УДК 517.977

Отслеживание решения нелинейного распределенного дифференциального уравнения законами обратной связи*

Ю.С. Осипов[1,2], В.И. Максимов[3]

[1]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, Москва, 119991

[2]Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, ул. Губкина, 8, Москва, 119991

[3]Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620990

E-mails: osipov@pran.ru (Осипов Ю.С.), maksimov@imm.uran.ru (Максимов В.И.)

Осипов Ю.С., Максимов В.И. Отслеживание решения нелинейного распределенного дифференциального уравнения законами обратной связи // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 2. — С. 201–213.

Рассматривается нелинейное распределенное уравнение второго порядка. Указывается основанный на конструкциях теории управления по принципу обратной связи алгоритм отслеживания предписанного решения. Алгоритм устойчив к информационным помехам и погрешностям вычислений. Он ориентирован на достаточно большой промежуток времени, на котором рассматривается решение уравнения.

DOI: 10.15372/SJNM20180206

Ключевые слова: *распределенное уравнение, обратная связь, задача слежения.*

Osipov Yu.S., Maksimov V.I. Tracking the solution to a nonlinear distributed differential equation by feedback laws // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 2. — P. 201–213.

A nonlinear distributed second order equation is considered. An algorithm for tracking a prescribed solution based on constructions from the feedback control theory is designed. The algorithm is stable with respect to informational noise and computational errors. It is oriented to a large enough time interval, where the solution is considered.

Keywords: *distributed differential equation, feedback, tracking problem.*

Введение

Проблемы управления по принципу обратной связи при наличии неконтролируемых динамических возмущений возникают во многих прикладных задачах. Методы решения подобного типа задач изучаются прежде всего в теории дифференциальных игр [1]. В настоящей работе мы обращаемся к хорошо известной задаче об отслеживании предписанного решения в условиях ненаблюдаемых переменных внешних воздействий. Мы рассматриваем процесс отслеживания в течение бесконечного промежутка времени. Для исследования такого вида процесса, в частности, применим предложенный Н.Н. Красовским подход, основанный на методе стабильных дорожек [1]. В последние годы этот подход был развит применительно к системам с последействием, подверженных воздействию случайных возмущающих факторов [2].

*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00539).

Обсуждаемая в настоящей работе постановка имеет две особенности. Во-первых, мы рассматриваем дифференциальное уравнение с распределенными параметрами. Последнее, в отличие от систем обыкновенных дифференциальных уравнений, имеет бесконечномерное пространство, в котором остается фазовое состояние — решение уравнения. Вследствие этого конструкции из работ [1, 2] в рассматриваемом нами случае оказываются неприменимы. Во-вторых, мы предполагаем, что текущие значения решений уравнений наблюдаются с малыми погрешностями. Это предположение в условиях действия неизвестных изменяющихся во времени возмущений (в дальнейшем мы трактуем их как эталонные управления, а соответствующие решения — как эталонные, предписанные, решения) ведет к невозможности точного отслеживания предписанного решения. Соответственно мы требуем лишь его приближенного отслеживания.

1. Постановка задачи

Рассматривается краевая задача:

$$\ddot y(t,\eta)-\Delta y(t,\eta)+my(t,\eta)+\gamma\dot y(t,\eta)=g\big(y(t,\eta)\big)+\big(Bu(t)\big)(\eta)+f(t,\eta)\quad \text{п. в. на}\quad T\times\Omega, \tag{1.1}$$

$$y(t,\eta)=0\quad \text{п. в. на}\quad T\times G$$

с начальными условиями

$$y(0,\eta)=y_0(\eta)\in V=H_0^1(\Omega),\qquad \dot y(0,\eta)=y_{10}(\eta)\in H=L_2(\Omega). \tag{1.2}$$

Здесь $T=[0,+\infty)$, Ω — ограниченное множество с липшицевой границей G, $m=\mathrm{const}>0$, $\gamma=\mathrm{const}>0$, $g(\cdot):R\to R$ — функция, удовлетворяющая условию Липшица с постоянной L, $g(0)=0$, $f(\cdot)\in L_\infty(T;H)$ — заданная функция, производная $\dot y(\cdot)$ понимается в смысле пространства распределений, B — линейный непрерывный оператор, действующий из гильбертова пространства U с нормой $|\cdot|_U$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_U$ (пространство управлений) в пространство V $(B\in L(U;V))$.

Уравнение (1.1) с начальными условиями (1.2) исследовалось многими авторами (см., например, монографию [3], где имеется соответствующая библиография). При этом в указанных работах рассматривались вопросы существования и единственности решения, его продолжимости, регулярности и т. д. В настоящей статье мы остановимся на задаче отслеживания предписанного решения.

Прежде чем перейти к постановке задачи, дадим определение решения уравнения (1.1). Всякую функцию $y(\cdot)\in C(T_\vartheta;V)$ такую, что

$$\dot y(\cdot)\in W(T_\vartheta;V)=\big\{x(\cdot)\in C(T_\vartheta;H):\ \dot x(\cdot)\in L_2(T_\vartheta;V^*)\big\},$$

удовлетворяющую соотношению

$$\ddot y(t)-\Delta y(t)+my(t)+\gamma\dot y(t)=g(y(t))+(Bu)(t)+f(t)\ \text{ в }\ V^*\ \text{ п. в. на }\ T_\vartheta,$$

будем называть решением уравнения (1.1) на промежутке $T_\vartheta=[0,\vartheta]$, $\vartheta>0$, и обозначать символом $y(\cdot)=y(\cdot\,;y_{10},y_0,u(\cdot))$. Функцию $y(t)$, $t\in T$, назовем решением уравнения (1.1) на промежутке T, если $y(\cdot)$ есть решение (1.1) на всяком промежутке T_ϑ, $\vartheta>0$.

Пусть $P(\cdot)$ есть множество измеримых (по Лебегу) функций $u(\cdot):[0,+\infty)\to P$, называемое множеством допустимых управлений. Здесь $P\subset U$ — заданное априори выпуклое, замкнутое и ограниченное множество.

