УДК 525.61+532.5

СОЛНЕЧНЫЕ И ЛУННЫЕ ПРИЛИВЫ В МАГМЕ

Б. В. Войцеховский, Р. М. Гарипов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Планета рассматривается как состоящая из идеальной и несжимаемой жидкости, находящейся под действием собственной гравитации и притяжения небесных тел. Неоднородность, а также наличие твердого ядра моделируются точечной массой, сосредоточенной в центре однородной планеты. Получена формула, выражающая массу ядра через коэффициент сплющивания планеты и угловую скорость ее вращения вокруг своей оси. Определяется высота приливов под действием Солнца и спутников. Применительно к Земле численные значения имеют тот же порядок, что и высота приливных волн в океане. Принятое исходное предположение справедливо, если энергия упругой деформации под действием приливных сил намного меньше кинетической энергии приливного относительного движения масс планеты. Показано, что это характерно для планет-гигантов и в меньшей степени для Земли. Применяются точные решения Дирихле, Римана и Овсянникова, используется матричное исчисление.

В работе используются следующие масштабы: за единицу длины, плотности и ускорения приняты соответственно средний радиус r_0, средняя плотность ρ_0 и ускорение свободного падения на поверхности планеты $(4\pi/3)\gamma\rho_0 r_0$, где γ — гравитационная постоянная. Отсюда получаются единицы времени и скорости $T = \sqrt{3/(4\pi\gamma\rho_0)}$ и r_0/T (для Земли 805 с и 7,93 км/с). В этих единицах гравитационная постоянная равна $3/(4\pi)$, а масса планеты — $4\pi/3$. Поэтому единицей массы будет $r_0^3\rho_0$, единицей давления — $\rho_0 r_0^2 T^{-2}$. Далее употребляются безразмерные переменные, т. е. отношения размерных переменных к их единицам измерений. Для них сохраняются те же обозначения.

1. Собственная гравитация планеты. Предположим сначала, что планета однородная. Тогда ее плотность равна 1. Будем считать, что планета имеет форму эллипсоида с центром в начале системы координат:

$$f(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{x} \cdot A\,\boldsymbol{x} - 1 \leqslant 0,$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор точки пространства; A — симметричная положительно-определенная матрица. Пусть оси координат совпадают с осями эллипсоида. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} a_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & a_3^{-2} \end{pmatrix},$$

где a_1, a_2, a_3 — полуоси эллипсоида. Так как средний радиус эллипсоида $\sqrt[3]{a_1a_2a_3} = 1$, то и $\det A = 1$. В частности, когда эллипсоид является шаром, матрица A равна единичной матрице I.

Потенциал собственного гравитационного поля планеты обозначим через $h_0(\boldsymbol{x})$. В точке $\boldsymbol{x}$ на единицу массы действует сила гравитации $\nabla h_0(\boldsymbol{x})$ (∇ — градиент). Следует отметить, что внутри эллипсоида собственный гравитационный потенциал является полиномом от x_1, x_2 и x_3, который в данной специально ориентированной системе координат имеет вид

$$h_0(\boldsymbol{x}) = -(1/2)(d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2 - d_0) \quad \text{при} \quad f(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, \tag{1}$$

где

$$d_0 = \frac{3}{2}\int\limits_0^\infty \Delta\, ds; \quad \Delta = \Big(\prod_{i=1}^{3}(1 + sa_i^{-2})\Big)^{-1/2}; \quad d_i = \frac{3}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\Delta}{a_i^2 + s}\, ds \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

(см. [1, 2]). Вне эллипсоида потенциал $h_0(\boldsymbol{x})$ не выражается через элементарные функции.

Матрица

$$D_0 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

является функцией матрицы A. Легко найти след этой матрицы — сумму диагональных элементов $\mathrm{sp}\, D_0(A) = 3$ (берется интеграл от $-3d\Delta/ds$). Эту функцию вычислим приближенно в случае, когда эллипсоид близок к шару, т. е. $A \simeq I$:

$$D_0(A) = I + (3/5)(A - I) - (3/70)\,\mathrm{sp}\,(A - I)^2 I - (6/35)(A - I)^2 + O((A - I)^3).$$

Матричная функция $D_0(A)$ не зависит от выбора системы координат, а так как последняя формула инвариантна, она верна и для недиагональных матриц A и D_0, если $\det A = 1$. Здесь члены второго порядка малости вычислены для того, чтобы убедиться, что ими можно пренебречь. Для решения поставленной задачи достаточно линейного приближения

$$D_0(A) = (2/5)I + (3/5)A + O((A - I)^2). \tag{2}$$

В этом приближении $\det A \simeq 1 + \mathrm{sp}\,(A - I)$, откуда в силу условия $\det A = 1$ следует, что $\mathrm{sp}\, A \simeq 3$.

