

УДК 519:6

## РЕШЕНИЕ ТРЁХМЕРНОЙ И ЧЕТЫРЁХМЕРНОЙ ЗАДАЧ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРФЛЕТАЦИИ ФУНКЦИЙ

О. Н. Литвин, Ю. И. Першина

*Украинская инженерно-педагогическая академия,  
61003, Украина, г. Харьков, ул. Университетская, 16  
E-mail: academ@kharkov.ua  
yulia\_pershina@mail.ru*

Предлагается новый метод восстановления внутренней структуры трёхмерного тела с применением четырёх томограмм, построенный на основе интерфлетации функций трёх переменных, а также новый метод описания изменений, которые происходят в объекте, с использованием томограмм, полученных в различные моменты времени на системе плоскостей, пересекающих объект.

*Ключевые слова:* интерфлетация функций, компьютерная томография, трёхмерная и четырёхмерная математические модели, смешанная аппроксимация, интерполяция.

**Введение.** Современный уровень медицинской техники позволяет выявить структурные и функциональные изменения одного и того же органа с помощью приборов, имеющих разный принцип действия. В таких условиях на первое место выходит информационная составляющая исследований. Одним из наиболее информативных методов является томография [1], которая даёт больше сведений об исследуемом объекте, чем другие известные методы диагностики. Существенно повысить информативность томографических данных можно за счёт использования разных методов решения трёхмерных ( $3D$ ) задач компьютерной томографии (например, [1, 2]), что позволяет рассмотреть отдельные части исследуемого объекта под произвольным углом.

В работе [3] внутренняя структура  $3D$ -тела восстанавливается с помощью операторов интерфлетации функций (для случая, когда экспериментальные данные (томограммы) задаются точно), а в работе [4] — с помощью оператора смешанной аппроксимации (для случая, когда существует погрешность в заданных экспериментальных данных). Проведён вычислительный эксперимент, в котором использовалось 225 томограмм. Но получение томограмм с применением компьютерного томографа — это облучение пациента, поэтому одна из задач компьютерной томографии — уменьшить дозу облучения. Таким образом, актуальна разработка методов восстановления внутренней структуры  $3D$ -тела с помощью небольшого количества входных данных, т. е. томограмм.

Особо важным является построение четырёхмерных ( $4D$ ) моделей на основе томографических данных в различные моменты времени. Эта задача очень сложная в связи с большими массивами используемой информации на каждом этапе времени и очевидными ограничениями на визуализацию результатов восстановления в моменты времени, не совпадающие с моментами, для которых предоставляются экспериментальные данные. Это может быть полезно для прогноза развития процесса (например, течения болезни). Для исследования изменений во времени и, в частности, для прогноза необходимо аналитическое по  $t, x, y, z$  представление внутренней структуры  $3D$ -тела. Известны теоретические работы, посвящённые проблемам реконструкции функций от многих переменных [5, 6].

Практические реализации алгоритмов реконструкции функций от четырёх переменных малочисленны. Между тем задачи многомерной томографии возникают при исследовании различных физических процессов и явлений, например при диагностике нестационарных объектов. С учётом изложенного актуальна задача построения аналитической  $4D$ -модели изменяющегося объекта на основе томограмм в различные моменты времени.

В данной работе предлагается метод восстановления внутренней структуры  $3D$ -тела, который использует всего четыре томограммы и основывается на интерфлетации функций. Также даётся общее представление плотностей объектов, описываемых функциями, точно восстанавливаемыми с помощью четырёх томограмм.

**Необходимые определения.** Пусть заданы функция трёх переменных  $f(x, y, z)$  в точке  $(x, y, z)$  и система плоскостей  $\Pi_p: \omega_p(x, y, z) = a_{p1}x + a_{p2}y + a_{p3}z - \gamma_p = 0, p = \overline{1, s}$ .

