

7. Kossecka E., De Wit R. Disclination dynamics. — Archives of Mech., 1977, v. 29, N 6.
8. Ashby M. F. The deformation of plastically non-homogeneous alloys. — In.: Strengthening methods in crystals/Eds. A. Kelly, R. V. Nicholson. N. Y.: Wiley, 1974.
9. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974.
10. Разрушение/Под ред. Г. Либовица. — М.: Мир, 1975, т. 2.
11. Дитер Г. Е. Эффект упрочнения, вызванный ударными волнами. — В кн.: Механизмы упрочнения твердых тел/Под ред. М. Л. Бернштейна. М.: Metallurgia, 1965.
12. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высш. шк., 1970.

Поступила 14/XII 1985 г.

УДК 532.5

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ПЛИТЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА СЛОЕ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. Н. Белоненко, О. Ю. Динариев, А. Б. Мосолов

(Москва)

Вопросы, связанные с устойчивостью колебаний механических систем, контактирующих с вязкой сжимаемой жидкостью, часто возникают в различных областях науки, техники и современного производства. Типичный пример — задача об устойчивости тяжело нагруженного узла трения, работающего в условиях повышенной вибрации.

При учете сжимаемости жидкости, описываемой ньютоновской моделью с линейной вязкостью, необходимо наряду со сдвиговыми вязкими напряжениями учитывать также и объемные вязкие напряжения (что обычно не делается) [1]. Предположение о равенстве нулю коэффициента объемной вязкости в большинстве случаев несправедливо, кроме того, для некоторых жидкостей коэффициент объемной вязкости может во много раз (иногда на порядки) превосходить коэффициент обычной сдвиговой вязкости. В связи с этим при интенсивных силовых воздействиях на жидкость нельзя пренебрегать диссипацией энергии при изменении объема. В колебательных процессах, сопровождающихся изменением объема, влияние объемной вязкости может оказаться весьма существенным.

1. Постановка задачи и определяющие уравнения. Рассмотрим одномерную задачу о вынужденных колебаниях массивного слоя S , лежащего на слое вязкой сжимаемой жидкости (рис. 1) под действием периодической вынуждающей силы $F(t)$.

Основные уравнения задачи:
уравнение движения

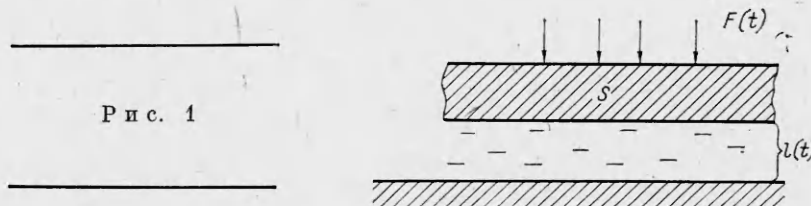
$$(1.1) \quad ml_{,tt} = p - \left(\eta_V + \frac{4}{3} \eta_s \right) \frac{l_{,t}}{l} - mg + F(t);$$

уравнение неразрывности (сохранения массы жидкости)

$$(1.2) \quad \rho l = \rho_0 l_0.$$

Здесь m — погонная масса слоя S ; $l(t)$, l_0 — текущая и начальная толщина зазора; $\rho(t)$, ρ_0 — текущая и начальная плотность жидкости; p — давление в слое жидкости; η_V и η_s — коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости; g — ускорение силы тяжести.

Если в системе происходит разрыв сплошности (отрыв слоя S от слоя жидкости), то уравнение (1.2) перестает выполняться.



Вынуждающая сила

$$(1.3) \quad F(t) = \sigma_1 \sin \omega t - \sigma_2 - p_0, \quad \sigma_2 = \sigma_1 - mg,$$

где p_0 — атмосферное давление; $\omega = 2\pi\nu$; ν — частота вынуждающей силы. Принято, что $4l_0\nu c^{-1} \ll 1$, c — скорость звука в жидкости.