Пусть теперь планета имеет твердое ядро, в котором сосредоточена доля ее массы, равная α. Тогда гравитационный потенциал планеты равен сумме потенциалов ядра, которое приближенно можно считать точечной массой $(4\pi/3)\alpha$, расположенной в центре, и однородного жидкого эллипсоида плотности $1 - \alpha$:

$$h_0(\boldsymbol{x}) = \alpha|\boldsymbol{x}|^{-1} - (1/2)(1 - \alpha)(\boldsymbol{x} \cdot D_0\boldsymbol{x} - d_0),$$

где $|\boldsymbol{x}| = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})^{1/2}$ — длина вектора $\boldsymbol{x}$. При выводе последней формулы использована формула (1). Гравитационный потенциал точечного ядра уже не является полиномом от координат $\boldsymbol{x}$ внутри эллипсоида. Однако с принятой точностью его можно заменить полиномом в окрестности поверхности эллипсоида. Действительно, как следует из уравнения поверхности $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot (A - I)\boldsymbol{x} + |\boldsymbol{x}|^2 - 1 = 0$, на ней $|\boldsymbol{x}| = 1 + O(A - I)$. Поэтому с точностью до слагаемых второго порядка малости $|\boldsymbol{x}|^{-1} = (1 + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} - 1)^{-1/2} \simeq 3/2 - (1/2)\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$ при $f(\boldsymbol{x}) = 0$.

Итак, с точностью $O((A - I)^2)$, учитывая формулу (2), имеем

$$h_0(\boldsymbol{x}) \simeq -(1/2)\boldsymbol{x} \cdot D\,\boldsymbol{x} \qquad (|\boldsymbol{x}| \simeq 1), \tag{3}$$

где опущены не зависящие от $\boldsymbol{x}$ слагаемые, так как существен только градиент от h_0, а $D \simeq (1/5)(2 + 3\alpha)I + (3/5)(1 - \alpha)A$ ($\mathrm{sp}\, A \simeq 3$).

2. Внешняя гравитация. Начало системы координат $\boldsymbol{x} = 0$ поместим в центр планеты, так что Солнце и спутники планеты как бы вращаются вокруг нее по заданным траекториям в силу законов Кеплера. Это означает, что мы находимся в системе мира Птолемея с единственным отличием, что наша система координат не вращается, поэтому звезды будут казаться неподвижными. На планете действуют силы гравитации от небесных тел с потенциалом $h(\boldsymbol{x}, t)$, явно зависящим от времени t. Так как радиус планеты намного меньше расстояний до этих тел, то функцию $h(\boldsymbol{x}, t)$ аппроксимируем по формуле Тейлора:

$$h(\boldsymbol{x}, t) \simeq h(0, t) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial h(0, t)}{\partial x_i} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 h(0, t)}{\partial x_i \, \partial x_j} x_i x_j.$$

Законы динамики на планете наряду с силами гравитации содержат силы инерции, имеющие потенциал, линейно зависящий от $\boldsymbol{x}$ из-за поступательного характера движения нашей координатной системы. Этот потенциал сил инерции взаимно уничтожается со слагаемыми первой степени разложения Тейлора функции $h(\boldsymbol{x}, t)$, если учесть уравнение движения в мировом пространстве планеты как материальной точки. Нулевое слагаемое $h(0, t)$ несущественно. Таким образом, движение масс планеты происходит так же, как в инерциальной системе отсчета при наличии поля внешних сил с потенциалом

$$h_b(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 h(0, t)}{\partial x_i \, \partial x_j} x_i x_j. \tag{4}$$

Для решения нашей задачи принципиально важно, что этот потенциал является полиномом второй степени от $\boldsymbol{x}$.

Гравитационные поля от разных тел суммируются. Поэтому достаточно вычислить выражение (4) для одного небесного тела. Пусть небесное тело массой m движется по траектории $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{R}(t)$. Векторная функция времени $\boldsymbol{R}(t)$ однозначно определяется законами Кеплера. Согласно закону всемирного тяготения это тело создает гравитационное поле с потенциалом $h(\boldsymbol{x}, t) = \gamma m |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{R}(t)|^{-1}$. Найдем производные

$$\frac{\partial^2 h(0, t)}{\partial x_i \, \partial x_j} = c(t)(3e_i(t)e_j(t) - \delta_{ij}) \qquad (i, \, j = 1, \, 2, \, 3),$$

где $c(t) = \gamma m |\boldsymbol{R}(t)|^{-3}$; $\boldsymbol{e}(t) = (e_1(t), e_2(t), e_3(t)) = \boldsymbol{R}(t)/|\boldsymbol{R}(t)|$; $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ — символ Кронекера. Единичный вектор $\boldsymbol{e}(t)$ направлен на небесное тело. Это двухиндексное выражение будем рассматривать как элемент матрицы $E(t)$. Тогда потенциал внешней гравитации (4) запишется в виде

$$h_b(\boldsymbol{x}, t) = (1/2)\boldsymbol{x} \cdot E(t)\boldsymbol{x}. \tag{5}$$

Если имеется несколько небесных тел, то соответствующие им матрицы $E(t)$ надо сложить. Отметим, что $\operatorname{sp} E(t) = 0$.