Условие 1. Существуют числа $K \geq 0$ и K_1 такие, что $K_1 < \lambda + m - KL$ и $xg(x) - K\sigma(x) \leq K_1 x^2 \; \forall\, x \in R$, где $\sigma(x) = \int_0^x g(y)\, dy$, $\lambda = \inf\big\{|\nabla x(\eta)|_{L_2(\Omega)} :\; x \in V, |x|_H = 1\big\}$.

Условие 2. $2L < \lambda + m$.

Прямым следствием теоремы 8.4.5 из [3, с. 139] является

Лемма. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2. *Тогда, каково бы ни было* $u(\cdot) \in P(\cdot)$, *существует единственное решение* $y(\cdot) = y(\cdot\,; t_0, y_{10}, y_0, u(\cdot))$ *уравнения* (1.1) *на промежутке* T.

Рассматриваемая в настоящей работе задача формулируется следующим образом. Наряду с уравнением (1.1) имеется еще одно уравнение того же вида

$$\ddot{x}(t) - \Delta x(t) + mx(t) + \gamma\dot{x}(t) = g(x(t)) + (Bu_*)(t) + f(t) \tag{1.3}$$

$$\text{в} \quad V^* \;\; \text{п. в. на} \;\; T$$

с начальным состоянием $x(0) = \xi_0^h$, $\dot{x}(0) = \xi_{10}^h$. Будем предполагать, что элементы $\xi_{10}^h \in H$ и $\xi_0^h \in V$ удовлетворяют неравенствам

$$|\xi_{10}^h - y_{10}|_H \leq h, \qquad |\xi_0^h - y_0|_V \leq h. \tag{1.4}$$

Уравнение (1.3) — "копия" уравнения (1.1). Отличие состоит лишь в том, что в (1.1) в правой части стоит управление $u(\cdot)$, которое необходимо сформировать. Уравнение (1.3) (назовем его в дальнейшем эталонным) подвержено воздействию некоторого априори фиксированного, но неизвестного, изменяющегося во времени возмущения (в дальнейшем назовем его эталонным управлением) $u_*(\cdot) \in P(\cdot)$.

Эталонное управление $u_*(\cdot)$, а также отвечающее ему решение $x(\cdot) = x(\cdot\,; \xi_{10}, \xi_0, u_*(\cdot))$ уравнения (1.3), заранее неизвестны. В моменты времени $\tau_i \in T$ $(i = 1, 2, \ldots)$ измеряется с ошибкой решение $y(\tau_i)$ уравнения (1.1). Результаты измерения — элементы $\{\xi_{1i}^h, \xi_i^h\} \in V^* \times V^*$ — таковы, что

$$\big|\xi_{1i}^h - \dot{y}(\tau_i)\big|_{V^*} \leq \nu_i^h, \qquad \big|\xi_i^h - y(\tau_i)\big|_{V^*} \leq \nu_i^h, \tag{1.5}$$

где $\nu_i^h \in (0, 1)$ — величина ошибки измерения в момент τ_i, число $h \in (0, 1)$ характеризует точность измерения. Требуется указать алгоритм формирования управления $u = u^h(\cdot)$ в уравнении (1.1), позволяющий осуществлять отслеживание решением $y(\cdot)$ этого уравнения решение $x(\cdot)$ уравнения (1.3). Таким образом, рассматривается задача, состоящая в построении алгоритма, который по текущим измерениям величин $\{y(\tau_i), \dot{y}(\tau_i)\}$ и $\{x(\tau_i), \dot{x}(\tau_i)\}$ в "реальном времени" формирует (по принципу обратной связи) управление $u = u^h(\cdot)$ в правой части уравнения (1.1) такое, что "отклонение" $y(\cdot) = y(\cdot\,; y_{10}, y_0, u^h(\cdot))$ от $x(\cdot) = x(\cdot\,; \xi_{10}^h, \xi_0^h, u_*(\cdot))$ мало при достаточной малости измерительной погрешности h.

В случае когда промежуток функционирования системы T ограничен, рассматриваемая задача может быть решена, например, на основе конструкций работ [4, 5]. Следует отметить, что предложенные в указанных выше работах алгоритмы ориентированы именно на конечный промежуток времени. С возрастанием длины этого отрезка происходит накопление вычислительных и измерительных ошибок. Алгоритм, свободный от этого недостатка, сконструирован в работах [6–8]. При этом в [6, 7] рассмотрена система, описываемая нелинейным (по фазовой переменной) векторным обыкновенным дифференциальным уравнением, а в [8] — распределенным дифференциальным уравнением первого порядка — параболическим уравнением.

Пусть при каждом $h \in (0,1)$ фиксировано семейство $(\Delta_h)_{h>0}$ равномерных разбиений полуоси $[0,+\infty)$ моментами времени $\tau_{h,i}$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{\infty}, \quad \tau_{h,0} = 0, \ \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta_i(h), \ \delta_i(h) \in (0,1). \tag{1.6}$$

Рассмотрим два случая. В первом случае будем предполагать, что на помехи накладываются ограничения “малости” их значений в каждый момент времени, а во втором — ограничения “малости” их средних значений за весь промежуток времени функционирования системы (“малости” их интегральных погрешностей). Введем два условия.

Условие 3. $\delta_i(h) = \delta(h)$, $\nu_i^h = h$ при всех $i = 0, 1, \ldots$.

Условие 4. Семейство разбиений Δ_h и величины ошибок измерений ν_i^h таковы, что имеют место соотношения

$$\nu_i^h \in [0,1] \quad \text{при всех } i \text{ и всех } h \in (0,1),$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \delta_i(h)\nu_i^h \le \varphi_1(h) \to 0+ \quad \text{при } h \to 0+.$$

Таким образом, при выполнении условия 3 разбиения Δ_h являются равномерными.