**Определение 1.** Следом функции  $f(x, y, z)$  на плоскости  $\Pi_p$  будем называть функцию двух переменных  $\varphi_{k,p}(x, y)$  или  $\varphi_{k,p}(x, z)$ , или  $\varphi_{k,p}(y, z)$  со свойствами

$$f_k(x, y, z)|_{\Pi_p} = \varphi_{k,p}(u, v),$$

$$(u, v) \in \Pi_p, k = \overline{1, n}, p = \overline{1, s}, (u, v) \in \{(x, y), (x, z), (y, z)\}. \quad (1)$$

**Определение 2.** Интерфлетацией функции  $f(x, y, z)$  называется восстановление (возможно, приближённое) функции  $f(x, y, z)$  в точках между плоскостями  $\Pi_p$  с помощью её следов (1) на этих плоскостях.

**Определение 3.** Томограммой  $T_p(\bar{x})$  (следом функции  $f(x, y, z)$ ) на плоскости  $\omega_p(x, y, z) = 0$  будем называть одну из трёх функций:

$$T_p(\bar{x}) = \begin{cases} f(x_p(y, z), y, z), \\ f(x, y_p(x, z), z), \\ f(x, y, z_p(x, y)), \end{cases} \quad \bar{x} = \begin{cases} (y, z), \\ (x, z), \\ (x, y), \end{cases}$$

где  $x_p(y, z), y_p(x, z), z_p(x, y)$  — решения уравнения  $\omega_p(x, y, z) = 0$ . Томограмму в момент времени  $t_k$ , которая лежит, например, на плоскости  $\omega_p(x, y, z) := z - c = 0$ , можно представить в виде следа  $f(x, y, c, t_k) = T_{k,p}(x, y)$  (рис. 1).

**Описание метода решения трёхмерной задачи компьютерной томографии.**

*Постановка задачи.* Пусть функция трёх переменных  $f(x, y, z) \in C^{(s,p,0)}(\Omega)$ ,  $s, p = \overline{0, N}$ ,  $\Omega \subset R^3$ , представляет собой плотность трёхмерного тела (или коэффициент поглощения)



Рис. 1. Представление томограммы в виде функции

и заданы четыре плоскости  $x = x_k$ ,  $y = y_\ell$ ,  $k, \ell = 1, 2$ . Из компьютерного томографа получены томограммы, лежащие на заданных плоскостях. Задача заключается в том, чтобы по указанным данным построить оператор, который будет восстанавливать исследуемый объект, и привести общий вид функций, которые будут восстанавливаться точно построенными операторами.

**Теорема 1.** Оператор  $L(x, y, z) = (L_1 + L_2 - L_1L_2)f(x, y, z)$ , где

$$L_1f(x, y, z) = \sum_{i=1}^2 \sum_{s=0}^N h_{i,s}(x) f^{(s,0,0)}(x_i, y, z);$$

$$L_2f(x, y, z) = \sum_{j=1}^2 \sum_{p=0}^N g_{j,p}(y) f^{(0,p,0)}(x, y_j, z);$$

$$L_1L_2f(x, y, z) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^N \sum_{p=0}^N h_{i,s}(x) g_{j,p}(y) f^{(s,p,0)}(x_i, y_j, z)$$

(здесь  $h_{i,s}(x)$ ,  $g_{j,p}(y)$  — вспомогательные функции со свойствами:  $h_{u,s}(x_v) = \delta_{uv}$ ,  $g_{u,s}(y_v) = \delta_{uv}$  ( $\delta_{uv}$  — символ Кронекера),  $\sum_{i=1}^2 h_{i,s}(x) = 1$ ,  $\sum_{j=1}^2 g_{j,s}(y) = 1$ ,  $s, p = \overline{0, N}$ ), является оператором интерфлетации функции трёх переменных, удовлетворяющим условиям:

$$\left. \frac{\partial^p L(x, y, z)}{\partial x^p} \right|_{x=x_k} = \left. \frac{\partial^p f(x, y, z)}{\partial x^p} \right|_{x=x_k},$$

$$\left. \frac{\partial^s L(x, y, z)}{\partial y^s} \right|_{y=y_\ell} = \left. \frac{\partial^s f(x, y, z)}{\partial y^s} \right|_{y=y_\ell}, \quad p, s = \overline{0, N}, \quad k, \ell = 1, 2.$$

Данный оператор интерфлетации восстанавливает внутреннюю структуру трёхмерного тела по известным четырём томограммам, лежащим на заданных плоскостях. Определим погрешность восстановления этим оператором.