При высоких давлениях (в изотермических условиях) многие жидкости удовлетворяют уравнению состояния Тейта [2, 3]

$$(1.4) \quad P(\rho) = (p_0 + B) \left\{ \exp \left[\frac{1}{A} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \right] - 1 \right\} + p_0.$$

Эта зависимость и используется в настоящей работе, причем учтено, что при движении слой S может отрываться от жидкости (считается, что это происходит, когда давление в жидкости обращается в нуль). Из сказанного следует, что давление p в формуле (1.1) нужно брать в виде

$$(1.5) \quad p = P(\tilde{\rho})h(P(\tilde{\rho})), \quad \tilde{\rho} = l_0\rho_0/l,$$

где h — функция Хевисайда.

Зависимость коэффициента сдвиговой вязкости от давления взята в соответствии с законом Баруса [4], и аналогичное выражение принято для коэффициента объемной вязкости [5]

$$(1.6) \quad \eta_s = \eta_{s_0} \exp(\alpha_s \Delta p) h(P), \quad \Delta p = p - p_0, \quad \eta_V = \eta_{V_0} \exp(\alpha_V \Delta p) h(P).$$

Уравнения (1.1) — (1.6) полностью описывают задачу о колебаниях слоя S и могут быть непосредственно использованы для прямого численного анализа устойчивости движения. Однако для большинства жидкостей такой анализ не удастся провести из-за отсутствия данных о коэффициентах вязкости и сжимаемости как функций параметров состояния. Наиболее изучены в этом отношении смазочные жидкости, поэтому в настоящей работе для численного эксперимента использованы данные для одного из машинных масел (масло веретенное АУ при 40°C) [3, 5]: $\rho_0 = 894,3 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$, $\alpha_V \simeq \alpha_s = 0,02018 \text{ МПа}^{-1}$, $A = 0,08264$, $B = 128 \text{ МПа}$, $c = 1388,8 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$, $\eta_{s_0} = 15,62 \text{ МПа}\cdot\text{с}$, $\eta_{V_0} = \zeta\eta_{s_0}$. Принято, что $p_0 = 0,1 \text{ МПа}$, $l_0m = 100 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-1}$, $\nu = 1 \text{ кГц}$.

Величина объемной вязкости сильно зависит от конкретного химического состава масла. Введением соответствующих добавок [6] можно изменить ζ на несколько порядков, не изменив при этом существенно значения остальных параметров. Поэтому представляется естественным считать безразмерную величину ζ переменным параметром и исследовать ее влияние на устойчивость колебаний слоя.

2. Метод анализа. Полагая $x = l_0^{-1}l$, $\tau = \omega t$, $y = \dot{x}$, $\theta = \tau$, перепишем уравнения (1.1), (1.2) (с учетом (1.3) — (1.6)) в виде безразмерной автономной системы в 2π -периодическом фазовом пространстве $(x, y, \theta) \in \mathbb{R}_+^2 \times S^1$, $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$:

$$(2.1) \quad \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

где $f_1(x, y, \theta) \equiv y$; $f_2(x, y, \theta) = \alpha\varphi(x)h(\varphi(x)) - \left(\zeta + \frac{4}{3}\right)byx^{-1} \exp\left[\gamma\left(\varphi(x) - \frac{\beta}{\alpha}\right)\right]h(\varphi(x)) + d\sin\theta - \beta$; $f_3(x, y, \theta) \equiv 1$; $\alpha = (p_0 + B)q$; $\beta = p_0q$; $b = \eta_{s_0}\omega q$; $\gamma = (B + p_0)\alpha_V$; $d = \sigma_1q$; $q = (ml_0\omega^2)^{-1}$; точка означает производную по τ ; $\varphi(x)$ — безразмерное давление.