Заметим, что в силу непрерывности вложения пространства V в пространство H справедливы неравенства

$$|x|_H \le c_0 |x|_V \quad \forall\, x \in V, \tag{1.7}$$

$$|x|_{V^*} \le c_1 |x|_H \quad \forall\, x \in H. \tag{1.8}$$

Здесь c_0 и c_1 — некоторые положительные константы. Предположим, что решение $x(t)$, $t \ge 0$, уравнения (1.3) (как и решение уравнения (1.1)) наблюдается в моменты $\tau_{h,i}$ с ошибкой. Всякую кусочно-постоянную функцию $\Xi^h(\cdot) : [0,+\infty) \mapsto V^* \times V^*$,

$$\Xi^h(t) = \Xi_i^h = \{\xi_{1i}^h, \xi_i^h\} \in V^* \times V^* \quad \text{при} \quad t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}),$$

$\xi_0^h \in V$, $\xi_{10}^h \in H$, удовлетворяющую ограничениям (1.5), (1.4), будем называть *допустимым измерением* $y(\cdot)$ *точности* h. Аналогично определяется *допустимое измерение* $x(\cdot)$ *точности* h. Это есть кусочно-постоянная функция $\Psi^h(\cdot)$:

$$\Psi^h(t) = \Psi_i^h = \{\psi_{1i}^h, \psi_i^h\} \in V^* \times V^* \quad \text{при} \quad t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}),$$

где Ψ_i^h, $i \ge 1$, — результаты неточных измерений $x(\tau_i)$ и $\dot{x}(\tau_i)$:

$$\big|\psi_{1i}^h - \dot{x}(\tau_i)\big|_{V^*} \le h, \qquad \big|\psi_i^h - x(\tau_i)\big|_{V^*} \le h, \quad \tau_i = \tau_{h,i},$$

$$\Psi_0^h = \{\psi_{10}^h, \psi_0^h\}, \quad \psi_{10}^h = \xi_{10}^h, \quad \psi_0^h = \xi_0^h.$$

Пусть решение уравнения (1.1) изменяется под воздействием некоторого закона обратной связи $\mathcal{V}(t, \Psi^h, \Xi^h) \in P$. Решение уравнения (1.1), таким образом, удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\ddot{y}^h(t) - \Delta y^h(t) + m y^h(t) + \gamma \dot{y}^h(t) = g\big(y^h(t)\big) + f(t) + \big(B\mathcal{V}(\tau_i, \Xi_i^h, \Psi_i^h)\big)(t) \tag{1.9}$$

$$\text{в } V^* \text{ п. в. на } t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \ge 0,$$

с начальными условиями

$$y^h(0) = y_0, \quad \dot{y}^h(0) = y_{10}.$$

Введем критерий отклонения $y^h(\cdot)$ от $x(\cdot)$ на каком-либо ограниченном отрезке времени $[0,\vartheta]$:

$$\omega_1\big(y^h(\cdot),x(\cdot)\mid\vartheta\big)=\max_{t\in[0,\vartheta]}\Big\{\big|\dot y^h\big(t;y_{10},y_0,u^h(\cdot)\big)-\dot x\big(t;\xi^h_{10},\xi^h_0,u_*(\cdot)\big)\big|_H+ \\ \big|y^h\big(t;y_{10},y_0,u^h(\cdot)\big)-x\big(t;\xi^h_{10},\xi^h_0,u_*(\cdot)\big)\big|_V\Big\}.$$

Допустимой обратной связью (для уравнения (1.1)) назовем всякую функцию

$$\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot):\,T\times V^*\times V^*\times V^*\times V^*\mapsto P.$$

Для любой допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ и любых допустимых измерений $x(\cdot)$ точности h — $\Psi^h(\cdot)$, а также допустимых измерений $y^h(\cdot)$ точности h — $\Xi^h(\cdot)$ определенное на $[0,+\infty)$ решение $y^h(\cdot)$ задачи Коши (1.9) назовем *траекторией уравнения* (1.1), соответствующей допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ и допустимым измерениям $\Xi^h(\cdot)$ и $\Psi^h(\cdot)$.

Управляемым процессом, соответствующим допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$, допустимому управлению $u_*(\cdot)$ и измерительной точности h ($h>0$), назовем всякую пятерку

$$\big(y^h(\cdot),\Xi^h(\cdot),x(\cdot),\Psi^h(\cdot),u^h(\cdot)\big),$$

где

$y^h(\cdot)=y^h\big(\cdot;y_{10},y_0,u^h(\cdot)\big)$ — решение (1.1) (точнее, решение (1.9)),

$\Xi^h(\cdot)$ — допустимое измерение $y^h(\cdot)$ точности h,

$x(\cdot)=x\big(\cdot;\xi^h_{10},\xi^h_0,u_*(\cdot)\big)$ — решение уравнения (1.3),

$\Psi^h(\cdot)$ — допустимое измерение $x(\cdot)$ точности h,

управление $u^h(\cdot):[0,+\infty)\mapsto P$ формируется по правилу

$$u^h(t)=\mathcal{V}\big(\tau_i,\Xi^h_i,\Psi^h_i\big) \tag{1.10}$$

$$\text{при}\quad t\in\delta_i=\delta_{h,i}=[\tau_i,\tau_{i+1}),\quad \tau_i=\tau_{h,i},\quad i\ge 0.$$

Функцию $u^h(\cdot)$ назовем *реализацией* допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$, соответствующей допустимым измерениям точности h.

