,98086	0,98057	4,40	5,69
2,0	–	0,13290	–	0,9833	–	7,05

конвекция ограничивается областью вблизи горячей стенки, в то время как диффузия импульса происходит вдали от горячей стенки, и, таким образом, максимумы скорости наблюдаются около горячей стенки. Разница между временным максимумом и стационарным состоянием уменьшается незначительно для больших величин Pr .

Полученные зависимости профилей температуры от времени в точке $(1, 0,16)$ показаны на рис. 8 для различных значений вязкости, параметра магнитного поля и числа Прандтля. Из полученных результатов следует, что температура жидкости возрастает со временем и достигает стационарного состояния. Температура при всех прочих координатах ведет себя похожим образом, но здесь это не показано.

В начальный период на изменение профиля температуры заметно влияют параметр вязкости λ и параметр магнитного поля M . Зависимость профиля температуры от времени сначала совпадает с профилем при постоянной вязкости ($\lambda = 0$), а затем отклоняется от нее. Аналогично, зависимость профиля температуры жидкости от времени сначала совпадает в случае влияния магнитного поля ($M > 0$), а через некоторое время отклоняется от него. В начальный период времени жидкость с переменной вязкостью ($\lambda > 0$) имеет те же характеристики, что и жидкость с постоянной вязкостью ($\lambda = 0$) для всех чисел Прандтля.

Профили температуры для разных величин параметра вязкости λ , параметра магнитного поля M и числа Прандтля Pr рассчитываются из уравнения (12) и графически представлены соответственно на рис. 9–11. Величина температуры уменьшается от $T = 1$ (горячая стенка) до нуля по мере увеличения Y вне зависимости от времени t . Разница между временным максимумом и стационарным состоянием значительно возрастает с возрастанием параметра вязкости. Мы также

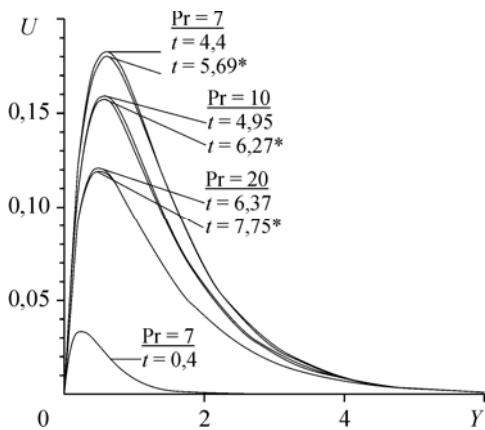


Рис. 7. Изменение профилей скорости во времени при $X = 1$ для разных Pr (* — стационарное состояние).
 $M = 0,5, \lambda = 1.$

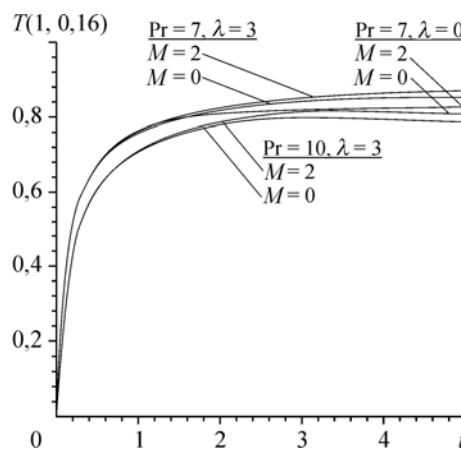


Рис. 8. Изменение профилей температуры во времени в точке $(1, 0,16)$ для разных λ, Pr и M .

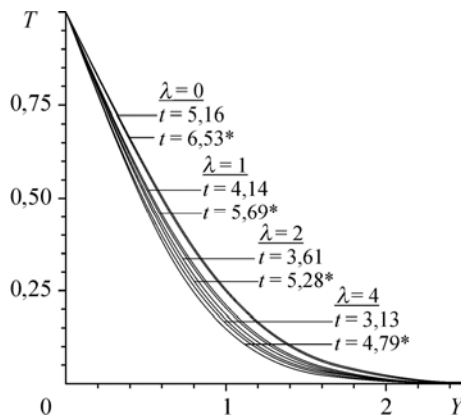


Рис. 9. Изменение профилей температуры во времени при $X = 1$ для разных λ (* — стационарное состояние).