При исследовании системы (2.1) используем метод отображения Пуанкаре, позволяющий получить наглядное представление о динамике системы. Для определения отображения Пуанкаре рассмотрим двумерное сечение Γ трехмерного фазового пространства системы. Например, можно

выбрать $\Gamma \equiv \Gamma_0 = \{(x, y, \theta) | \theta = 0\}$. Отображение Пуанкаре $P: \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0$ порождено потоком $\psi_t: R_+^2 \times S^1 \rightarrow R_+^2 \times S^1$, задаваемым (2.1), и определяется следующим образом:

$$P(x, y) = \pi \circ \psi_{2\pi}(x, y, 0),$$

где π — проекция на R_+^2 . Нетрудно показать, что решения (2.1) ограничены при $t \geq 0$, поэтому отображение Пуанкаре определено глобально.

Для диссипативных систем известно, что при движении происходит сжатие фазового объема. Скорость сжатия $\lambda = \text{div} f$. Если λ постоянно, то наблюдается равномерное однородное сжатие всего фазового объема. Этот случай подробно изучен в литературе.

Для системы (2.1)

$$\lambda = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial \theta} = - \left(\zeta + \frac{4}{3} \right) b x^{-1} \exp \left[\gamma \left(\varphi(x) - \frac{\beta}{\alpha} \right) \right] h(\varphi(x))$$

зависит от x и может обращаться в 0, когда слой S отрывается от жидкости и система становится гамильтоновой. На этом этапе фазовый объем, согласно теореме Лиувилля, не изменяется. Тем не менее в среднем за цикл происходит сжатие фазового объема, а отображение Пуанкаре сжимает площадь на Γ_0 . Поэтому можно ожидать, что после переходного режима установившееся движение в фазовом пространстве будет происходить по «поверхности меньшей размерности» [7], а траектории системы притянутся к некоторому аттрактору. Хорошо известные примеры модели Лоренца, уравнения Дюффинга или нелинейного осциллятора [7—11] показывают, что аттракторы выглядят чрезвычайно сложно. В простейшем же случае ими могут быть различные предельные циклы (для отображения Пуанкаре просто точки).

Приведем определение. Точка M называется устойчивой неподвижной точкой (простым аттрактором) отображения Пуанкаре периода n , если

$$P^n(M) = M, \|DP^n(M)\| < 1,$$

где $P^n = \underbrace{PP \dots P}_n$, а $\|\cdot\|$ — матричная норма, индуцированная обычной евклидовой нормой в R^2 .

3. Численный эксперимент. Отображение Пуанкаре нельзя построить без решения системы (2.1). Для решения же этой системы приходится прибегать к численным методам. Исключение составляет случай малых колебаний, когда

$$\sigma_1 / (c^2 \rho_0) \ll 1, x = 1 + \delta, |\delta| \ll 1.$$

При таких условиях система (2.1) линеаризуется и сводится к одному уравнению второго порядка

$$\ddot{\delta} = - \frac{\alpha}{A} \delta - \left(\zeta + \frac{4}{3} \right) b \dot{\delta} + d \sin \tau.$$

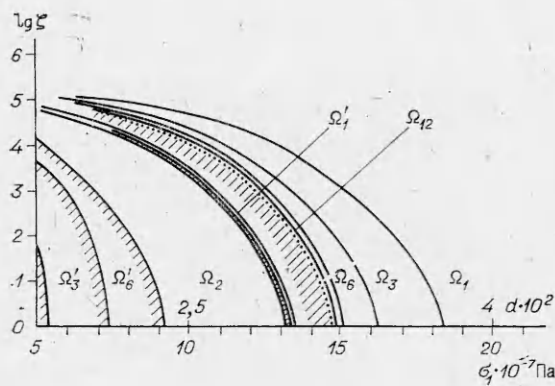
Решение его имеет вид

$$\delta = k \sin(\tau + \varphi),$$

где $k = d \left[\left(1 - \frac{\alpha}{A} \right)^2 + \left(\zeta + \frac{4}{3} \right)^2 b^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$; $\varphi = - \text{arctg} \frac{\left(\zeta + \frac{4}{3} \right) b}{1 - \frac{\alpha}{A}}$.