**Теорема 2.** Пусть внутренняя структура  $3D$ -тела описывается функцией  $f(x, y, z) \in C^{(s,p,0)}(\Omega)$ ,  $\Omega \subset R^3$ ,  $s, p = 1, 2$ . Для погрешности  $Rf(x, y, z)$  приближённого восстановления внутренней структуры  $f(x, y, z)$   $3D$ -тела оператором  $L(x, y, z)$ , построенным с помощью заданного набора плоскостей и томограмм, лежащих на этих плоскостях, выполняется следующее равенство:

1) для функции  $f(x, y, z) \in C^{(1,1,0)}(\Omega)$ ,  $\Omega \subset R^3$ ,

$$Rf(x, y, z) = f(x, y, z) - Lf(x, y, z) = (I - L_1 - L_2 + L_1L_2)f(x, y, z) =$$

$$= \sum_{k=1}^2 \sum_{\ell=1}^2 h_k(x) g_\ell(y) \int_{x_k}^x \int_{y_\ell}^y f^{(1,1,0)}(u, v, z) dudv; \quad (2)$$

2) для функции  $f(x, y, z) \in C^{(2,2,0)}(\Omega)$ ,  $\Omega \subset R^3$ ,

$$Rf(x, y, z) = f(x, y, z) - Lf(x, y, z) = (I - L_1 - L_2 + L_1L_2)f(x, y, z) = \\ = \sum_{k=1}^2 \sum_{\ell=1}^2 h_k(x)g_\ell(y) \int_{x_k}^x \int_{y_\ell}^y f^{(2,2,0)}(u, v, z)(x_k - u)(y_\ell - v)dudv. \quad (3)$$

Теперь найдём общий вид функций, описывающих внутреннюю структуру  $3D$ -тела, которые точно будут восстанавливаться с помощью оператора интерфлетации, построенного в теореме 1, с использованием четырёх томограмм, лежащих на заданных плоскостях  $x = x_k$ ,  $y = y_\ell$ ,  $k, \ell = 1, 2$ . Рассмотрим два случая.

1. Функция  $f(x, y, z)$  принадлежит к классу  $C^{(1,1,0)}(\Omega)$ ,  $\Omega \subset R^3$ . Для точного восстановления погрешность приближения должна равняться нулю. Из общего вида погрешности (2) следует, что выполняется равенство

$$\int_{x_k}^x \int_{y_\ell}^y f^{(1,1,0)}(u, v, z)dudv = 0,$$

т. е.  $f^{(1,1,0)}(x, y, z) = 0$ . Решая это дифференциальное уравнение, получим общий вид функции, которая точно восстанавливается с помощью оператора интерфлетации, определённого в теореме 1:

$$f(x, y, z) = u(y, z) + v(x, z), \quad \forall u(y, z), v(x, z) \in C^{(1,0)}(R^2).$$

2. Функция  $f(x, y, z)$  принадлежит к классу  $C^{(2,2,0)}(\Omega)$ ,  $\Omega \subset R^3$ . Из общего вида погрешности (3) следует, что должно выполняться равенство

$$\int_{x_k}^x \int_{y_\ell}^y f^{(2,2,0)}(u, v, z)(x_k - u)(y_\ell - v)dudv = 0,$$

т. е.  $f^{(2,2,0)}(x, y, z) = 0$ . Решая это дифференциальное уравнение, получим общий вид функции, которая точно восстанавливается с помощью определённого оператора интерфлетации:

$$f(x, y, z) = x \int \left[ \int \varphi_1(y, z)dy \right] dy + \int \left[ \int \varphi_2(y, z)dy \right] dy + y\psi_1(x, z) + \psi_2(x, z),$$

где  $\forall \varphi_1(y, z), \varphi_2(y, z) \in C(R^2)$ ,  $\forall \psi_1(x, z), \psi_2(x, z) \in C^{(2,0)}(R^2)$  являются произвольными функциями.