$Pr = 7, M = 0,5.$

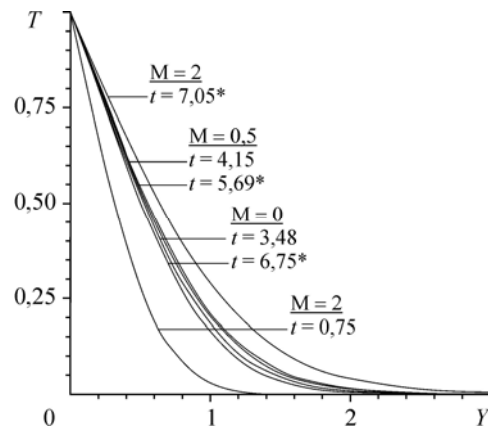


Рис. 10. Изменение профилей температуры во времени при $X = 1$ для разных M (* — стационарное состояние).

$Pr = 7, \lambda = 1.$

наблюдали, что температура уменьшается с ростом величины параметра вязкости λ . Из рис. 10 можно сделать вывод, что температура возрастает с ростом параметра магнитного поля M . Из рис. 10 и табл. 3 при отсутствии влияния магнитного поля ($M = 0$) заметно различие между временным максимумом и стационарным состоянием, и это различие отсутствует для всех более высоких величин M . Из рис. 11 видно, что профиль температуры быстро достигает стационарного состояния для меньших чисел Прандтля по сравнению с большими числами Прандтля для жидкости. Как и ожидалось, температура жидкости уменьшается с ростом величины Pr . Отметим, что большие величины чисел Pr дают более тонкие тепловые пограничные слои. Из табл. 4 видно, что разница между временным максимумом и стационарным состоянием постепенно уменьшается с ростом Pr .

Локальное и среднее поверхностные трения для разных величин λ , Pr и M графически изображены на рис. 12–15. Локальное поверхностное трение стационарного состояния возрастает с вершины конуса ($X = 0$) до переднего края конуса ($X = 1$) вне зависимости от величин параметров задачи. Среднее сдвиговое напряжение возрастает со временем t и достигает стационарного состояния по прошествии некоторого времени. И локальное, и поверхностное трения уменьшаются с ростом величины параметра вязкости λ , поскольку скорость увеличивается по мере увеличения параметра вязкости λ , как показано на рис. 5. Также наблюдаем, что локальное и среднее сдвиговые напряжения уменьшаются с ростом величины магнитного поля M . Сдвиговое напряжение уменьшается с ростом величины Pr .

Рис. 11. Изменение профилей температуры во времени при $X = 1$ для разных Pr (* — стационарное состояние).

$M = 0,5, \lambda = 2.$

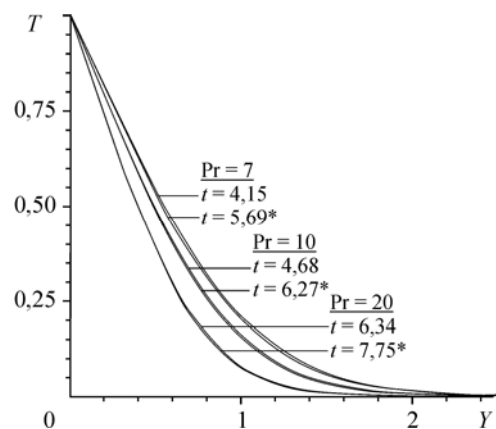


Таблица 4

Временные максимальные величины и стационарные значения для скорости и температуры для разных величин Pr для $M = 0,5$; $\lambda = 1,0$

Pr	Скорость		Температура		Время	
	ВМ	СЗ	ВМ	СЗ	ВМ	СЗ
7,0	0,18295	0,18024	0,98086	0,98057	4,40	5,69
10,0	0,15942	0,15762	0,97859	0,97836	4,95	6,27
20,0	0,12082	0,12001	0,9736	0,97349	6,37	7,75

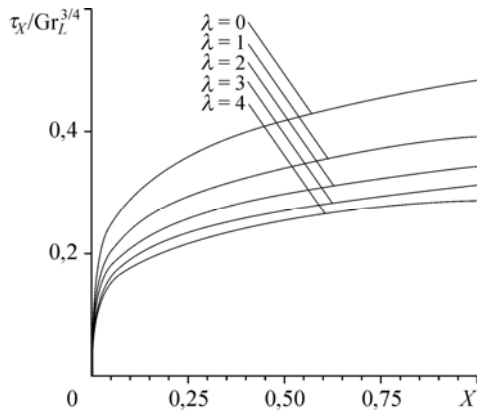


Рис. 12. Локальное поверхностное трение для разных λ .
Pr = 7, $M = 0,5$.

