

УДК 536.2

## Определение теплофизических характеристик материалов при тепловом воздействии постоянной мощности

В.Г. Зверев<sup>1</sup>, В.А. Назаренко<sup>2</sup>, А.В. Теплоухов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Томский государственный университет

<sup>2</sup>Московский институт теплотехники

E-mail: zverev@niipmm.tsu.ru

На основе решения коэффициентной обратной задачи теплопроводности предложена методика определения теплофизических характеристик материала по измерениям температуры в его глубине в приближениях полубесконечного тела, пластины конечной толщины, пластины со слоем идеального проводника при тепловом воздействии постоянной мощности на их поверхности. Методика не требует сглаживания экспериментальных данных, позволяет снять ограничения на выбор режима нагрева образца материала и повысить точность идентификации теплофизических характеристик.

**Ключевые слова:** теплофизические характеристики, коэффициентная обратная задача теплопроводности, полубесконечное тело, одно- и двухслойная пластины.

### ВВЕДЕНИЕ

Решение задач теплового проектирования и отработки оптимальных параметров теплозащитных систем неразрывно связано с расчетами тепловых полей в конструкциях и требует знания теплофизических характеристик (ТФХ) материалов [1]. В настоящее время теоретические модели для расчета ТФХ структурно сложных композиционных материалов недостаточно точны, поэтому основным источником информации о их свойствах является проведение теплофизического эксперимента [2, 3].

Теоретической основой методов определения ТФХ материалов является дифференциальное уравнение теории теплопроводности [4, 5]. Удельная теплоемкость  $c$  и коэффициент теплопроводности  $\lambda$  материала определяют процесс теплопередачи в твердом теле. Важную роль играет их комбинация — коэффициент температуропроводности  $a = \lambda/(\rho c)$ , где  $\rho$  — плотность материала, которая отражает скорость перестройки теплового поля.

Сложная структура аналитического решения уравнения теплопроводности сильно зависит от геометрии образца, типа теплового воздействия, стадии процесса. Поэтому наибольшее распространение получили постановки эксперимента, которые приводят к явным выражениям для определения ТФХ [2, 3]. Это накладывает ограничения на выбор режима прогрева образца и возможный диапазон

измерений по числу Фурье. Использование общих решений позволяет снять эти ограничения и повысить точность определения ТФХ.

Цель работы — дальнейшее развитие методического обеспечения [6] теплофизического эксперимента для определения коэффициентов ( $a$ ,  $\lambda$ ) на основе решения обратной задачи теплопроводности (ОЗТ) [7, 8].

### ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ, ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В теплофизических измерениях большее предпочтение отдается постановкам эксперимента, которые обеспечивают одномерное температурное поле внутри образца. Воздействие источника постоянной мощности на поверхности образца относится к классу задач с граничными условиями второго рода [4, 5, 9]. Для создания постоянного теплового потока обычно используются электрические нагреватели либо высокотемпературные источники теплового излучения (лучистого теплового потока) [2, 3]. Привлекательной чертой данных экспериментов является простота расчетных соотношений в квазистационарной стадии теплового процесса.

На рис. 1 показана схема проведения теплофизического эксперимента для образцов материала в виде плоского полубесконечного тела ( $a$ ), однородной пластины толщиной  $h$  ( $b$ ), пластины со слоем идеального проводника (металлической подложкой) толщиной  $h'$  ( $c$ ), подвергающихся воздействию постоянного теплового потока  $q_c$ . Случай ( $a$ ) отвечает начальной стадии процесса и широко используется на практике, т. к. удобен для анализа и обработки результатов измерений [2, 3]. Однако для его реализации требуется достаточно толстый образец. В варианте ( $b$ ) можно избежать нарушения структуры материала, размещая термодатчики на наружной и теплоизолированной тыльной поверхности образца. То же самое относится и к случаю ( $c$ ), который подходит для исследования и мониторинга ТФХ покрытий на металлических подложках в процессе их эксплуатации.

Для обеспечения одномерности температурного поля, снижения влияния тепловых потерь в изоляцию в направлениях перпендикулярных вектору теплового потока целесообразно выбирать образец в виде тонкой круглой или квадратной пластины [3]. Поперечные размеры образца согласно оценкам работы [10] должны выбираться из условия  $D > 5h$ , где  $D$  — диаметр круглой или сторона квадратной пластины.