В случае, когда небесное тело движется по круговой траектории $|\boldsymbol{R}(t)| = \text{const}$ с постоянной угловой скоростью χ, приравнивая силу взаимного гравитационного притяжения к центробежной силе (при этом расстояние надо отсчитывать от центра масс), получим $c(t) = (m/(m + m_0))\chi^2$, где m_0 — масса планеты.

В качестве примера рассмотрим планету Земля, на которую действуют гравитационные поля двух небесных тел (Солнца и Луны), вращающихся по почти круговым траекториям с угловыми скоростями $\chi_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ и $\chi_2 = 2{,}14 \cdot 10^{-3}$ соответственно. Угол между плоскостями их траекторий всего 5°, поэтому для упрощения формул будем считать, что эти небесные тела движутся в одной плоскости. Ось x_3 направим перпендикулярно данной плоскости в сторону северного полюса Земли. Тогда векторы, определяющие направления на небесные тела, и матрица внешней гравитации имеют вид

$$\begin{gathered} \boldsymbol{e}^k(t) = (\cos(\chi_k t + \lambda_k), \sin(\chi_k t + \lambda_k), 0) \qquad (k = 1, \, 2), \\ E(t) = \sum_{k=1}^{2} c_k (3e_i^k(t)e_j^k(t) - \delta_{ij}) \qquad (c_1 = \chi_1^2, \quad c_2 = \chi_2^2/82). \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $k = 1$ соответствует Солнцу, $k = 2$ — Луне. Константы λ_1 и λ_2 определяются выбором направления оси координат x_1 (на плоскости траекторий) и начала отсчета времени. Их можно обратить в нуль: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

3. Уравнения движения и законы сохранения. Вещество планеты будем считать идеальной и несжимаемой однородной жидкостью, движение которой описывается системой уравнений Эйлера

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \nabla(p - h) = 0,$$

где $\boldsymbol{u}$ — скорость жидкости; p — давление; $h = h_0 + h_b$ — потенциал сил тяготения (3) и (5). Если плотность жидкости не равна единице (при наличии ядра планеты), то под p подразумевается давление, деленное на плотность, которое также назовем давлением. При этом все приводимые ниже рассуждения остаются в силе. Как впервые заметил Дирихле, решение вида $\boldsymbol{u} = B(t)\boldsymbol{x}$ ($B(t)$ — искомая матричная функция времени t) удовлетворяет всем необходимым граничным условиям. Далее рассматривается только это решение. Из второго уравнения Эйлера следует, что разность $p-h$ является полиномом второй степени от координат вектора $\boldsymbol{x}$ внутри эллипсоида, хотя при наличии ядра планеты каждая из функций p и h полиномом не является.

На поверхности планеты давление равно атмосферному: $p = p_0$, которое можно считать всюду одинаковым, т. е. не зависящим от $\boldsymbol{x}$. Поэтому $p - h = p_0 + (1/2)\boldsymbol{x} \cdot C\boldsymbol{x}$ при $f \equiv \boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{x} - 1 = 0$, где $C = D(A) - E(t)$. Отсюда следует, что нули полинома f от $\boldsymbol{x}$ второй степени, не имеющего кратных корней, являются также нулями полинома $p - h - p_0 - (1/2)\boldsymbol{x} \cdot C\boldsymbol{x}$ той же степени. Следовательно, найдется скаляр λ, такой что $p - h - p_0 - (1/2)\boldsymbol{x} \cdot C\boldsymbol{x} = -(\lambda/2)f$ при $f \leqslant 0$. Отсюда находим $p - h$ внутри эллипсоида: $p-h = p_0+\lambda/2+(1/2)\boldsymbol{x}\cdot C\boldsymbol{x}-(\lambda/2)\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}$ при $f \leqslant 0$. Подставив $\boldsymbol{u} = B(t)\boldsymbol{x}$ и полученное выражение для $p-h$ во второе уравнение Эйлера, получим $\dot{B}\boldsymbol{x}+(B\boldsymbol{x}\cdot\nabla)B\boldsymbol{x}+C\boldsymbol{x}-\lambda A\boldsymbol{x} = 0$, где точка сверху обозначает производную по времени. Здесь второе слагаемое равно $B^2\boldsymbol{x}$, в чем нетрудно убедиться, вычислив его i-ю координату. Так как полученное равенство верно для всех радиус-векторов $\boldsymbol{x}$ точек эллипсоида, то оно равносильно матричному равенству

$$\dot{B} + B^2 + C - \lambda A = 0. \tag{7}$$

Далее, из первого уравнения Эйлера (означающего несжимаемость жидкости) следует, что $\operatorname{sp} B = 0$. Неизвестная величина λ находится из этого условия:

$$\lambda = \operatorname{sp}(B^2 + C)/\operatorname{sp} A = (\operatorname{sp} B^2 + 3)/\operatorname{sp} A. \tag{8}$$