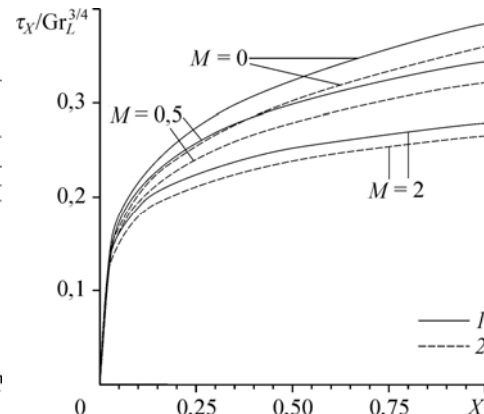


Рис. 13. Локальное поверхностное трение для разных Pr и M.
Pr = 7 (1), 10 (2); $\lambda = 2$.

Рис. 16–19 демонстрируют вычисленные локальный и средний коэффициенты теплопереноса для разных величин λ , M и Pr . Влияние вязкости на коэффициент локального теплопереноса отсутствует вблизи вершины конуса и становится заметным с ростом X . Подобным образом средний коэффициент теплопереноса для жидкости с различной вязкостью первоначально совпадает со случаем для жидкости с постоянной вязкостью, т. е. $\lambda = 0$. Затем он отклоняется от случая постоянной вязкости и достигает стационарного состояния. Также первоначально влияние магнитного поля на средний коэффициент теплопередачи равно нулю, но влияние

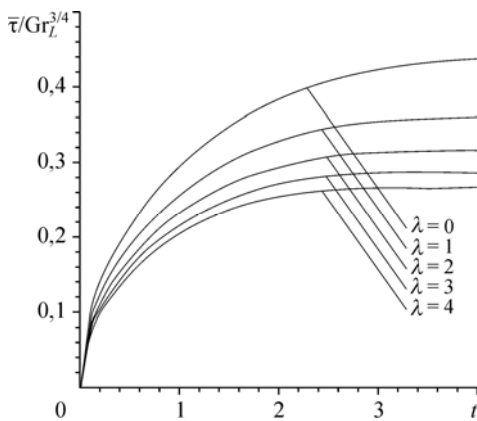


Рис. 14. Среднее поверхностное трение для разных λ .
Pr = 7, $M = 0,5$.

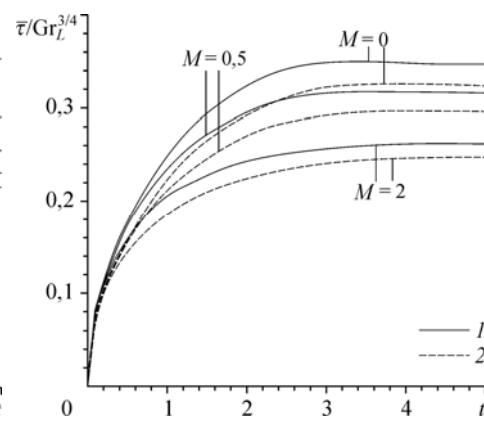


Рис. 15. Среднее поверхностное трение для разных Pr и M.
Pr = 7 (1), 10 (2); $\lambda = 2$.

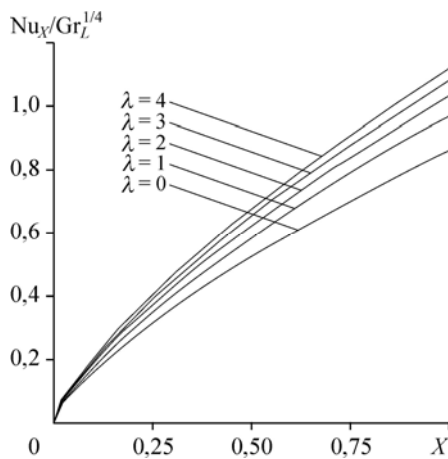


Рис. 16. Локальное число Нуссельта для разных λ .
 $Pr = 7, M = 0,5$.