Семейство допустимых обратных связей $\big(\mathcal{V}_h(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\big)_{h>0}$ назовем *отслеживающим*, если найдется функция $\gamma_1(\cdot):(0,+\infty)\mapsto[0,+\infty)$ такая, что $\gamma_1(h)\to 0$ при $h\to 0$ и для всякого допустимого эталонного управления $u_*(\cdot)$, всякого $h\in(0,1)$, всякой реализации $u^h(\cdot)$ допустимой обратной связи $\mathcal{V}_h(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$, всякой траектории уравнения (1.9) $y^h(\cdot)=y^h(\cdot;y_{10},y_0,u^h(\cdot))$, соответствующей функции $u^h(\cdot)$ вида (1.10) и всяких допустимых измерениях $\Xi^h(\cdot)$ и $\Psi^h(\cdot)$ точности $h\in(0,1)$, выполняется неравенство

$$\sup_{\vartheta\ge 0}\omega_1\big(y^h(\cdot),x(\cdot)\mid\vartheta\big)\le\gamma_1(h), \tag{1.11}$$

т. е. неравенство (1.11) выполняется для управляемого процесса $\big(y^h(\cdot),\Xi^h(\cdot),x(\cdot),\Psi^h(\cdot),u^h(\cdot)\big)$. Функцию $\gamma_1(\cdot)$ назовем *оценкой точности* семейства $\big(\mathcal{V}_h(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\big)_{h>0}$.

Обсуждаемая в настоящей работе задача состоит в построении отслеживающего семейства допустимых обратных связей $\mathcal{V}_h$.

2. Алгоритм решения

В дальнейшем нам понадобится следующее условие.

Условие 5. Семейство разбиений Δ_h таково, что выполнено неравенство

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \delta_i^2(h) \leq \varphi_2(h), \quad \varphi_2(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Замечание 1. Условия 4 и 5 выполняются, например, если

$$\delta_i(h) = \nu_i^h = \frac{dh}{(i+1)^\mu} \leq 1, \quad \mu \in (0.5; 1], \;\; i = 0, 1, \ldots, \;\; d = \text{const} > 0.$$

При этом

$$\varphi_1(h) = \varphi_2(h) = 2h^2 d^2 \sum_{i=1}^{\infty} i^{-2\mu}.$$

Введем семейство функционалов, зависящих от параметра $\varepsilon > 0$,

$$E_\varepsilon(x, y) = E_1(x, y) + \varepsilon(x, y), \quad x, y \in V.$$

Символ $(\cdot, \cdot)$ здесь и в дальнейшем означает как скалярное произведение в пространстве H (см. последнее слагаемое в предыдущей формуле), так и зависимость функций (функционалов) от двух аргументов, а именно, аргументов, стоящих в этих скобках. Так в предыдущей формуле функционалы E_ε и E_1 зависят от аргументов x и y. При этом

$$E_1(x, y) = 0.5 \left\{ |x|_V^2 + m|x|_H^2 + |y|_H^2 \right\}.$$

Заметим, что если $m > -\lambda$, то пространство $X = V \times H$ может быть наделено скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_1$ следующего вида:

$$\big(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}\big)_1 = \int_\Omega \big\{ \nabla x_1(\eta) \nabla x_2(\eta) + m x_1(\eta) x_2(\eta) + y_1(\eta) y_2(\eta) \big\}\, d\eta. \tag{2.1}$$

Это скалярное произведение порождает норму, эквивалентную норме пространства $V \times H$ (см. [3, с. 29]),

$$|x, y|_X^2 = 2E_1(x, y).$$

Здесь символ $|\cdot|_X$ означает норму в пространстве X, порожденную скалярным произведением (2.1). Воспользовавшись леммой 8.4.1 [3, с. 138] и предложением 6.1.1 [3, с. 78], аналогично предложению 8.4.2 [3, с. 138] (см. также предложение 6.2.3 [3, с. 83]) устанавливаем

$$\frac{dE_1\big(x(t) - y^h(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)\big)}{dt} = -\,\gamma \left|\dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)\right|_H^2 + \big(B\big(u_*(t) - u^h(t)\big), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)\big) +$$
$$\big(g\big(x(t)\big) - g\big(y^h(t)\big), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)\big). \tag{2.2}$$

Кроме того, почти всюду имеет место равенство

$$\frac{d\big(x(t)-y^h(t),\dot{x}(t)-\dot{y}^h(t)\big)}{dt} = \big|\dot{x}(t)-\dot{y}^h(t)\big|_H^2 - \big|x(t)-y^h(t)\big|_V^2 - m\big|x(t)-y^h(t)\big|_H^2 - \gamma\big(x(t)-y^h(t),\dot{x}(t)-\dot{y}^h(t)\big)+\big(g\big(x(t)\big)-g\big(y^h(t)\big),x(t)-y^h(t)\big)+ \big(B\big(u_*(t)-u^h(t)\big),x(t)-y^h(t)\big). \tag{2.3}$$

В таком случае из (2.2), (2.3) следует почти всюду на T справедливость равенства

$$\frac{dE_\varepsilon\big(x(t)-y^h(t),\dot{x}(t)-\dot{y}^h(t)\big)}{dt} = L_\varepsilon\big(x(t),y^h(t)\big) + \big(\varepsilon\big(x(t)-y^h(t)\big)+\dot{x}(t)-\dot{y}^h(t),B\big(u_*(t)-u^h(t)\big)\big), \tag{2.4}$$

где

$$L_\varepsilon\big(x(t),y^h(t)\big) = (-\gamma+\varepsilon)\big|\dot{x}(t)-\dot{y}^h(t)\big|_H^2 + \big(g\big(x(t)\big)-g\big(y^h(t)\big),\dot{x}(t)-\dot{y}^h(t)+\varepsilon\big(x(t)-y^h(t)\big)\big) - \varepsilon\,\big|x(t)-y^h(t)\big|_V^2 - \varepsilon m\,\big|x(t)-y^h(t)\big|_H^2 - \varepsilon\gamma\big(x(t)-y^h(t),\dot{x}(t)-\dot{y}^h(t)\big).$$

Пусть символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает двойственность между пространствами V и V^*.