Осталось удовлетворить кинематическому условию непротекания поверхности жидкости

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla f = 0 \qquad \text{при} \quad f = 0.$$

По той же причине, что и выше, полином в левой части этого равенства кратен f, т. е. найдется скаляр μ, такой что для всех $\boldsymbol{x}$ справедливо равенство $\boldsymbol{x}\cdot\dot{A}\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{x}\cdot 2A\boldsymbol{x} = \mu(\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}-1)$. Приравняв мономы нулевой степени, получим $\mu = 0$. Симметризуем матрицу второй квадратичной формы: $B\boldsymbol{x} \cdot 2A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot 2B^*A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot (B^*A + AB)\boldsymbol{x}$, где звездочка обозначает сопряженную матрицу. Напомним, что матрица A симметрична: $A^* = A$. Матрица полученной нулевой квадратичной формы должна равняться нулю:

$$\dot{A} + AB + B^*A = 0. \tag{9}$$

Получили замкнутую систему уравнений (7)–(9) на матрицы A и B, так как матрица C является заданной функцией A и t. Эта система уравнений рассматривается на многообразии $\det A = 1$, $\operatorname{sp} B = 0$, поэтому имеет порядок 13. При выводе этих уравнений предполагалось, что $A \simeq I$. Однако при отсутствии ядра планеты это априорное ограничение может быть опущено. Тогда нужно воспользоваться точным выражением (1) для функции $D(A) = D_0(A)$.

Запишем теперь в матричной форме законы сохранения для однородной планеты ($\alpha = 0$). Определим циркуляцию $\Gamma = \mathrm{sp}\,((B^* - B)A^{-1})^2$, момент импульса $L = BA^{-1} - A^{-1}B^*$, момент внешних сил $M = EA^{-1} - A^{-1}E$, энергию $H = (1/2)\,\mathrm{sp}\,(B^*BA^{-1} - EA^{-1}) - d_0$, где d_0 — функция полуосей эллипсоида из формулы (1). Эти величины совпадают с общепринятыми с точностью до числовых коэффициентов. Например, антисимметричная матрица L определяет вектор (L_{32}, L_{13}, L_{21}), который равен суммарному моменту импульса жидкости, деленному на $4\pi/3$. В силу уравнений (7)–(9) известные законы сохранения принимают вид

$$\Gamma = \mathrm{const}, \qquad \dot{L} = M, \qquad \dot{H} = (1/2)\,\mathrm{sp}\,(-\dot{E}A^{-1}). \tag{10}$$

4. Сплющивание планеты. Применим уравнения (7)–(9) для вычисления коэффициента сплющивания планеты из-за ее вращения вокруг своей оси. При этом можно пренебречь внешней гравитацией: $E = 0$. Найдем решение, описывающее твердое вращение осесимметричного эллипсоида с постоянной угловой скоростью ω вокруг его оси симметрии. Пусть осью симметрии будет ось координат x_3:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} \quad (A_1^2 A_3 = 1), \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как в этом случае матрица A перестановочна с B, то уравнение (9) удовлетворяется тождественно, а (7) принимает вид

$$B^2 + D(A) - \lambda A = 0 \tag{11}$$

(соотношение (8) является следствием этого уравнения).

Система трансцендентных уравнений (11) относительно величин A_1, λ ($A_3 = A_1^{-2}$) при заданной скорости вращения ω была решена Маклореном при отсутствии ядра планеты ($D(A) = D_0(A)$), но без предположения малости $A - I$. Тогда функция $D_0(A)$ задается формулой (1). Маклорен установил, что при $\omega < 0{,}58\ldots$ имеется два решения, одно из которых при $\omega \to 0$ переходит в шар, другое сплющивается в бесконечно тонкий диск. При $\omega > 0{,}58\ldots$ действительных решений не существует.