Пусть начальная температура образца  $T(y, 0) = T_0 = 0$ . В момент времени  $t > 0$  на его поверхности происходит воздействие постоянного теплового потока  $q_c$ , тыльная сторона пластины является теплоизолированной. Теплофизические свойства материала считаются постоянными. Математическая постановка одномерной

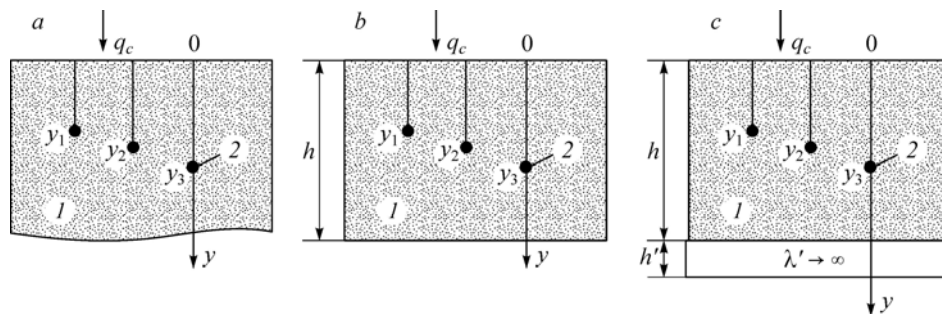


Рис. 1. Схема проведения теплофизического эксперимента.

$a$  — полубесконечное тело,  $b$  — пластина толщиной  $h$ ,  $c$  — пластина на металлической подложке толщиной  $h'$ . 1 — исследуемый образец, 2 — термодатчик на глубине,  $y_j$ ,  $q_c$  — постоянный тепловой поток.

задачи нагрева имеет вид [4, 5, 9]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad a = \frac{\lambda}{\rho c}, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$t = 0: \quad T(y, 0) = T_0 = 0; \quad (2)$$

$$y = 0: \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = q_c. \quad (3)$$

Граничное условие на тыльной поверхности для случаев, показанных на рис. 1, *a*, *b*, записывается следующим образом:

$$y = \infty, \quad y = h: \quad \partial T / \partial y = 0. \quad (4)$$

Для материала на металлической подложке (см. рис. 1, *c*) оно имеет вид:

$$y = h: \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \rho' c' h' \frac{\partial T}{\partial t},$$

здесь *t* — время, *y* — координата, направленная вглубь образца, верхний штрих относится к материалу подложки.

Определение *T(y, t)* на основе решения уравнения (1) с начальным (2) и крайними условиями (3), (4) при известных значениях ТФХ представляет собой прямую задачу теплопроводности.

Пусть в результате проведения теплофизического эксперимента получены значения температуры  $Y(y_j, t_{i,j})$ ,  $1 \leq j \leq M$ ,  $1 \leq i \leq N_j$ . Определение коэффициентов *a* и  $\lambda$  по известным значениям температуры  $Y(y_j, t_{i,j})$  в моменты времени  $t_{i,j}$  в точках образца материала  $y_j$  составляет суть коэффициентной обратной задачи теплопроводности [7, 8]. Она связана с минимизацией функционала суммы квадратов отклонений экспериментальных значений  $Y(y_j, t_{i,j})$  температуры от расчетных  $T(y_j, t_{i,j})$  по всем выбранным временным точкам и датчикам [7, 8]:

$$J(a, \lambda) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} \{Y(y_j, t_{i,j}) - T(y_j, t_{i,j})\}^2 \rightarrow \min. \quad (5)$$

#### АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В случае приближения полубесконечного тела аналитическое решение задачи (1)–(4) имеет наиболее простой вид [4, 5, 9]:

$$T(y, t) - T_0 = \frac{q_c}{\lambda} 2\sqrt{at} \operatorname{ierfc}(u), \quad u = \frac{y}{2\sqrt{at}}, \quad \operatorname{ierfc}(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad (6)$$

$$\operatorname{ierfc}(u) = \int_u^\infty \operatorname{erfc}(\xi) d\xi = \frac{\exp(-u^2)}{\sqrt{\pi}} - u \operatorname{erfc}(u), \quad \operatorname{erfc}(u) = 1 - \operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty \exp(-\xi^2) d\xi,$$

здесь  $\operatorname{ierfc}(u)$ ,  $\operatorname{erfc}(u)$  — специальные функции, табулированные во многих приложениях [11]. На начальной стадии нагрева процесс развивается в зоне, примыкающей к поверхности, и любой образец конечной толщины сохраняет признаки полуограниченной среды. Применимость данного приближения для пластины толщины *h* в этом случае ограничивается малыми числами Фурье (безразмерное время)  $Fo = (at)/h^2 < 0,1$ . Из (6) видно, что при регистрации температуры поверхности

( $y = 0$  мм) определяется только один комплекс  $\varepsilon_a = \lambda / \sqrt{a} = \sqrt{\lambda \rho c}$  — тепловая активность материала. Регистрация температуры другого слоя на глубине  $y = y_j$  позволяет определить коэффициенты теплопроводности  $a$  и затем теплопроводности  $\lambda$  образца материала.