Опишем алгоритм решения задачи. До начала его работы фиксируем величину $h\in(0,1)$, а также разбиение $\Delta_h=\{\tau_{h,i}\}_{i=0}^\infty$ (1.6). Работу алгоритма разобьем на однотипные шаги. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i=[\tau_i,\tau_{i+1})$, $\tau_i=\tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. В момент τ_i вычисляется элемент

$$\mathcal{V}_h\big(\tau_i,\Psi_i^h,\Xi_i^h\big) = \arg\min\big\{2\big(B^*\big[\xi_{1i}^h-\psi_{1i}^h+\varepsilon\big(\xi_i^h-\psi_i^h\big)\big],v\big)_U : v\in P\big\}, \tag{2.5}$$

где $\Xi_i^h=\big\{\xi_{1i}^h,\xi_i^h\big\}$, $\Psi_i^h=\big\{\psi_{1i}^h,\psi_i^h\big\}$. После этого на вход уравнения (1.1) при всех $t\in\delta_i$ подается управление $u=u^h(t)$ вида (1.10), (2.5). Под действием этого управления вместо состояния $\big\{y^h(\tau_i),\dot{y}^h(\tau_i)\big\}$ реализуется состояние $\big\{y^h(\tau_{i+1}),\dot{y}^h(\tau_{i+1})\big\}$. При этом в результате воздействия на уравнение (1.3) некоторого неизвестного эталонного управления $u_*(t)$, $t\in\delta_i$, вместо состояния $\big\{x(\tau_i),\dot{x}(\tau_i)\big\}$ реализуется состояние $\big\{x(\tau_{i+1}),\dot{x}(\tau_{i+1})\big\}$. На следующем, $(i+1)$-м шаге, аналогичные действия повторяются.

Условие 6. Найдутся числа $\varepsilon>0$ и $c\in(0,\varepsilon)$ такие, что

$$L_\varepsilon\big(x(t),y^h(t)\big) \le -cE_\varepsilon\big(x(t)-y^h(t),\dot{x}(t)-\dot{y}^h(t)\big) \text{ при п. в. } t\in T.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1, 2, 6, $\varepsilon<\min\big\{1,m+c_0^{-1}\big\}$ *и* $\big(y^h(\cdot),\Xi^h(\cdot),x(\cdot),\Psi^h(\cdot),u^h(\cdot)\big)$, $h\in(0,1)$, *— управляемый процесс, соответствующий допустимой обратной связи* $\mathcal{V}_h(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ *вида* (2.5), *допустимому управлению* $u_*(\cdot)$ *и измерительной точности* h. *Пусть также выполнены условия* 3 (*в первом случае*) *и* 4, 5 (*во втором*). *Тогда при всех* $h\in(0,1)$ *и всех* $t\in T$ *справедливо неравенство*

$$\big|y^h(t)-x(t)\big|_V^2 + \big|\dot{y}^h(t)-\dot{x}(t)\big|_H^2 \le \nu(t,h), \quad t\in T, \tag{2.6}$$

где $d_0=1+c_0+0.5\,mc_0^2$ *и*

$$\nu(t,h) = 2\max\big\{1,(m-\varepsilon)^{-1}\big\}\left[d_0h^2e^{-ct}+\frac{b_1}{c}\big(h+\delta(h)\big)\right]$$

в первом случае, а

$$\nu(t,h) = 2\max\bigl\{1, (m-\varepsilon)^{-1}\bigr\}\Bigl[d_0 h^2 e^{-ct} + b_2\bigl(\varphi_1(h) + \varphi_2(h)\bigr)\Bigr]$$

во втором.

Здесь b_1, b_2 — некоторые постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде.

Доказательство. Сначала рассмотрим первый случай. Учитывая (1.1) и (1.3), заключаем, что для разности

$$z(\cdot) = y^h(\cdot) - x(\cdot)$$

справедливо соотношение

$$\ddot z(t) - \Delta z(t) + mz(t) + \gamma \dot z(t) = g\bigl(y^h(t)\bigr) - g\bigl(x(t)\bigr) + B\bigl(u^h(t) - u_*(t)\bigr) \tag{2.7}$$

$$\text{в } V^* \text{ при п. в. } t \in T,$$

где

$$\dot z(0) = x_{10} - \xi^h_{10}, \quad z(0) = x_0 - \xi^h_0.$$

В силу условий 1 и 2 (см. теорему 8.4.5 [3, с. 139]) можно указать число $d_1 \in (0,+\infty)$ такое, что равномерно по всем $h \in (0,1)$, $u_*(\cdot) \in P(\cdot)$ и $u^h(\cdot) \in P(\cdot)$

$$\sup_{t\in T}\bigl|\dot x(t), x(t)\bigr|_{H\times V} \le d_1, \qquad \sup_{t\in T}\bigl|\dot y^h(t), y^h(t)\bigr|_{H\times V} \le d_1. \tag{2.8}$$

Возьмем произвольный элемент $v \in V$. Тогда из (2.7), учитывая (1.7) и (1.8), получим

$$\bigl|\langle \dot z(t+\Delta t) - \dot z(t), v\rangle\bigr| \le \int\limits_t^{t+\Delta t}\Bigl\{|z(\tau)|_V + c_0\Bigl(m|z(\tau)|_H + \gamma|\dot z(\tau)|_H + L|z(\tau)|_H + d_2\Bigr)|v|_V\Bigr\}\,d\tau.$$

Отсюда в силу (2.8) устанавливаем оценки

$$\bigl|\dot z(t+\Delta t) - \dot z(t)\bigr|_{V^*} \le d_3\Delta t, \qquad \bigl|z(t+\Delta t) - z(t)\bigr|_H \le d_4 \Delta t, \tag{2.9}$$

справедливые для любых t, $t+\Delta t \in T$, $\Delta t > 0$. Рассмотрим изменение величины

$$\varepsilon_h(t) = E_\varepsilon\bigl(x(t) - y^h(t), \dot x(t) - \dot y^h(t)\bigr) \tag{2.10}$$

на промежутке T. После дифференцирования $\varepsilon_h(t)$ будем иметь в силу (2.4) и условия 6 при п. в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$,

$$\dot\varepsilon_h(t) \le \bigl(\dot z(t) + \varepsilon z(t), B\bigl(u^h(t) - u_*(t)\bigr)\bigr) - c\varepsilon_h(t). \tag{2.11}$$