Найдем решение, близкое к шару, воспользовавшись приближенным выражением (3) для функции $D(A)$. Для Земли $\omega = 0{,}0588$, т. е. довольно мала. Поэтому ω^2 будем считать малым параметром. При $\omega^2 = 0$ система (11) имеет решение $A = I$, $\lambda = 1$. Вычитая из первого диагонального элемента матричного уравнения третий, получим $-\omega^2 + ((3/5)(1-\alpha) - \lambda)(A_1 - A_3) = 0$. Из этого уравнения следует, что $A_1 - A_3$ — величина первого порядка малости, таким образом, ее множитель достаточно вычислить с точностью до членов нулевого порядка, т. е. принять равным $(3/5)(1-\alpha) - 1$. Тогда $A_3 - A_1 = (5/(2+3\alpha))\omega^2 + O(\omega^4)$. По определению коэффициент сплющивания планеты равен $\delta = 1 - (A_1/A_3)^{1/2} = (A_3 - A_1)/(A_3 + \sqrt{A_1A_3})$. Здесь коэффициент при $A_3 - A_1$ можно вычислять с точностью до членов нулевого порядка. Окончательно получим

$$\delta = (5/(4+6\alpha))\omega^2. \tag{12}$$

По формуле (12) можно оценивать массы ядер планет. Например, для Земли, зная $\delta = 1/298$ и ω, находим $\alpha = 0{,}19$. Следовательно, в ядре сосредоточена приблизительно одна пятая часть массы Земли.

5. Высота прилива. Линеаризуя систему уравнений (7)–(9) в окрестности покоя $A = I$, $B = 0$, получим

$$\dot{B} - ((2 + 3\alpha)/5)A' = E(t), \qquad \dot{A}' + B + B^* = 0,$$

где $A' = A - I$; $\operatorname{sp} A' = 0$; $\operatorname{sp} B = 0$. Разложим матрицу B на сумму симметричной F и антисимметричной Ω частей: $B = F + \Omega$, $F = (1/2)(B + B^*)$, $\Omega = (1/2)(B - B^*)$. Матрица Ω задает поле скоростей жидкости, вращающейся как твердое тело, а F — поле скоростей деформации. Соответственно первое уравнение расщепим на два: антисимметричное и симметричное, получим

$$\dot{\Omega} = 0, \qquad \dot{F} - ((2 + 3\alpha)/5)A' = E(t), \qquad \dot{A}' + 2F = 0. \tag{13}$$

Отсюда следует, что скорость твердого вращения Ω постоянна и произвольна и не влияет на процессы деформации планеты, описываемые матрицами A' и F.

Рассмотрим последние два уравнения системы (13). Исключая F, получим $\ddot{A}' + ((4 + 6\alpha)/5)A' = -2E(t)$. Отсюда найдем частоту собственных колебаний планеты $\sigma = \sqrt{(4 + 6\alpha)/5}$. Это очень высокая частота. Для Земли $\sigma = 1{,}01$, а размерный период этих колебаний составляет 1,39 ч. Так как частоты функции $E(t)$ много меньше $\sigma = 1{,}01$, пренебрегая в последнем уравнении для A' членом $\ddot{A}'$, получим выражение для вынужденных колебаний

$$A' = -(5/(2 + 3\alpha))E(t). \tag{14}$$

Замечание. Система уравнений (13) рассматривается на многообразии $\operatorname{sp} A' = 0$, $\operatorname{sp} F = 0$, на котором она имеет порядок 13. Система (13) имеет собственные частоты: 0 кратности 3, $\pm\sigma$ кратности 5 каждая. Допустим, что мы произвели линеаризацию в окрестности твердого вращения с малой угловой скоростью ω. Тогда собственные частоты будут функциями параметра ω. При $\omega = 0$ получим те же частоты, что и выше. При $\omega \neq 0$ они, вообще говоря, расщепляются, и их число становится равным их кратности. Вследствие закона сохранения момента импульса (10) (при $E = 0$) частота 0 расщепится на три компоненты: 0, $\pm\omega$. Десять компонент расщепления частот $\pm\sigma$ могут играть роль в нелинейных эффектах.

Пусть $\boldsymbol{x} = (1 + \eta)\,\boldsymbol{a}$ — точка поверхности планеты, где $\boldsymbol{a} = (\cos\lambda\cos\beta, \sin\lambda\cos\beta, \sin\beta)$ — единичный вектор, так что η означает величину отклонения по вертикали поверхности планеты от ее равновесного положения под действием небесных тел. Чтобы выразить η через матрицу A', подставим выражение для $\boldsymbol{x}$ в уравнение поверхности планеты $\boldsymbol{x} \cdot (I + A')\boldsymbol{x} - 1 = 0$ и пренебрежем слагаемыми порядка η^2. С учетом формулы (14) получим

$$\eta = -(1/2)\boldsymbol{a} \cdot A'\boldsymbol{a} = (5/(4 + 6\alpha))\boldsymbol{a} \cdot E(t)\boldsymbol{a}. \tag{15}$$

Рассмотрим планету Земля. В астрономии λ, β называются эклиптическими координатами. В отличие от географической системы координат поверхность Земли вращается относительно эклиптической с периодом, равным суткам.