Следовательно, в линеаризованном случае отображение Пуанкаре имеет устойчивую неподвижную точку периода 1 $M = (1 + k \sin \varphi, k \cos \varphi)$.

Для построения отображения Пуанкаре полная система (2.1) интегрировалась численно на ЭВМ ЕС-1033 с помощью метода Рунге — Кутты при переменных ζ и d . Область изменения $d = (1,25 - 13,25) \cdot 10^{-2}$ соответ-



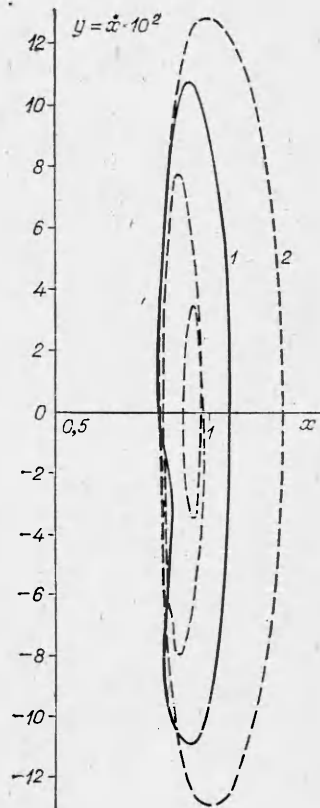
Р и с. 2

стствует изменению амплитуды нагрузки в пределах $\sigma_1 = 50-600$ МПа, параметр ζ варьировался в пределах $\zeta = 1 - 10^5$.

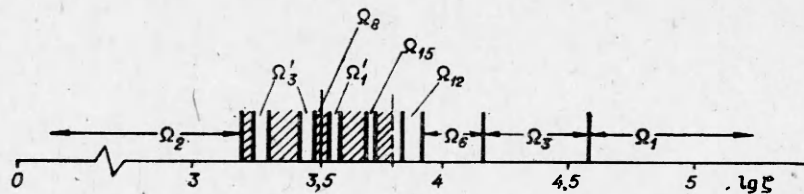
Результаты расчетов представлены на рис. 2—5. На рис. 2 показан общий вид поведения системы в координатах $\sigma_1(d) \sim \lg \zeta$, Ω_k — области изменения параметров, соответствующие периодическому движению с периодом k . Интересно, что у данной системы в отличие от большинства обычно рассматриваемых в литературе примеров потеря устойчивости основного регулярного движения периода 1 (область Ω_1) связана не с бифуркацией удвоения периода, а с бифуркацией утроения [11]. Дальнейший переход к хаотическому движению происходит через каскад последовательных бифуркаций удвоения периода, которые дают циклы периодов 6, 12, 24 и т. д. Математическая теория происходящих при этом процессов развита в [12], физические и модельные примеры влияния диссипативной нелинейности на поведение автостохастических систем изучались в [13, 14]. Граница области периодического движения (области устойчивости) обозначена на рис. 2 пунктиром, штриховкой показано начало области хаотического движения.

На рис. 3 на фазовой плоскости ($x, y = \dot{x}$) изображен простейший аттрактор периода 1 (цикл 1 $\in \Omega_1, \lg \zeta = 2, \sigma_1 = 160$ МПа) и получившийся из него после утроения периода аттрактор периода 3 (цикл 2 $\in \Omega_2, \lg \zeta = 1, \sigma_1 = 160$ МПа).