Далее в силу (2.11) верна оценка

$$\begin{aligned}\dot\varepsilon_h(t) \le -c\varepsilon_h(t) + \bigl(\dot z(t) - \dot z(\tau_i) + \varepsilon\bigl(z(t) - z(\tau_i)\bigr), B\bigl(u^h(t) - u_*(t)\bigr)\bigr) + \chi_i^t\bigl(u^h, u_*\bigr) + \mu_i^t\bigl(u^h, u_*\bigr) +{}\\ \bigl\langle \psi^h_{1i} - \dot x(\tau_i), B\bigl(u^h(t) - u_*(t)\bigr)\bigr\rangle + \bigl\langle \dot y^h(\tau_i) - \xi^h_{1i}, B\bigl(u^h(t) - u_*(t)\bigr)\bigr\rangle +{}\\ \varepsilon\bigl(\psi^h_i - x(\tau_i), B\bigl(u^h(t) - u_*(t)\bigr)\bigr) + \varepsilon\bigl(y^h(\tau_i) - \xi^h_i, B\bigl(u^h(t) - u_*(t)\bigr)\bigr) \text{ при п. в. } t \in \delta_i,\end{aligned} \tag{2.12}$$

где

$$\begin{aligned}\chi_i^t\bigl(u^h, u_*\bigr) &= \bigl(u^h(t), B^*\bigl(\xi^h_{1i} - \psi^h_{1i}\bigr)\bigr)_U - \bigl(u_*(t), B^*\bigl(\xi^h_{1i} - \psi^h_{1i}\bigr)\bigr)_U,\\ \mu_i^t\bigl(u^h, u_*\bigr) &= \varepsilon\bigl(u^h(t), B^*\bigl(\xi^h_i - \psi^h_i\bigr)\bigr)_U - \varepsilon\bigl(u_*(t), B^*\bigl(\xi^h_i - \psi^h_i\bigr)\bigr)_U.\end{aligned}$$

Из (1.10), (2.5) вытекает неравенство

$$\chi_i^t\big(u^h, u_*\big) + \mu_i^t\big(u^h, u_*\big) \le 0.$$

В таком случае из (2.12) получаем при п. в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\begin{aligned}\dot\varepsilon_h(t) \le -c\varepsilon_h(t) + \big(\dot z(t) - \dot z(\tau_i), B\big(u^h(t) - u_*(t)\big)\big) + \\ \big\langle \psi_{1i}^h - \dot x(\tau_i), B\big(u^h(t) - u_*(t)\big)\big\rangle + \big\langle \dot y^h(\tau_i) - \xi_{1i}^h, B\big(u^h(t) - u_*(t)\big)\big\rangle + \\ \varepsilon\big(\psi_i^h - x(\tau_i), B\big(u^h(t) - u_*(t)\big)\big) + \varepsilon\big(y^h(\tau_i) - \xi_i^h, B\big(u^h(t) - u_*(t)\big)\big) + \\ \varepsilon\big(z(t) - z(\tau_i), B\big(u^h(t) - u_*(t)\big)\big).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Заметим, что B — линейный непрерывный оператор, действующий из U в V. Учитывая непрерывность вложения пространства V в пространство H, а также (1.5), (2.9), заключаем, что при п. в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ справедливы оценки

$$\big(\dot z(t) - \dot z(\tau_i), B\big(u^h(t) - u_*(t)\big)\big) \le d_5\delta(h), \qquad \big(z(t) - z(\tau_i), B\big(u^h(t) - u_*(t)\big)\big) \le d_6\delta(h). \tag{2.14}$$

Кроме того, в силу (1.5) получаем при п. в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\big\langle \psi_{1i}^h - \dot x(\tau_i), B\big(u^h(t) - u_*(t)\big)\big\rangle \le d_7 h,$$
$$\big\langle \dot y^h(\tau_i) - \xi_{1i}^h, B\big(u^h(t) - u_*(t)\big)\big\rangle \le d_7 h,$$
$$\varepsilon\big(\psi_i^h - x(\tau_i), B\big(u^h(t) - u_*(t)\big)\big) \le d_8 h,$$
$$\varepsilon\big(y^h(\tau_i) - \xi_i^h, B\big(u^h(t) - u_*(t)\big)\big) \le d_8 h.$$

Воспользовавшись (2.13), (2.14), а также последними неравенствами, выводим справедливое при п. в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ соотношение

$$\dot\varepsilon_h(t) \le b_1\big(h + \delta(h)\big) - c\varepsilon_h(t). \tag{2.15}$$

Заметим, что в силу (1.4), (1.7), а также включения $\varepsilon \in (0, 1)$, справедливо неравенство

$$\varepsilon_h(0) \le 0.5\big\{h^2 + mc_0h^2 + h^2\big\} + \varepsilon c_0 h^2 \le \big(1 + c_0 + 0.5\, c_0^2 m\big)h^2. \tag{2.16}$$

Из (2.15) следует равенство

$$\dot\varepsilon_h(t) = -c\varepsilon_h(t) + b_1\big(h + \delta(h)\big) + \psi_0(t),$$

где $\psi_0(t) \le 0$, $t \in T$. Значит,

$$\varepsilon_h(t) \le \varepsilon_h(0)e^{-ct} + b_1 \int\limits_0^t e^{-c(t-\tau)}\big(h + \delta(h)\big)\, d\tau.$$

Далее имеем

$$\int\limits_0^t e^{-c(t-\tau)}\, d\tau \le \frac{1}{c}.$$

Из последних двух неравенств, учитывая (2.16), получаем при $t \in T$

$$\varepsilon_h(t) \le d_0 h^2 e^{-ct} + \frac{b_1}{c}\big(h + \delta(h)\big). \tag{2.17}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned}\varepsilon_h(t) &\geq 0.5\bigl\{|z(t)|_V^2 + m|z(t)|_H^2 + |\dot z(t)|_H^2\bigr\} - 0.5\,\varepsilon\bigl\{|z(t)|_H^2 + |\dot z(t)|_H^2\bigr\}\\ &\geq 0.5\bigl\{c_0^{-1}|z(t)|_H^2 + (m-\varepsilon)|z(t)|_H^2 + (1-\varepsilon)|\dot z(t)|_H^2\bigr\} \geq 0.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Из (2.17), (2.18) следует (2.6).