Подставив в формулу (15) выражение (6) для матрицы $E(t)$, получим

$$\eta = \frac{5}{4 + 6\alpha} \sum_{k=1}^{2} c_k (3(\boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{a})^2 - 1) = \frac{5}{4 + 6\alpha} \sum_{k=1}^{2} c_k (3\cos^2\beta\cos^2(\chi_k t + \lambda_k - \lambda) - 1). \tag{16}$$

Это выражение как функция эклиптической долготы λ имеет период π, т. е. на эклиптической параллели имеется два максимума и два минимума. Из-за вращения Земли эти горбы движутся по ее поверхности, образуя приливы два раза в сутки. Кроме того, они медленно дрейфуют относительно эклиптической системы координат из-за движения небесных тел по своей траектории. Для определения высоты этих горбов выражение (16) преобразуем к виду

$$b_1 \cos(2\lambda) + b_2 \sin(2\lambda) + b_3 = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cos(2\lambda - \varphi) + b_3,$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}(b_2/b_1)$. Отсюда следует, что высота прилива (амплитуда приливной волны) равна

$$b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = (15/(8 + 12\alpha)) \cos^2 \beta (c_1^2 + c_2^2 + 2c_1 c_2 \cos(2(\chi_1 - \chi_2)t + 2\lambda_1 - 2\lambda_2))^{1/2}.$$

В зависимости от дня месяца высота прилива меняется в пределах от $q|c_1 - c_2|$ до $q(c_1 + c_2)$, где $q = (15/(8+12\alpha)) \cos^2 \beta$. При $\beta = 0$, т. е. на эклиптическом экваторе, эти величины равны 0,28 и 0,76 м. Для определения высоты прилива в конкретной точке земной поверхности в данный момент времени надо эклиптические координаты выразить через географические и воспользоваться общей формулой (16). Приливы в земной коре имеют амплитуду в среднем 0,5 м, что хорошо согласуется с полученным теоретическим результатом.

6. Оценка энергии упругой деформации. Теперь сравним кинетическую энергию K приливного движения с энергией U упругих деформаций планеты под действием небесных тел. Если $K \gg U$, планету можно считать жидкой. Так как число Рейнольдса велико и все конденсированные среды сжимаемы незначительно, эту жидкость естественно считать также идеальной и несжимаемой. Тем самым будет обоснована применимость полученных выше теоретических результатов для описания астрономических явлений. Поскольку приведенные в данном пункте результаты носят оценочный характер, не будем учитывать неоднородность планеты (положим $\alpha = 0$).

При вычислении K и U необходимо рассматривать приливное движение относительно географической системы координат $\boldsymbol{x}'$, вращающейся вместе с планетой вокруг ее оси, чтобы исключить твердое вращение и учесть только деформации. Кинетическая энергия K относительного движения зависит от скорости вращения планеты вокруг своей оси. Действительно, точка поверхности планеты совершает движение по вертикали вверх и вниз на высоту горба прилива b за время Δt, за которое горб проходит через нее. Так как два горба неподвижны относительно небесных тел, медленно дрейфующих по небу, то Δt равно времени полуоборота планеты: $\Delta t = \pi/\omega$, где ω — угловая скорость вращения планеты вокруг своей оси. Таким образом, относительная скорость приливного движения имеет порядок $b/\Delta t = b\omega/\pi$. Отсюда $K \sim b^2\omega^2$. В то же время деформация планеты имеет порядок $b/1$ (средний радиус планеты принимается равным 1). Поэтому $U \sim Gb^2$, где G — модуль сдвига материала планеты (из-за несжимаемости энергия деформации не зависит от второй константы упругости). Итак,

$$U/K = æG/\omega^2, \tag{17}$$

где $æ$ — числовой коэффициент. Здесь под K и U подразумеваются некоторые характерные значения, а не функции времени. Перейдем в этой формуле к размерным величинам: $U/K = æG/(\rho_0 r_0^2 \omega^2)$. Величина $G_0 = \rho_0 r_0^2 \omega^2$ для Земли равна 1,2 ГПа. В качестве G надо взять модуль сдвига магмы, который неизвестен. Для сравнения приведем модуль сдвига алюминия $G = 24{,}5$ ГПа. Модуль сдвига магмы, вероятно, много меньше. Для Юпитера $G_0 = 204$ ГПа. Последняя формула, в сущности, дает ответ на поставленный вопрос, так как обычно $æ \sim 1$ (мы убедимся в этом, вычислив в дальнейшем коэффициент $æ$).

Следует отметить, что значение параметра G_0 не зависит от величины приливных сил. Отношение G/G_0 характеризует степень влияния упругих и инерционных сил в любом движении планетарного масштаба, когда длина волны сравнима с радиусом планеты. При этом в выражение для G_0 вместо ω нужно подставить характерную частоту движения.

В частности, для найденных выше собственных колебаний планеты с высокой частотой σ значение G_0 много больше G (для Земли 354 ГПа), поэтому роль упругих сил еще менее существенна. Короткие сейсмические волны, очевидно, остаются за рамками рассматриваемой в данной статье модели.