**Построение четырёхмерной математической модели трёхмерного тела. Постановка задачи.** В качестве входных данных будем использовать:

- 1) последовательность моментов времени  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ;
- 2) серию  $s$  плоскостей, заданных уравнением  $\Pi_p: \omega_p(x, y, z) = a_{p1}x + a_{p2}y + a_{p3}z - \gamma_p = 0$ ,  $p = \overline{1, s}$ , на которых находятся томограммы, представляющие собой функции-матрицы  $\varphi_{k,p}(x, y)$  или  $\varphi_{k,p}(x, z)$ , или  $\varphi_{k,p}(y, z)$ .

Требуется по данной информации построить функцию  $F(x, y, z, t)$  со свойствами:

$$F(x, y, z, t) \in C(D),$$

$$F(x, y, z, t_k)|_{\omega_p(x, y, z)=0} = f_k|_{\omega_p(x, y, z)=0} = \varphi_{k,p}(u, v), \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, s},$$

$$f_k(x, y, z) = f(x, y, z, t_k), \quad k = \overline{1, n}.$$

Задача в такой постановке не имеет единственного решения. Однако при определённых ограничениях на класс приближающих функций она будет иметь единственное решение. Более того, для некоторых классов приближаемых функций  $f(x, y, z, t)$  может быть оценена погрешность приближения.

Пусть функция  $f(x, y, z, t)$  представляет собой внутреннюю структуру  $3D$ -объекта в момент времени  $t$ . Пусть заданы  $n$  моментов времени  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  и система произвольных плоскостей  $\Pi_p$ ,  $p = \overline{1, s}$ . И пусть заданы томограммы  $3D$ -объекта  $T_{k,p}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $p = \overline{1, s}$ , на заданных плоскостях и в заданные моменты времени. Томограммы получены с помощью компьютерного томографа, т. е. имеем  $n$  групп томограмм (в каждой группе по  $s$  томограмм), в которых они представлены в один и тот же момент времени, но лежат на разных плоскостях. Отметим, что количество томограмм в разные моменты времени может быть, вообще говоря, различным. Это же касается и уравнений плоскостей, на которых лежат томограммы. Более того, в разные моменты времени эти плоскости могут быть различными.

Вначале построим  $n$  трёхмерных математических моделей внутренней структуры объекта  $f_k(x, y, z)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , для каждой из заданных групп томограмм. Для этого можно использовать методы, разработанные в [3, 4]:

— если экспериментальные данные (характеристики томограмм — геометрические параметры плоскостей, в которых лежат томограммы, а также изображение на томограммах) заданы точно, то можно использовать метод восстановления внутренней структуры  $3D$ -тела с помощью интерфлетиции функций [3];

— если экспериментальные данные заданы с погрешностью, то можно применить метод решения задач трёхмерной компьютерной томографии с помощью смешанной аппроксимации [4].

Указанные методы восстановления внутренней структуры  $3D$ -тела отличаются высокой точностью.

После построения набора  $3D$ -моделей  $f_k(x, y, z)$  строим четырёхмерную математическую модель  $F(x, y, z, t)$ , используя метод интерполяции по переменной  $t$  (если экспериментальные данные (томограммы) заданы точно), в виде формулы

$$F(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n h_k(t) f_k(x, y, z), \quad (4)$$

где  $h_k(t)$  — вспомогательные функции, которые могут быть сплайнами степени  $r$ ,  $r = 1, 2, 3, \dots$ , полиномами степени  $n - 1$  или тригонометрическими полиномами. Если же экспериментальные данные заданы с погрешностью, то предлагается использовать аппроксимацию по переменной  $t$ .

**Вычислительный эксперимент.** В данной работе в качестве примера решается следующая задача: построение четырёхмерной математической модели изменяющегося во времени сердца на основе данных, полученных с помощью магнитно-резонансного компьютерного томографа фирмы "Siemens" (Германия) в радиологическом отделении кардиологического центра при Институте педиатрии, акушерства и гинекологии НАМН Украины (г. Киев).