Более сложный вид точного решения в виде бесконечного ряда имеет место в случае пластины конечной толщины  $h$  (см. рис. 1, *b*) [4, 5, 9]:

$$T(y, t) - T_0 = \frac{q_c h}{\lambda} \left\{ \text{Fo} - \eta + \frac{\eta^2}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos[\mu_n(1 - \eta)] \exp(-\mu_n^2 \text{Fo}) \right\} = \frac{q_c h}{\lambda} \theta(\eta, \text{Fo}),$$

$$\mu_n = \pi n, \quad A_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n^2}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad (7)$$

здесь  $A_n$  — амплитудный коэффициент,  $\mu_n$  — характеристические числа,  $\eta$  — безразмерная координата,  $\theta = (T(y, t) - T_0) \lambda / (q_c h)$  — безразмерная температура. Решение (7) зависит от двух переменных ( $\eta$ , Fo), и его номограммы хорошо известны в литературе [4, 5, 9]. Начальной стадии теплового процесса отвечают числа Фурье  $\text{Fo} = (at)/h^2 < 0,1$ , переходной стадии —  $0,1 < \text{Fo} < 0,2$ . В регулярной стадии при  $0,2 < \text{Fo} < 0,5$  ряд в (7) быстро сходится, поэтому можно ограничиться его первым членом [4, 5]. В квазистационарной стадии при больших  $\text{Fo} > 0,5$  слагаемым с рядом пренебрегают вообще, что значительно упрощает решение (7), которое становится линейным по времени. В этом случае все слои образца повышают температуру с одинаковой скоростью, температурный профиль не зависит от начальных условий и имеет параболический вид. Для начальной стадии процесса при  $\text{Fo} \rightarrow 0$  сходимость ряда в (7) снижается и имеется другая форма представления решения, для которой достаточно использования одного, двух членов ряда [4, 5]

$$T(y, t) - T_0 = \frac{2q_c \sqrt{at}}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \text{ierfc} \left[ \frac{(2n-1) - (1-\eta)}{2\sqrt{\text{Fo}}} \right] + \text{ierfc} \left[ \frac{(2n-1) + (1-\eta)}{2\sqrt{\text{Fo}}} \right] \right\}.$$

Решение задачи (1)–(4) для образца материала на металлической подложке, являющейся идеальным проводником (см. рис. 1, *c*) [4, 5, 9], имеет вид:

$$T(y, t) - T_0 = \frac{q_c h}{\lambda} \left\{ \frac{\eta_0}{1 + \eta_0} \left[ \text{Fo} + \frac{(1-\eta)^2}{2} - \frac{3 + \eta_0}{6(1 + \eta_0)} \right] + \frac{(1-\eta)}{1 + \eta_0} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos[\mu_n \eta] \exp(-\mu_n^2 \text{Fo}) \right\},$$

$$\text{tg}(\mu_n) = -\frac{\mu_n}{\eta_0}, \quad A_n = \frac{2(\mu_n^2 + \eta_0^2)}{\mu_n^2(\mu_n^2 + \eta_0^2 + \eta_0)}, \quad \eta_0 = \frac{\rho c h}{\rho' c' h'}. \quad (8)$$

Здесь характеристические числа  $\mu_n$  являются корнями трансцендентного уравнения. При больших  $\text{Fo} > 1$  рядом в (8) можно пренебречь.

Напрямую решения (7), (8) из-за сложной структуры практически не применяются при обработке результатов теплофизических измерений. Наибольшее распространение получила регистрация температуры поверхностного и тыльного слоев пластины в регулярной и, в большей степени, квазистационарной (на больших временах) стадиях процесса, при которых (7), (8) упрощаются до явных выражений для вычисления температуры. На этой теоретической основе и использовании факта параллельности кривых нагрева данных слоев предложено несколько методик определения ТФХ материалов, которые реализуются графическим и расчетным способами [2, 3].

Необходимо отметить, что соблюдение постоянства внешнего теплового потока, одномерности и адиабатичности измерительной ячейки является проблематичным при больших временах  $Fo > 0,5$ , и более достоверные результаты по измерениям температуры находятся в начале процесса. Кроме того, различные стадии нагрева обычно перекрываются, деление на них является условным и переходная стадия практически не проявляется [2, 3].