С планетой свяжем систему координат (x'_1, x'_2, x'_3), ось x'_3 которой совместим с осью вращения планеты. Угол между осями координат x_3 и x'_3 (плоскостями орбиты и экватора) обозначим θ. Для Земли $\theta = 23{,}5°$. Связь между прежними и новыми координатами одной и той же точки пространства задается ортогональной матрицей: $\boldsymbol{x} = Z(t)\boldsymbol{x}'$. Можно записать $Z(t) = Z_0 Z_1(t)$, где Z_0 — постоянная ортогональная матрица; $Z_1(t)$ — поворот вокруг оси x'_3 на угол ωt. Поэтому

$$Z^{-1}\dot{Z} = Z_1^{-1}\dot{Z}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \Omega'.$$

В силу перестановочности матриц $Z_1(t)$ и $\dot{Z}_1(t)$ имеем $\Omega = Z(t)\Omega' Z(t)^{-1} = \dot{Z}(t)Z(t)^{-1} = Z_0\Omega' Z_0^{-1}$. Антисимметричные матрицы Ω и Ω' задают вектор угловой скорости вращения планеты в системах координат $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$ соответственно.

Выясним, как преобразуются матрицы A и B при замене координат $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}'$. Подставив $\boldsymbol{x} = Z\boldsymbol{x}'$ в уравнение поверхности планеты, получим

$$\boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{x} - 1 = Z\boldsymbol{x}' \cdot AZ\boldsymbol{x}' - 1 = \boldsymbol{x}' \cdot Z^* AZ\boldsymbol{x}' - 1 = 0.$$

Отсюда следует $A \to A' = Z^* AZ = Z^{-1}AZ$ (для ортогональных матриц $Z^* = Z^{-1}$). Чтобы найти вид матрицы B', относящейся к системе координат $\boldsymbol{x}'$, напомним, что $B\boldsymbol{x}$ есть скорость жидкости:

$$\boldsymbol{u} = \dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d(Z\boldsymbol{x}')}{dt} = Z\dot{\boldsymbol{x}}' + \dot{Z}\boldsymbol{x}' = B\boldsymbol{x}.$$

Отсюда найдем относительную скорость жидкости $\boldsymbol{u}' = \dot{\boldsymbol{x}}' = Z^{-1}(B\boldsymbol{x} - \dot{Z}\boldsymbol{x}') = (Z^{-1}BZ - Z^{-1}\dot{Z})\,\boldsymbol{x}'$. Видно, что она также является линейной функцией координат: $\boldsymbol{u}' = B'\boldsymbol{x}'$, где $B' = Z^{-1}BZ - Z^{-1}\dot{Z} = Z^{-1}BZ - \Omega'$.

Уравнения (7) и (9) умножим слева на Z^{-1}, а справа на Z и подставим в них $A = ZA'Z^{-1}$, $B = Z(B' + \Omega')Z^{-1}$, после чего они легко преобразуются к виду

$$\dot{B}' + B'^2 + 2\Omega' B' + \Omega'^2 + D_0(A') - E'(t) - \lambda A' = 0, \quad \dot{A}' + A'B' + B'^* A' = 0,$$

где $E' = Z^{-1}EZ$; $\lambda = (\mathrm{sp}\,(B'+\Omega')^2+3)/\mathrm{sp}\,A'$. Линеаризуем эту систему уравнений в окрестности решения $A' = I$, $B' = 0$, причем величину Ω' также будем считать малой. Получим систему уравнений, совпадающую с (13) при $\alpha = 0$. Поэтому антисимметричная часть матрицы B' задает постоянное вращение, которое теперь должно отсутствовать: $B'^* = B'$. Хотя частота функции $E'(t)$, приблизительно равная 2ω, существенно выше, чем у $E(t)$, тем не менее она много меньше собственной частоты $2/\sqrt{5}$. Таким образом, получим

$$B' = (5/4)\dot{E}'(t). \tag{18}$$

Вычислим кинетическую энергию относительного движения:

$$K = \frac{1}{2}\int\limits_{f\leqslant 0} |\boldsymbol{u}'|^2\, d\boldsymbol{x}' = \frac{2\pi}{3}\,\mathrm{sp}\,(B'^* B' A'^{-1}).$$

В рассматриваемом линейном приближении упростим это выражение с учетом (18):

$$K = \frac{2\pi}{3}\,\mathrm{sp}\,(B'^*B') = \frac{2\pi}{3}\,\mathrm{sp}\,\Big(\frac{5}{4}\,\dot E'(t)\Big)^2. \tag{19}$$

Заметим, что след квадрата симметричной матрицы равен сумме квадратов ее элементов.