Обратимся ко второму случаю. Очевидно, что и в этом случае верны соотношения (2.7)–(2.13). Далее имеем цепочку неравенств (при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$)

$$\begin{aligned}&\bigl(z(t) - z(\tau_i), B\bigl(u^h(t) - u_*(t)\bigr)\bigr) \leq d_9\delta_i(h),\\ &\bigl(\dot z(t) - \dot z(\tau_i), B\bigl(u^h(t) - u_*(t)\bigr)\bigr) \leq d_9\delta_i(h),\\ &\bigl\langle\psi_{1i}^h - \dot x(\tau_i), B\bigl(u^h(t) - u_*(t)\bigr)\bigr\rangle \leq d_9\nu_i^h,\\ &\bigl\langle\dot y^h(\tau_i) - \xi_{1i}^h, B\bigl(u^h(t) - u_*(t)\bigr)\bigr\rangle \leq d_9\nu_i^h,\\ &\varepsilon\bigl(\psi_i^h - x(\tau_i), B\bigl(u^h(t) - u_*(t)\bigr)\bigr) \leq d_9\nu_i^h,\\ &\varepsilon\bigl(y^h(\tau_i) - \xi_i^h, B\bigl(u^h(t) - u_*(t)\bigr)\bigr) \leq d_9\nu_i^h.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Воспользовавшись (2.13), (2.19), выводим

$$\dot\varepsilon_h(t) \leq -c\varepsilon_h(t) + b_2\bigl(\nu_i^h + \delta_i(h)\bigr) \quad \text{при п. в. } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

т. е. при п. в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ справедливо равенство

$$\dot\varepsilon_h(t) = -c\varepsilon_h(t) + b_2(\nu_i^h + \delta_i(h)) + \psi_1(t),$$

где $\psi_1(t) \leq 0$, $t \in T$. В таком случае при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\varepsilon_h(t) \leq \varepsilon_h(0)e^{-ct} + b_2\sum_{j=0}^{i-1}\bigl(\nu_j^h + \delta_j(h)\bigr)\delta_j(h) + b_2(t-\tau_i)\delta_i(h)\bigl(\nu_i^h + \delta_i(h)\bigr). \tag{2.20}$$

Из (2.20) в силу условий 4 и 5 вытекает неравенство

$$\varepsilon_h(t) \leq d_0h^2e^{-ct} + b_2\bigl(\varphi_1(h) + \varphi_3(h)\bigr). \tag{2.21}$$

В свою очередь, из (2.21), учитывая (2.18), получаем (2.6). □

Из теоремы 1 вытекает основной результат данной статьи.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда семейство допустимых обратных связей вида* (2.5) *является отслеживающим. Оценка точности этого семейства* $\gamma_1(h) = \nu(0, h)$.

Приведем одно достаточное условие выполнения условия 6.

Теорема 3. *Пусть* $2L < m$ *и выполнены условия* 1, 2. *Тогда выполнено условие* 6.

Доказательство. В силу липшицевости функции g справедливо неравенство

$$\begin{aligned}&\big(g\big(x(t)\big) - g\big(y^h(t)\big), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t) + \varepsilon\big(x(t) - y^h(t)\big)\big)\\ &\qquad \le L\big|x(t) - y^h(t)\big|_H \left\{\big|\dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)\big|_H + \varepsilon\big|x(t) - y^h(t)\big|_H\right\}\\ &\qquad \le \left(L\varepsilon + \frac{L^2}{2\gamma_1}\right)\big|x(t) - y^h(t)\big|_H^2 + \frac{\gamma_1}{2}\big|\dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)\big|_H^2,\end{aligned}$$

каково бы ни было $\gamma_1 > 0$. Кроме того, при $c_* \in (0, \gamma)$ также верно неравенство

$$\begin{aligned}-\varepsilon\gamma\big(x(t) - y(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)\big) \le -\varepsilon c_*\big(x(t) - y^h(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)\big) +\\ \frac{\varepsilon^2(\gamma - c)^2}{2\gamma_1}\big|x(t) - y^h(t)\big|_H^2 + \frac{\gamma_1}{2}\big|\dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)\big|_H^2.\end{aligned}$$

Выберем $\gamma_1 = \gamma$, $\varepsilon \in (0, \gamma)$ и $c_* \in (0, \varepsilon)$ таким образом, чтобы почти всюду на T выполнялись соотношения

$$\left(-\gamma + \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\gamma_1}{2} + \varepsilon\right)\big|\dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)\big|_H^2 \le -c_*\big|\dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)\big|_H^2, \tag{2.22}$$

$$-\varepsilon\big|x(t) - y^h(t)\big|_V^2 \le -c_*\big|x(t) - y^h(t)\big|_V^2, \tag{2.23}$$

$$\left(L\varepsilon + \frac{L^2}{2\gamma_1} - \varepsilon m + \frac{\varepsilon^2(\gamma - c_*)^2}{2\gamma_1}\right)\big|x(t) - y^h(t)\big|_H^2 \le -mc_*\big|x(t) - y^h(t)\big|_H^2. \tag{2.24}$$

Тогда неравенства (2.22) и (2.23) будут выполняться. Положим $c_* = q\varepsilon$, где $q \in (0, 1)$ таково, что $q\varepsilon \in (0, \gamma)$ и $m(1 - q) - L \ge L$. Неравенство (2.24) будет справедливо, если

$$\frac{L^2 + \varepsilon^2\gamma^2}{2\gamma} \le [m(1 - q) - L]\,\varepsilon.$$

Найдем корни квадратного уравнения

$$\gamma^2\varepsilon^2 - 2\gamma[m(1 - q) - L]\,\varepsilon + L^2 = 0.$$

Получим

$$\varepsilon_{1q} = \frac{2\gamma[m(1 - q) - L] - D^{1/2}}{2\gamma^2}, \qquad \varepsilon_{2q} = \frac{2\gamma[m(1 - q) - L] + D^{1/2}}{2\gamma^2},$$