Преимуществом выражений (6)–(8), несмотря на сложную структуру, является точный, а не приближенный характер решений для любых значений координаты  $y$  и моментов времени  $t$ . Оно сохраняется и по отношению к численному решению задачи (1)–(4) разностными методами, ввиду наличия в последних ошибок аппроксимации. Поэтому использование (7), (8) в общем виде при решении ОЗТ не требует необходимости выделения стадии теплового процесса (начальной, переходной, регулярной, квазистационарной) и диапазона чисел Фурье, при которых эти выражения упрощаются до явных выражений для определения ТФХ, что безусловно повышает возможности обработки результатов теплофизического эксперимента.

### КОЭФФИЦИЕНТЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ

С точки зрения планирования теплофизического эксперимента желательно знать диапазон времен, при которых результаты измерений в большей степени содержат информацию об искомым теплофизических параметрах и где предпочтительна их обработка. Вид решений (6)–(8) показывает, что в качестве таковых может выступать набор ТФХ ( $a, \lambda$ ). На примере пластины толщины  $h$  рассмотрим безразмерные коэффициенты чувствительности  $Z_{ah}, Z_{\lambda h}$  решения (7) к изменению  $a$  и  $\lambda$  [7, 8]. Чем выше эти коэффициенты, тем точнее при данной погрешности измерений можно определить искомый набор параметров. Взяв от решения (7) соответствующие производные по этим параметрам ( $a$  и  $\lambda$  — независимые), получим

$$Z_{ah}(\eta, Fo) = \frac{\partial T}{\partial a} \frac{a\lambda}{q_c h} = \left\{ Fo - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos[\mu_n(1-\eta)] \exp(-\mu_n^2 Fo) (\mu_n^2 Fo) \right\}, \quad (9)$$

$$Z_{\lambda h}(\eta, Fo) = \frac{\partial T}{\partial \lambda} \frac{\lambda^2}{q_c h} = - \left\{ Fo - \eta + \frac{\eta^2}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos[\mu_n(1-\eta)] \exp(-\mu_n^2 Fo) \right\} = -\theta.$$

Графики безразмерной температуры  $\theta$  и коэффициентов чувствительности  $Z_{ah}, Z_{\lambda h}$  в зависимости от аргументов  $\eta$  и  $Fo$  приведены на рис. 2. Из него видно, что при  $Fo < 0,1$  в силу запаздывания температурной кривой 2 тыльная сторона пластины является малоинформативной и здесь коэффициенты  $Z_{ah}, Z_{\lambda h}$  близки к нулю. Срав-

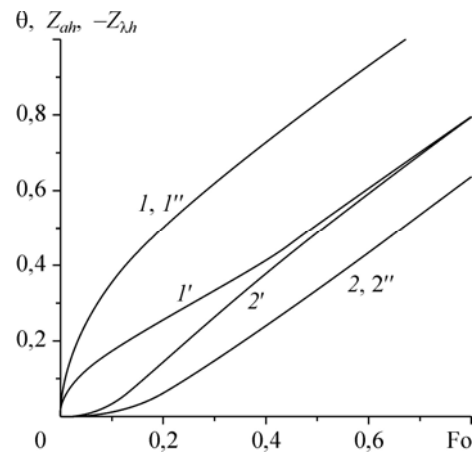


Рис. 2. Температура  $\theta$ , коэффициенты чувствительности  $Z_{ah}, Z_{\lambda h}$  в зависимости от числа  $Fo$  (пластина толщиной  $h$ ): 1, 2 —  $\theta$ ; 1', 2' —  $Z_{ah}$ ; 1'', 2'' —  $Z_{\lambda h}$  при  $\eta = 0, 1$ .

нение кривых  $1'$  и  $2'$  показывает, что при определении коэффициента  $a$  при  $Fo < 0,5$  наружная поверхность предпочтительнее тыльной стороны, так как для нее характерны более высокие значения коэффициента чувствительности  $Z_{ah}$ . Далее на квазистационарном участке при  $Fo > 0,5$  они становятся равноправными, кривые  $1'$ ,  $2'$  сливаются и имеют одинаковые значения  $Z_{ah}$ . Это соответствует хорошо известному факту, когда темп нагрева (охлаждения) образца на этой стадии теплового процесса определяется по любой его точке. В целом, как следует из (9) и отражено на рис. 2, для данной постановки теплофизического эксперимента более высокие значения  $Z_{ah}, Z_{\lambda h}$  достигаются с ростом числа  $Fo$ .

#### МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассмотрим важный в практическом отношении частный случай — приближение полубесконечного тела. Здесь наиболее интересна регистрация температуры поверхности, что позволяет легко получить отношение искомых коэффициентов  $(a, \lambda)$  — коэффициент тепловой активности материала  $\varepsilon_a = \lambda / \sqrt{a} = \sqrt{\lambda \rho c}$ . При  $N$  измерениях  $Y(0, t_i)$  температуры по времени  $t_i$  из (6) с учетом среднеарифметического усреднения следует:

$$\varepsilon_a = \frac{2q_c}{N\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{t_i}}{(Y(0, t_i) - T_0)}. \quad (10)$$

Регистрация температуры внутреннего слоя с координатой  $y_j$  принципиально дает возможность определить коэффициент теплопроводности  $a$ . В ряде методик [2] для этой цели измеренную на глубине температуру относят к значению на поверхности и на основе (6) получают неявное уравнение, содержащее только коэффициент  $a$ . К сожалению, такой подход требует точного задания температур, так как при наличии погрешности  $\varepsilon$  их отношение уже имеет ошибку  $\sim 2\varepsilon$  и, тем самым, усиливает неточность определения ТФХ. Кроме того точки измерений по времени могут не совпадать и тогда неясно, к какой температуре поверхности относить ее значения на глубине.

Искомые ТФХ должны, в целом, обеспечивать измеренный ход температуры на поверхности и на глубине. Поэтому целесообразно коэффициент  $a$  определять из уравнения (6) с использованием найденного значения  $\varepsilon_a$  (10). В результате имеем неявное уравнение

$$\text{ierfc}(u_{i,j}) = V_{i,j}, \quad V_{i,j} = (Y(y_j, t_{i,j}) - T_0) \varepsilon_a / (2q_c \sqrt{t_{i,j}}), \quad (11)$$

где  $Y(y_j, t_{i,j})$  — измеренные значения температуры для датчика с координатой  $y_j$  в момент времени  $t_{i,j}$ .

Для решения (11) представляет интерес аппроксимация  $f(u) = \text{ierfc}(u)$ , допускающая явное выражение аргумента  $u$  в практически важном диапазоне  $0 < u < 1$ . Рассмотрим следующую функцию  $f_{\text{app}}(u)$ , графически совпадающую с точными значениями  $f(u)$  (см. рис. 3, кривые 1, 2)

$$f_{\text{app}}(u) = d \left\{ 1 - \sqrt{1 - \exp[-(pu^2 + ru + s)]} \right\}, \quad (12)$$

где  $d = [\sqrt{\pi}(1 - \sqrt{1 - \exp(-s)})]^{-1} = 1,628385$ ,  $p = 0,84034$ ,  $r = 1,40336$ ,  $s = 0,55704$  — подобранные числовые константы. Как видно из рис. 3, абсолютная погрешность

Рис. 3. Погрешность аппроксимации  $f(u) = \text{ierfc}(u)$ : 1 —  $f(u)$ , 2 —  $f_{\text{app}}(u)$ , 3 —  $\Delta f$  (абсолютная), 4 —  $\delta f$  (относительная).

$\Delta f = f - f_{\text{app}}$  не превышает  $|\Delta f| < 0,0001$ , относительная —  $|\delta f| = |\Delta f|/f$  составляет менее 0,03 % при  $0 < u < 1$  и меньше 0,3 % при  $1 < u < 2$ , что вполне подходит для практического применения.

Использование (12) позволяет явно выразить коэффициент  $a$ . Для этого подставим в (11) аппроксимацию (12), вычислим  $u_{i,j}$  и далее найдем  $a$ . При  $N$  измерениях по времени для одиночного датчика можно получить следующую формулу:

$$a = \frac{y_j^2}{4N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{t_{i,j} u_{i,j}^2}, \quad u_{i,j} = \frac{-r + \sqrt{r^2 - 4p(s - g_{i,j})}}{2p}, \quad g_{i,j} = -\ln[1 - (1 - V_{i,j}/d)^2], \quad (13)$$

здесь  $g_{i,j}, u_{i,j}$  — расчетные величины, зависящие от  $Y(y_j, t_{i,j})$  и условий измерений.

Формулу (13) можно распространить на случай  $M$  датчиков с координатами  $y_j$  ( $1 \leq j \leq M$ ). Точки измерений по времени  $t_{i,j}$  и их количество  $N_j$  для датчиков могут быть различными (индекс  $i$  — точки по времени,  $j$  — датчики температуры). При этих условиях (13) запишется как