Проведён вычислительный эксперимент по восстановлению внутренней структуры сердца человека, изменяющегося во времени. В качестве экспериментальных данных были взяты:

- 1)  $n = 25$  моментов времени;
- 2)  $s = 9$  параллельных сечений сердца плоскостями, перпендикулярными оси  $OX$  (метод позволяет использовать наряду с данными томограммами также томограммы, лежащие в других сечениях, не перпендикулярных оси  $OX$ );
- 3) томограммы сердца, лежащие на девяти заданных плоскостях в каждые из 25 моментов времени.

Таким образом, имеем 25 групп томограмм. В каждой группе представлены томограммы, выполненные в один определённый момент времени в девяти сечениях (т. е. в каждой группе по девять томограмм). На рис. 2 и 3 показаны примеры томограмм в разные моменты времени в одних и тех же сечениях.

С помощью оператора интерфлетации [3] построены 25 математических моделей внутренней структуры в виде функций  $f_k(x, y, z)$ ,  $k = \overline{1, 25}$ . Затем эти модели реализованы при построении четырёхмерной математической модели с использованием формулы (4).

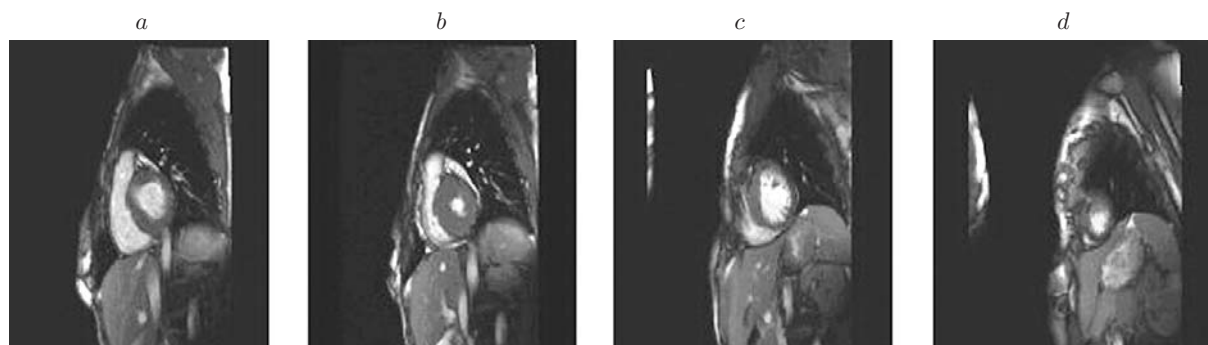


Рис. 2. Примеры томограмм, сделанных в момент времени  $t_1$ , в сечениях:  $a — x = 0,1$ ,  $b — 0,3$ ,  $c — 0,5$ ,  $d — 0,8$

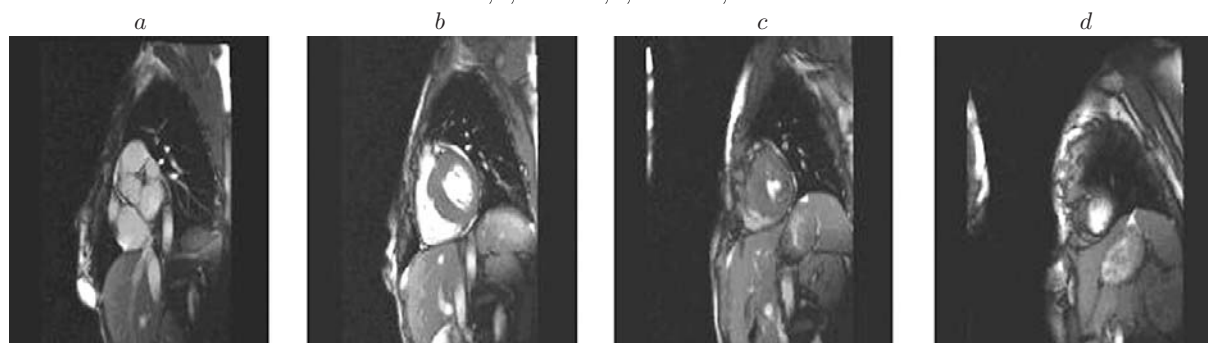


Рис. 3. Примеры томограмм, сделанных в момент времени  $t_{25}$ , в сечениях:  $a — x = 0,1$ ,  $b — 0,3$ ,  $c — 0,5$ ,  $d — 0,8$