где $D = 4\gamma^2[m(1-q)-L]^2 - 4\gamma^2L^2 \ge 0$ в силу неравенства $m(1-q)-L \ge L$. В таком случае (2.24) имеет место при $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$. Значит, если $\gamma = \gamma_1$, $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$, $c_* = q\varepsilon$, $q \in (0, 1)$,

$$q\varepsilon \in (0, \gamma), \qquad m(1 - q) \ge 2L, \tag{2.25}$$

то выполняются неравенства (2.22)–(2.24), а следовательно, и неравенство

$$L_\varepsilon\big(x(t), y^h(t)\big) \le -2c_*E_\varepsilon\big(x(t) - y^h(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)\big).$$

Заметим, что выполнение соотношений (2.25) всегда можно обеспечить, взяв q достаточно малым. Осталось положить $c = 2c_*$. □

Замечание 2. Из доказательства теоремы 3 видно, если число $q \in (0,1)$ таково, что

$$q(m-L) \in (0,\gamma^2), \quad m(1-q) \geq 2L,$$

то справедливо неравенство из условия 6 (при $\varepsilon = [m(1-q)-L]\,\gamma^{-1}$, $c = 2q\varepsilon$).

Литература

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — Перевод: Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-Theoretical Control Problems. — New-York–Berlin: Springer-Verlag, 1988.
2. **Красовский Н.Н., Котельникова А.Н.** Об одной задаче об устойчивом отслеживании движения // Тр. Института математики и механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 1. — С. 142–157. — Перевод: Krasovskii N.N., Kotel'nikova A.N. One problem on stable tracking of motion // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. — 2006. — Vol. 253, iss. SUPPL. 1. — P. S151–S167.
3. **Cazenave T., Haraux A.** An Introduction to Semilinear Evolution Equations. — Oxford: Clarendon Press, 1998.
4. **Осипов Ю.С.** К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами // Докл. АН СССР. — 1975. — Т. 223, № 6. — С. 1314–1317. — Перевод: Osipov Yu.S. On the theory of differential games in systems with distributed parameters // Soviet Math. Dokl. — 1975. — Vol. 16, № 4. — P. 1093–1097.
5. **Осипов Ю.С.** Избранные труды. — М.: Изд-во МГУ, 2009. — Перевод: Osipov Yu.S. Selected Works. — M.: Moscow State University, 2009.
6. **Максимов В.И.** О реконструкции управлений в экспоненциально устойчивых линейных системах, подверженных малым возмущениям // Прикладная математика и механика. — 2007. — Т. 71, № 6. — С. 945–955. — Перевод: Maksimov V.I. Reconstruction of controls in exponentially stable linear systems subjected to small perturbations // J. of Applied Mathematics and Mechanics. — 2007. — Vol. 71, № 6. — P. 851–861.
7. **Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I.** Resource-saving infinite-horizon tracing under uncertain input // Applied Mathematics and Computation. — 2010. — Vol. 217, № 3. — P. 1135–1140.
8. **Максимов В.И., Осипов Ю.С.** О граничном управлении распределенной системой на бесконечном промежутке времени // Журн. выч. матем. и мат. физики. — 2016. — Т. 56, № 1. — С. 14–26. — Перевод: Maksimov V.I., Osipov Yu.S. Infinite-horizon boundary control of distributed systems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 56, iss. 1. — P. 14–25.

Поступила в редакцию 31 октября 2017 г.,
в окончательном варианте 1 декабря 2017 г.

Литература в транслитерации

1. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Pozicionnye differencial'nye igry. — M.: Nauka, 1974. — Perevod: Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-Theoretical Control Problems. — New-York–Berlin: Springer-Verlag, 1988.
2. **Krasovskii N.N., Kotel'nikova A.N.** Ob odnoj zadache ob ustojchivom otslezhivanii dvizheniya // Tr. Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN. — 2006. — T. 12, № 1. — S. 142–157. — Perevod: Krasovskii N.N., Kotel'nikova A.N. One problem on stable tracking of motion // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. — 2006. — Vol. 253, iss. SUPPL. 1. — P. S151–S167.

3. **Cazenave T., Haraux A.** An Introduction to Semilinear Evolution Equations. — Oxford: Clarendon Press, 1998.

4. **Osipov Yu.S.** K teorii differencial'nyh igr v sistemah s raspredelennymi parametrami // Dokl. AN SSSR. — 1975. — T. 223, № 6. — S. 1314–1317. — Perevod: Osipov Yu.S. On the theory of differential games in systems with distributed parameters // Soviet Math. Dokl. — 1975. — Vol. 16, № 4. — P. 1093–1097.

5. **Osipov Yu.S.** Izbrannye trudy. — M.: Izd-vo MGU, 2009. — Perevod: Osipov Yu.S. Selected Works. — M.: Moscow State University, 2009.

6. **Maksimov V.I.** O rekonstrukcii upravlenij v eksponencial'no ustojchivyh linejnyh sistemah, podverzhennyh malym vozmushcheniyam // Prikladnaya matematika i mekhanika. — 2007. — T. 71, № 6. — S. 945–955. — Perevod: Maksimov V.I. Reconstruction of controls in exponentially stable linear systems subjected to small perturbations // J. of Applied Mathematics and Mechanics. — 2007. — Vol. 71, № 6. — P. 851–861.

7. **Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I.** Resource-saving infinite-horizon tracing under uncertain input // Applied Mathematics and Computation. — 2010. — Vol. 217, № 3. — P. 1135–1140.

8. **Maksimov V.I., Osipov Yu.S.** O granichnom upravlenii raspredelennoj sistemoj na beskonechnom promezhutke vremeni // ZHurn. vych. matem. i mat. fiziki. — 2016. — T. 56, № 1. — S. 14–26. — Perevod: Maksimov V.I., Osipov Yu.S. Infinite-horizon boundary control of distributed systems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 56, iss. 1. — P. 14–25.