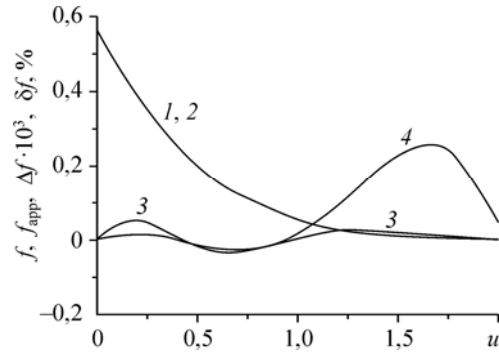
$$a = \left\{ \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} \frac{y_j^2}{t_{i,j} u_{i,j}^2} \right\} / \left\{ 4 \sum_{j=1}^M N_j \right\},$$

где  $u_{i,j}$  и входящие в нее величины вычисляются по приведенным выше формулам. После определения  $a$  (13) и известном  $\varepsilon_a$  (10) коэффициент теплопроводности  $\lambda$  определяется по формуле  $\lambda = a^{1/2} \varepsilon_a$ .

Рассмотрим общий случай определения коэффициентов ( $a, \lambda$ ) по экспериментальным значениям температуры  $Y(y_j, t_{i,j})$  в моменты времени  $t_{i,j}$  для  $M$  датчиков с координатами  $y_j$  ( $1 \leq j \leq M$ ). Составим функционал  $J(a, \lambda)$  (5) метода наименьших квадратов. Используя условие минимума функционала [8, 12], получим систему нелинейных трансцендентных уравнений для определения искомого набора коэффициентов ( $a, \lambda$ ):

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial a} = -2 \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} [Y(y_j, t_{i,j}) - T(y_j, t_{i,j})] \left( \frac{\partial T}{\partial a} \right)_{i,j} = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda} = -2 \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} [Y(y_j, t_{i,j}) - T(y_j, t_{i,j})] \left( \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right)_{i,j} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Входящие в (14) сомножители в круглых скобках имеют смысл коэффициентов чувствительности решения по искомым параметрам в соответствующих точках по времени. Так как неизвестные ( $a, \lambda$ ) должны определяться из системы линейно независимых уравнений, то для этого требуется использование двух термодатчиков.



В частном случае, когда один из искомым параметров известен, в (14) остается одно уравнение и достаточно использования данных одного датчика. Следует отметить, что ни на одном из этапов методики не применяется сглаживание экспериментальных значений температуры  $Y(y_j, t_{i,j})$ . Решение системы уравнений (14) осуществляется численным образом. Выбор  $(a, \lambda)$  в качестве искомым величин не является обязательным. Для этой цели напрямую можно использовать коэффициенты  $(c, \lambda)$ , в этом случае выражения (9) для коэффициентов чувствительности будут иметь другой вид.

#### ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДИКИ

Для апробации методики рассмотрим следующую постановку теплофизического эксперимента. Пусть исследуемый материал имеет теплофизические характеристики:  $\rho = 100 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda = 0.1 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ,  $c = 10^3 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ , коэффициент температуропроводности  $a = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ , толщина пластины  $h = 5 \text{ мм}$ . Теплофизические характеристики подложки:  $\rho' = 2500 \text{ кг/м}^3$ ,  $c' = 10^3 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ , толщина подложки  $h' = 1 \text{ мм}$ , при этих значениях коэффициент  $\eta_0 = 0,2$ .

Пусть датчики температуры расположены, как и в традиционных методиках [2, 3], на поверхности  $y_1 = 0 \text{ мм}$  и на тыльной стороне пластины (для полубесконечного тела — на глубине  $y_2 = 5 \text{ мм}$ ). Следует отметить, что это не является обязательным условием реализации методики (14) и могут использоваться два произвольных сечения. Точное решение для модели полубесконечного тела показано сплошной кривой 1 на рис. 4, а. В качестве экспериментальных данных (на рис. 4 — значки) для решения ОЗТ здесь и ниже брались возмущенные волнообразным образом значения точного решения  $Y_{j,i} = \theta_{j,i}(1 \pm \varepsilon)$  с относительной погрешностью  $\varepsilon$  в нескольких точках по времени. Для первого датчика ( $y_1 = 0 \text{ мм}$ ) произвольно выбранные значения времени составили  $t_{i,1} = (1, 2, 3, 4) \text{ с}$ , для второго ( $y_2 = 5 \text{ мм}$ ) —  $t_{i,2} = (4, 6, 8, 10) \text{ с}$ . Кроме того, для задания несимметричной ошибки в данных использовался набор первых трех точек по времени для каждого датчика.