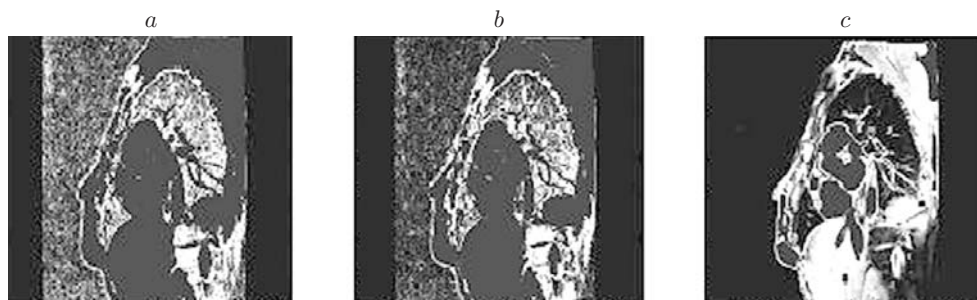


Рис. 4. Восстановление внутренней структуры сердца в плоскости  $x = 0,1$  в моменты времени:  $a — t_5$ ,  $b — t_{12}$ ,  $c — t_{20}$



Рис. 5. Восстановление внутренней структуры сердца в плоскости  $x = 0,3$  в моменты времени:  $a — t_5$ ,  $b — t_{12}$ ,  $c — t_{20}$

На основании построенной четырёхмерной математической модели найдём изображение сердца человека в плоскости, задаваемой уравнением  $x = a$ , в конкретный момент времени  $t = t_{\text{прогноз}}$ . На рис. 4 и 5 приведены результаты вычислительного эксперимента.

**Заключение.** В данной работе представлен новый метод решения  $3D$ -задачи компьютерной томографии с помощью только четырёх томограмм, параллельных оси  $OZ$ , с использованием оператора интерфлетации функций трёх переменных. Исследованы классы объектов, внутренняя структура которых точно восстанавливается такими операторами. Этот метод может позволить уменьшить количество экспериментальных данных (т. е. дозу облучения) и увеличить точность восстановления трёхмерных объектов, принадлежащих к исследованным классам.

В работе также предложен новый метод построения четырёхмерной математической модели  $3D$ -тела, внутренняя структура которого меняется со временем, с применением операторов интерполяции по переменной  $t$ . Четырёхмерная модель строится на основе  $3D$ -моделей объекта, использующих операторы интерфлетации или смешанной аппроксимации функций трёх переменных  $x, y, z$ . С помощью построенной  $4D$ -модели найдена математическая модель объекта в конкретный момент времени  $t = t_{\text{прогноз}}$ . В качестве примера приведена визуализация объекта (сердца человека) в плоскостях, заданных исследователем, с применением томограмм, полученных на магнитно-резонансном томографе фирмы "Siemens". Продемонстрированы результаты вычислительного эксперимента. Восстановленная  $4D$ -модель может быть использована не только для нахождения изображения объекта в заданном сечении в фиксированный момент времени, который не совпадает с экспериментально заданными значениями времени, но и для анализа течения болезни путём исследования поведения функции четырёх переменных в зависимости от времени и пространственных координат.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. **Наттерер Ф.** Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990. 279 с.
2. **Карих В. П.** Вычислительная эффективность конвейерного алгоритма трехмерной томографии // Автометрия. 2008. **44**, № 1. С. 92–99.
3. **Литвин О. Н., Першина Ю. И.** Восстановление внутренней структуры трехмерного объекта по его томограммам, лежащим в системе трех групп пересекающихся плоскостей // Автометрия. 2006. **42**, № 2. С. 107–118.
4. **Литвин О. Н., Першина Ю. И.** Метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла з використанням томограм та мішаної апроксимації // Таврічний вісник інформатики та математики. 2008. № 2. С. 18–24.
5. **Хелгасон С.** Преобразование Радона. М.: Мир, 1983. 150 с.
6. **Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.** Избранные задачи интегральной геометрии. М.: Добросвет, 2000. 656 с.

*Поступила в редакцию 28 февраля 2011 г.*

---