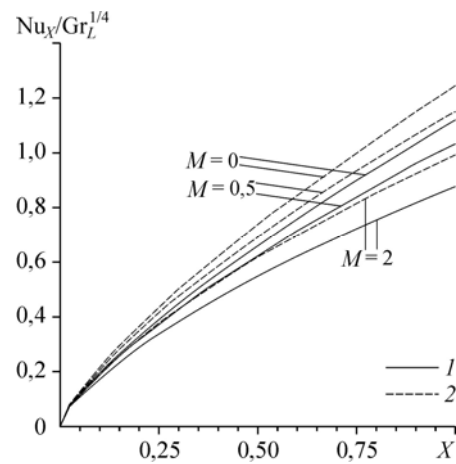


Рис. 17. Локальное число Нуссельта для разных Pr и M .
 $Pr = 7 (1), 10 (2)$.

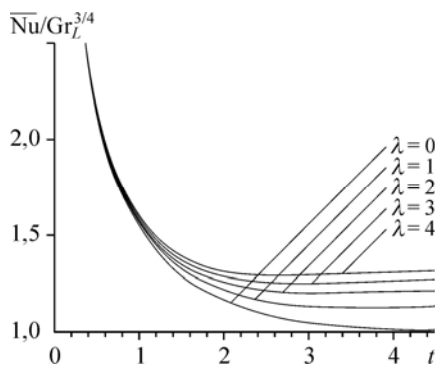


Рис. 18. Среднее число Нуссельта для разных λ .
 $Pr = 7, M = 0,5$.

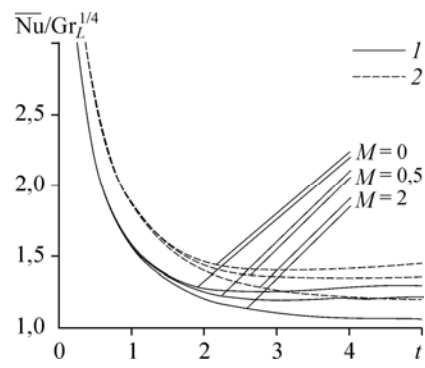


Рис. 19. Среднее число Нуссельта для разных Pr и M .
 $Pr = 7 (1), 10 (2); \lambda = 2$.

магнитного поля на средний коэффициент теплопереноса заметно через некоторое время (т. е. $t > 1$). Из рассчитанных величин локального и среднего коэффициента теплопередачи можно заключить, что коэффициент теплопереноса возрастает по мере роста параметра вязкости. Также коэффициент теплопереноса уменьшается с ростом параметра магнитного поля M . Увеличение числа Pr приводит к увеличению скорости теплопереноса и ускоряет пространственное затухание температурного поля вблизи нагретой поверхности, приводя к увеличению коэффициента теплопереноса.

Заключение

В настоящей работе исследовалась проблема нестационарного течения пограничного слоя вязкой несжимаемой жидкости с разной вязкостью по вертикальному конусу в присутствии магнитного поля. При использовании соответствующих переменных базовые уравнения трансформируются в безразмерные уравнения пограничного слоя. Эти уравнения далее решаются численно с использованием очень эффективного неявного конечно-разностного метода, известного как схема Кранка–Николсона. Подведем итоги данного исследования:

1. Скорость возрастает по мере роста вязкости и уменьшается при росте параметра магнитного поля.

2. Коэффициент поверхностного трения возрастает с уменьшением параметра вязкости и уменьшается с ростом параметра магнитного поля.

3. Безразмерная температура также уменьшается вследствие увеличения параметра изменений вязкости.

4. Разница между временным максимумом и скоростью стационарного состояния уменьшается с ростом λ .

5. Временной максимум для скорости не наблюдается для более высоких величин параметра магнитного поля.

6. Вначале влияние параметра вязкости на коэффициент теплопереноса отсутствует, становясь заметным с ростом t .