Результаты решения ОЗТ на основе системы уравнений (14) приведены в табл. 1. В ней и других таблицах искомые величины  $(a, \lambda)$  отнесены к своим масштабам  $(a_*, \lambda_*)$ , равным точным значениям  $\bar{a} = a/a_*$ ,  $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_*$ . Видно, что при

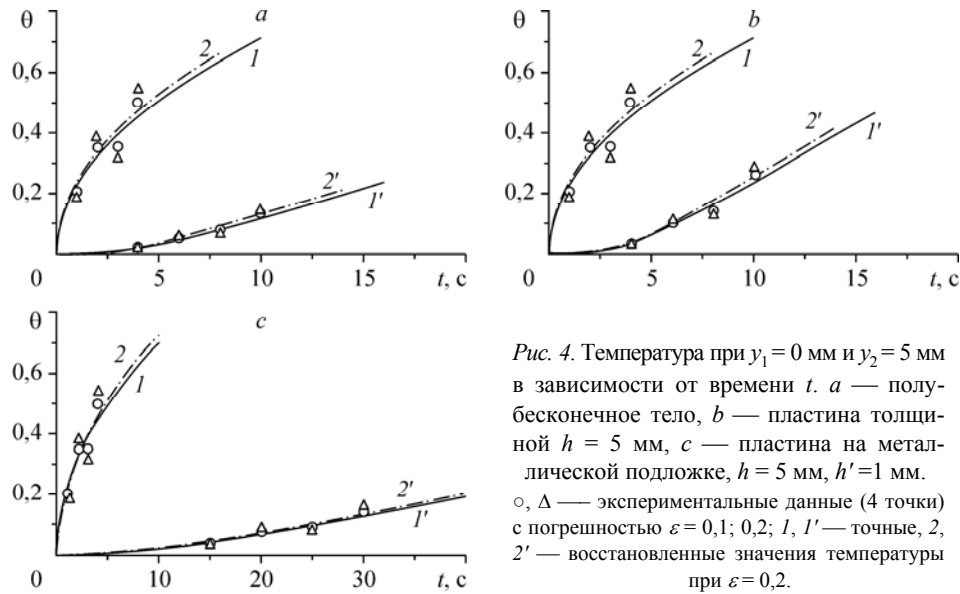


Рис. 4. Температура при  $y_1 = 0 \text{ мм}$  и  $y_2 = 5 \text{ мм}$  в зависимости от времени  $t$ . а — полубесконечное тело, б — пластина толщиной  $h = 5 \text{ мм}$ , с — пластина на металлической подложке,  $h = 5 \text{ мм}$ ,  $h' = 1 \text{ мм}$ .  $\circ, \Delta$  — экспериментальные данные (4 точки) с погрешностью  $\varepsilon = 0,1; 0,2$ ; 1, 1' — точные, 2, 2' — восстановленные значения температуры при  $\varepsilon = 0,2$ .



Таблица 1.

Восстановленные значения  $a$  и  $\lambda$ . Полубесконечное тело

$\varepsilon$	$\bar{a}$	$\bar{\lambda}$	$\bar{a}$	$\bar{\lambda}$	$\bar{a}$	$\bar{\lambda}$	$\bar{a}$	$\bar{\lambda}$
	расчет (14)		формулы(10), (13)		расчет (14)		формулы(10), (13)	
	4 точки				3 точки			
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
0,1	1,011	0,986	1,016	1,018	0,991	1,03	1,01	1,047
0,2	1,022	0,972	1,049	1,067	0,982	1,062	1,025	1,125

отсутствии погрешности исходных данных ( $\varepsilon = 0$ ) коэффициенты  $a$  и  $\lambda$  восстанавливаются точно. При наличии ошибки в 20 % ( $\varepsilon = 0,2$ ) погрешность решения ОЗТ по набору  $(a, \lambda)$  не превышает 3 % и 6 % на четырех и трех экспериментальных точках соответственно. Хорошую точность подтверждает ход температурных кривых 2, 2' (рис. 4), полученных с использованием восстановленных значений коэффициентов  $(a, \lambda)$  при  $\varepsilon = 0,2$ . Следует отметить, что реальная ошибка измерений в экспериментах обычно не превышает 5 % ( $\varepsilon < 0,05$ ). Как следует из табл. 1, применение формул (10), (13) позволяет определить ТФХ  $(a, \lambda)$  для модели полубесконечного тела с неплохой для практики точностью.

Тот же набор временных точек использовался и для однослойной пластины, что по числу Фурье составляет  $Fo = 0,04-0,16$  и  $Fo = 0,16-0,4$  для первого и второго датчиков. Таким образом, в расчете присутствуют данные с нескольких стадий теплового процесса и в решении (7) учитываются все члены ряда. Параллельность кривых нагрева здесь отсутствует, поэтому применить традиционные методики определения ТФХ [2, 3] при этих числах  $Fo$  не представляется возможным. Анализ рис. 4,  $b$  и табл. 2 показывает, что точность восстановления коэффициентов  $(a, \lambda)$  на основе (7) практически соответствует предыдущему случаю (полубесконечное тело) как для симметричной ошибки в исходных данных (4 точки), так и для несимметричной ошибки (3 точки).