Расчеты показывают, что область хаотического движения на самом же деле содержит внутри себя обширные области периодического движения, некоторые из них приведены на рис. 2. При тщательном анализе оказывается, что внутри заштрихованных областей все еще можно выделить узкие зоны периодического движения. Взаимное расположение их



Р и с. 3

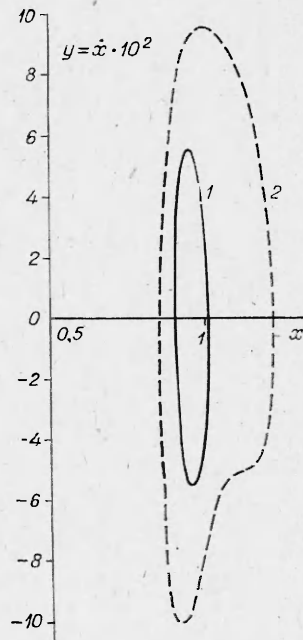


Р и с. 4

представлено на рис. 4, где показана структура «среза» рис. 2 при $\sigma_1 = 100$ МПа.

Рис. 5 дает представление о поведении периодических решений внутри «хаотической» области при $\sigma_1 = 90$ МПа. Цикл 1 ($\xi = 7 \cdot 10^3$) периода 1 принадлежит области Ω'_1 , цикл 2 ($\xi = 6 \cdot 10^3$) периода 2 взят из Ω_2 . Сравнивая рис. 3 и 5, легко заметить существенное различие в механизме изменения периода движения. В первом случае изменение периода связано с бифуркацией утроения и сопровождается «отщеплением» ветвей от цикла периода 1, во втором — периодическое движение возникает из хаотического и происходит замедление движения по циклу без изменения топологии.

Приведенные данные показывают, что устойчивость слоя (отсутствие хаоса) существенно зависит от параметра ξ (по крайней мере в области $50 \text{ МПа} < \sigma_1 < 190 \text{ МПа}$), т. е. фактически от объемной вязкости рассматриваемой жидкости. Увеличение объемной вязкости в целом благоприятно сказывается на устойчивости системы.



ЛИТЕРАТУРА

1. Белоненко В. Н., Динарцев О. Ю. О критериях учета сжимаемости вязких сред.— ДАН СССР, 1984, т. 278, № 6.
2. Hayward A. T. J. Compressibility equations for liquids: a comparative study.— Brit. J. Appl. Phys., 1967, v. 18, N 7.
3. Белоненко В. Н., Гуреев А. А., Лышенко Л. З. Объемные упругие свойства нефтяных масел.— Химия и технология топлив и масел, 1982, № 10.
4. Золотых Е. В. Исследование зависимости вязкости жидкости от давления до 5000 кг/см^2 .— Тр. ВНИИФТРИ, 1960, вып. 46 (106).
5. Белоненко В. Н. Динамические свойства рабочих жидкостей гидравлических систем.— В кн.: Пневматика и гидравлика. М.: Машиностроение, 1984, № 10.
6. Физическая акустика. Свойства газов, жидкостей, растворов/Под ред. У. Мэсона.— М.: Мир, 1968, т. 2, ч. А.
7. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика.— М.: Мир, 1984.
8. Странные аттракторы.— М.: Мир, 1981.
9. Holmes P., Whitley D. On the attracting set for Duffing equation.— Physica, 1983, v. 7D, N 1—3.
10. Holmes P. C. A nonlinear oscillator with strange attractor.— Phil. Trans. Roy. Soc. (Lond.), 1979, v. A292.
11. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
12. Афраймович В. С., Шильников Л. П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность.— В кн.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Горьковск. ун-т, 1983.
13. Анищенко В. С., Астахов В. В. Экспериментальное исследование механизма возникновения и структуры странного аттрактора в генераторе с инерциальной нелинейностью.— Радиотехника и электроника, 1983, № 6.
14. Анищенко В. С., Летчфорд Т. Е., Сафонова М. А. Влияние диссипативной нелинейности на бифуркации в автостохастических системах.— Радиотехника и электроника, 1984, № 7.

Поступила 21/VI 1985 г.