Список литературы

1. **Merk H.J., Prins J.A.** Thermal convection laminar boundary layer I // Appl. Sci. Res. A. 1953. Vol. 4. P. 11–24.
2. **Merk H.J., Prins J.A.** Thermal convection laminar boundary layer II // Appl. Sci. Res. A. 1954. Vol. 4. P. 195–206.
3. **Braun W.H., Ostrach S, Heighway J.E.** Free convection similarity flow about two-dimensional and axisymmetric bodies with closed lower ends // Int. J. Heat Mass Transfer. 1961. Vol. 2, No. 1–2. P. 121–135.
4. **Hering R.G., Grosh R.J.** Laminar free convection from a non-isothermal cone // Int. J. Heat Mass Transfer. 1962. Vol. 5, No. 11. P. 1059–1068.
5. **Hering R.G.** Laminar free convection from a non-isothermal cone at low Prandtl numbers // Int. J. Heat Mass Transfer. 1965. Vol. 8, No. 10. P. 1333–1337.
6. **Рой С.** Свободная конвекция от вертикального конуса при больших числах Прандтля // Тр. Американского общества инженеров-механиков. Серия С. Теплопередача. 1974. Т. 96, № 1. С. 119–120.
7. **Na T.Y., Chiou J.P.** Laminar natural convection of a frustum of a cone // Appl. Sci. Res. 1979. Vol. 35. P. 409–421.
8. **Alamgir M.** Over-all heat transfer from vertical cones in laminar free convection; an approximate method // Trans. ASME. Ser. C: J. Heat Transfer. 1989. Vol. 111, No. 2. P. 174–176.
9. **Vapuji Pullepu J., Ekambavannan K., Pop I.** Finite difference analysis of laminar free convection flow past a non isothermal vertical cone // Heat Mass Transfer. 2008. Vol. 44. P. 517–526.
10. **Helmy K.A.** MHD Unsteady free convection flow past a vertical porous plate // Z. Angew. Math. Mech. 1998. Vol. 78, No. 4. P. 255–270.
11. **Takhar H.S., Chamkha A.J., Nath G.** Unsteady mixed convection flow from a rotating vertical cone with magnetic field // Heat and Mass Transfer. 2003. Vol. 39. P. 297–304.
12. **Ozturk A.** Unsteady laminar mixed convection about a spinning sphere with a magnetic field // Heat and Mass Transfer. 2005. Vol. 41. P. 864–874.
13. **Chamkha A.J., Al-Mudaf A.** Unsteady heat and mass transfer from a rotating vertical cone with a magnetic field and heat generation or absorption effects // Int. J. Thermal Sci. 2005. Vol. 44. P. 267–276.
14. **Ece M.C.** Free convection flow about a vertical spinning cone under a magnetic field // Applied Mathematics and Computation. 2006. Vol. 179. P. 231–242.
15. **Zue J.** Transient free convection with mass transfer MHD micropolar fluid in a porous plate by the network method // Int. J. for Numerical Methods in Fluids. 2008. Vol. 57. P. 861–876.
16. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
17. **Ling J.X., Dybbs A.** The effect of variable viscosity on forced convection over a plate submerged in porous medium // J. Heat Transfer. 1992. Vol. 114. P. 1063–1065.
18. **Anwar H.Md., Munir Md. S.** Mixed convection flow from a vertical plate with temperature dependent viscosity // Int. J. Therm. Sci. 2000. Vol. 39. P. 173–183.
19. **Anwar H.Md., Khanafer K., Vafai K.** The effect of radiation on free convection flow of fluid with variable viscosity from a porous vertical plate // Int. J. Therm. Sci. 2001. Vol. 40. P. 115–124.
20. **Fang T.** Influences of fluid property variation on the boundary layers of a stretching surface // Acta Mechanica. 2004. Vol. 171. P. 105–118.
21. **Gray J., Kassory D.R., Tadjeran H., Zebib A.** The effect of significant viscosity variation on convective heat transport in water-saturated porous media // J. Fluid Mech. 1982. Vol. 117. P. 233–249.
22. **Kafoussias N.G., Rees D.A.S., Daskalakis J.E.** Numerical study of the combined free-forced boundary layer flow past a vertical isothermal at with temperature-dependent viscosity // Acta Mechanica. 1998. Vol. 127. P. 39–50.
23. **Hossain M.A., Munir M.S., Pop I.** Natural convection flow of a viscous fluid with viscosity inversely proportional to linear function of temperature from a vertical wavy cone // Int. J. Thermal Sci. 2001. Vol. 40. P. 366–371.
24. **Carnahan B., Luther H.A., Wilkes J.O.** Applied Numerical Methods. New York: John Wiley and Sons, 1969. 604 p.

Статья поступила в редакцию 11 августа 2011 г.