Для пластины на металлической подложке в силу увеличения продолжительности теплового процесса на тыльной поверхности использовался другой набор точек по времени  $t_{i,2} = (15, 20, 25, 30)$  с, у первого датчика он оставался прежним. Результаты решения ОЗТ с использованием решения в виде ряда (8) приведены в табл. 3 и показаны на рис. 4,  $c$ . Здесь, при том же уровне возмущения (20 %) точного решения, ошибка в определении коэффициентов  $(a, \lambda)$  не превысила 6 %

Таблица 2

Восстановленные значения  $a$  и  $\lambda$ . Пластина толщиной  $h = 5$  мм

$\varepsilon$	$\bar{a}$	$\bar{\lambda}$	$\bar{a}$	$\bar{\lambda}$
	4 точки		3 точки	
	0	1,0	1,0	1,0
0,1	1,011	0,985	0,992	1,031
0,2	1,021	0,970	0,982	1,064

Таблица 3

Восстановленные значения  $a$  и  $\lambda$ . Пластина на металлической подложке,  $h = 5$  мм,  $h' = 1$  мм

$\varepsilon$	$\bar{a}$	$\bar{\lambda}$	$\bar{a}$	$\bar{\lambda}$
	4 точки		3 точки	
	0	1,0	1,0	1,0
0,1	1,032	0,996	0,954	1,010
0,2	1,066	0,992	0,910	1,022

на четырех экспериментальных точках и 9 % на трех точках. Увеличение числа временных точек и датчиков при прочих равных условиях позволяет повысить точность определения коэффициентов ( $a$ ,  $\lambda$ ).

Предложенная методика решения ОЗТ использовалась для исследования и мониторинга теплофизических характеристик пенококсов теплоогнезащитных материалов СГК-1, СГК-2 [13, 14].

#### ВЫВОДЫ

1. С единых методических позиций решена задача определения теплофизических характеристик материала по измерениям температуры в его глубине в приближении полубесконечного тела, пластины конечной толщины, пластины со слоем идеального проводника (металлической подложки) при тепловом воздействии постоянной мощности на их поверхности.

2. Для модели полубесконечного тела предложена аппроксимация решения и получены приближенные формулы для определения теплофизических характеристик.

3. Предложенная методика обработки данных теплофизического эксперимента не требует сглаживания экспериментальных данных и выбора стадии теплового процесса, позволяет расширить диапазон измерений по числу Фурье и повысить точность определения теплофизических характеристик.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полежаев Ю. В., Юревич Ф. Б. Тепловая защита. М.: Энергия, 1976. 392 с.
2. Платунов Е. С., Буравой С. Е., Куренин В. В., Петров Г. С. Теплофизические измерения и приборы. Л.: Машиностроение, 1986. 256 с.
3. Осипова В. А. Экспериментальное исследование процессов теплообмена. М.: Энергия. 1979. 320 с.
4. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа. 1967. 599 с.
5. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел: пер. с англ. М.: Наука, 1964. 487 с.
6. Зверев В.Г., Назаренко В.А., Теплоухов А.В. Идентификация теплофизических характеристик материалов // Инженерно-физический журнал. 2010. Т. 83, № 3. С. 614–621.
7. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.
8. Бек Дж., Блакуэл Б., Сент-Клэр Ч. Некорректные обратные задачи теплопроводности: пер. с англ. М.: Мир, 1989. 312 с.
9. Пехович А. И., Жидких В. М. Расчеты теплового режима твердых тел. Л.: Энергия, 1976. 352 с.
10. Товстоног А. В., Елисеев В. Н. Оценка масштабных факторов при моделировании тепловых режимов огнестойких композиционных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Машиностроение. 1998. № 3. С. 78–86.
11. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям: пер. с англ. М.: Наука, 1979. 832 с.
12. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение: пер. с англ. М.: Мир, 1998. 575 с.
13. Зверев В. Г., Гольдин В. Д., Несмелов В. В., Цимбалюк А. Ф. Моделирование тепло- и массопереноса во вспучивающихся огнезащитных покрытиях // Физика горения и взрыва. 1998. Т. 34, № 2. С. 90 – 98.
14. Страхов В. Л., Крутов А. М., Давыдкин Н. Ф. Огнезащита строительных конструкций. М.: Информ.-издат. центр “ТИМР”, 2000. Т. 2. 432 с.

*Статья поступила в редакцию 7 июля 2010 г.*