Найдем теперь энергию упругих деформаций. Траектории точек планеты будем вычислять по найденному полю скоростей жидкости. Они удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\dot{\boldsymbol x}' = \boldsymbol u' = B'(t)\boldsymbol x', \qquad \boldsymbol x'\big|_{t=t_0} = \boldsymbol\xi,$$

где t_0 — некоторый момент времени. Так как смещения $\boldsymbol x' - \boldsymbol\xi$ малы, применим метод последовательных приближений. В первом приближении с учетом (18) имеем

$$\dot{\boldsymbol x}' = B'(t)\boldsymbol\xi = (5/4)\dot E'(t)\boldsymbol\xi, \qquad \boldsymbol x' - \boldsymbol\xi = (5/4)(E'(t) - E'(t_0))\boldsymbol\xi.$$

Естественно отсчитывать смещение точки от ее гипотетического положения $\boldsymbol\xi$, когда деформация планеты отсутствовала, т. е. $E'(t_0) = 0$. Отсюда найдем тензор деформаций, являющийся симметричной матрицей:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial(x_i' - \xi_i)}{\partial\xi_j} + \frac{\partial(x_j' - \xi_j)}{\partial\xi_i}\Big) = \frac{5}{4}\,E'(t).$$

Энергия упругих деформаций имеет вид

$$U = \int\limits_{f\leqslant 0}\Big(\frac{\lambda}{2}\,(\mathrm{sp}\,\varepsilon)^2 + \frac{\mu}{2}\,\mathrm{sp}\,\varepsilon^2\Big)d\boldsymbol x',$$

где λ, μ — коэффициенты Ламе. В силу бесследности $E'(t)$ первое слагаемое в подынтегральном выражении обращается в нуль ($\mathrm{sp}\,\varepsilon = 0$). Поскольку тензор деформаций ε не зависит от $\boldsymbol x'$, находим

$$U = \frac{2\pi\mu}{3}\,\mathrm{sp}\,\Big(\frac{5}{4}\,E'(t)\Big)^2. \tag{20}$$

Таким образом, в силу (19) и (20) имеем

$$\frac{U}{K} = \mu\,\frac{\mathrm{sp}\,E'(t)^2}{\mathrm{sp}\,\dot E'(t)^2}. \tag{21}$$

Рассмотрим случай, когда вокруг планеты вращается только одно небесное тело по круговой орбите с угловой скоростью χ. Тогда числитель дроби (21) вычисляется сразу (см. (6)): $\mathrm{sp}\,E'(t)^2 = \mathrm{sp}\,E(t)^2 = 6c^2$. Преобразуем знаменатель, учитывая неравенство $\chi \ll \omega$:

$$\dot E' \simeq \dot{Z^{-1}}EZ + Z^{-1}E\dot Z = Z^{-1}(Z\dot{Z^{-1}}E + E\dot ZZ^{-1})Z = Z^{-1}(-\Omega E + E\Omega)Z.$$

Здесь использовано равенство $Z\dot{Z^{-1}} = -\dot ZZ^{-1}$, которое получается дифференцированием по t тождества $ZZ^{-1} = I$. Итак,

$$\mathrm{sp}\,\dot E'(t)^2 = \mathrm{sp}\,(\Omega E - E\Omega)^2 = 9c^2\,\mathrm{sp}\,((\Omega\boldsymbol e)_i e_j + e_i(\Omega\boldsymbol e)_j)^2 = 18c^2|\Omega\boldsymbol e|^2 \leqslant 18c^2\omega^2.$$

При $\theta = 0$ здесь имеется равенство, поэтому $U/K = \mu/(3\omega^2)$. Так как $\mu = 2G$, отсюда следует формула (17) с константой $\text{æ} = 2/3$.

Таким образом, меньшее влияние упругих сил по сравнению с инерционными в приливных движениях планет характеризует отношение G/G_0. Значения параметра G_0 и

Планета	α	G_0, ГПа
Венера	—	$2 \cdot 10^{-4}$
Земля	0,19	1,19
Марс	0,06	0,23
Юпитер	0,47	204
Сатурн	0,65	68
Уран	< 0	6
Нептун	0,57	21

вычисленные по формуле (12) доли α масс ядер планет приведены в таблице. Данные взяты из [3]. Для Урана получается значение $\alpha < 0$, что не имеет физического смысла. Это означает, что либо неточны измерения угловой скорости вращения и коэффициента сплющивания, либо сплющивание этой планеты не является следствием ее вращения вокруг оси.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Риман Б**. О движении однородного жидкого эллипсоида // Соч. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. С. 339–366.
2. **Овсянников Л. В**. Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей: общие уравнения и примеры. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967.
3. **Таблицы** физических величин: Справ. / Под ред. И. К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976.

Поступила в редакцию 27/X 1999 г.,
в окончательном варианте — 10/I 2000 г.