

19. Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д. О распространении волн в упруговязкопластической среде. — Инж. журн., МТТ, 1966, № 4.  
 20. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971.  
 21. Баулин Н. Н. Пьезоэлектрический преобразователь для измерения больших переменных давлений. — ПТЭ, 1978, № 5.

УДК 539.376

## О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

И. Ю. Цвелодуб, А. А. Шваб

(Новосибирск)

В последнее время метод малого параметра нашел широкое применение при решении ряда сложных упругопластических задач. При этом исходят из известного аналитического решения более простых (плоских, осесимметричных, центрально-симметричных) задач и путем выделения некоторых малых величин ищут решения вблизи этих известных состояний. Большое количество таких задач приведено в [1]. Однако в теории ползучести указанный метод не получил большого распространения, что объясняется отсутствием точных аналитических решений даже для простейших задач. Исключение составляет случай установившейся ползучести, когда упругими деформациями пренебрегают, а скорости деформаций ползучести определяются только напряженным состоянием и не зависят от истории нагружения [2]. Решение задач по данной схеме эквивалентно решению с использованием уравнений физически нелинейной упругости. Некоторые из таких задач также рассмотрены в [1]. Учет упругих деформаций и учет истории нагружения приводят к существенным усложнениям, не позволяющим получить аналитические решения. Поэтому для решения таких задач применяются известные численные методы (конечных разностей, конечных элементов). Однако использование последних связано со значительными трудностями при отладке программ и с большим объемом вычислений. С другой стороны, решение указанных задач можно получить, применяя метод малого параметра и простейшие численные процедуры на ЭВМ (например, вычисление определенных интегралов).

В качестве примера рассмотрим задачу о деформировании цилиндрической трубы с внутренним и внешним радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , находящейся в начальный момент в естественном состоянии, при плоской деформации и следующих граничных условиях:

$$\sigma_r(R_1) = \sigma_{r\theta}(R_1) = 0, \quad \sigma_r(R_2) = P(1 - \delta \cos 2\theta), \quad \sigma_{r\theta}(R_2) = P\delta \sin 2\theta,$$

где  $\sigma_r$ ,  $\sigma_{r\theta}$  — радиальное и касательное напряжения;  $P$ ,  $\delta$  — константы ( $0 < \delta < 1$ );  $\theta$  — угол полярной системы координат. Заметим, что при  $R_2 \rightarrow \infty$  указанные условия соответствуют растяжению бесконечной плоскости с круговым отверстием, свободным от нагрузок, двумя взаимно перпендикулярными усилиями, приложенными на бесконечности [1]. Материал трубы будем считать изотропным вязкоупругим и несжимаемым как по упругим, так и по вязким деформациям, для которого тензор деформаций представим в виде суммы тензоров упругих деформаций и деформаций ползучести; вследствие чего получим [1]

$$(1) \quad \varepsilon_{\theta} = \varepsilon_r = \frac{3}{4} \frac{u}{E} + \varepsilon_{\theta}^c, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{3}{4} \frac{v}{E} + \varepsilon_{r\theta}^c,$$

где  $u = \sigma_{\theta} - \sigma_r$ ;  $v = 2\sigma_{r\theta}$ ;  $\sigma_{\theta}$  — окружное напряжение;  $\varepsilon_{\theta}^c$ ,  $\varepsilon_{r\theta}^c$  — окружная и касательная компоненты деформации ползучести;  $E$  — модуль Юнга. Для простоты будем предполагать, что компоненты скорости деформации определяются только компонентами напряжений и являются степенными функциями последних [1, 2]:

$$(2) \quad \dot{\varepsilon}_{\theta} = \dot{\varepsilon}_r = \frac{3}{4} B (u^2 + v^2)^{\frac{n-1}{2}} u, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta} = \dot{\varepsilon}_{r\theta}^c = \frac{3}{4} B (u^2 + v^2)^{\frac{n-1}{2}} v,$$

где  $B$ ,  $n$  — константы ползучести.

В качестве малого параметра выберем величину  $\delta$ . В дальнейшем все компоненты напряжений отнесем к величине  $P$ , компоненты деформаций — к  $(3/4)P/E$ , сохранив за ними прежние обозначения, и введем безразмерный радиус  $r$ , отнесенный к  $R_2$ .

Рассмотрим нулевое приближение, соответствующее осесимметричному состоянию трубы при  $\delta = 0$ . Считаем, что в момент времени  $t = 0$  деформации ползучести отсутствуют. Очевидно, что в этом случае  $\sigma_{r\theta}^{(0)} = 0$ . Процедура счета состоит в следующем [3]. Предположим, что на некоторый момент времени  $t_k$  известно распределение деформации ползучести  $\varepsilon_{\theta}^{(0)c}$  по радиусу  $r$  (при  $t = 0$   $\varepsilon_{\theta}^{(0)c} = 0$  всюду в трубе). Из условий плоской деформации и несжимаемости следует, что  $\varepsilon_{\theta}^{(0)} = u^{(0)} + \varepsilon_{\theta}^{(0)c} = \frac{A_1}{r^2}$ ,

откуда  $u^{(0)} = \frac{A_1}{r^2} - \varepsilon_{\theta}^{(0)c}$ ,  $A_1$  — константа. Из уравнения равновесия  $\sigma_r^{(0)'} = u^{(0)}/r$  (штрих здесь и в дальнейшем обозначает производную по координате  $r$ ) получим

$$(3) \quad \sigma_r^{(0)} = -\frac{A_1}{2r^2} - \int_{\alpha}^r \frac{\varepsilon_{\theta}^{(0)c}}{r} dr + A_2,$$

где  $\alpha = R_1/R_2$ , откуда

$$(4) \quad \sigma_{\theta}^{(0)} = u^{(0)} + \sigma_r^{(0)} = \frac{A_1}{2r^2} - \varepsilon_{\theta}^{(0)c} - \int_{\alpha}^r \frac{\varepsilon_{\theta}^{(0)c}}{r} dr + A_2.$$

Константы  $A_1$  и  $A_2$  определяются из граничных условий  $\sigma_r^{(0)}(\alpha) = 0$ ,  $\sigma_r^{(0)}(1) = 1$ :

$$(5) \quad A_1 = \frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2} \left( \frac{1}{2} + \int_{\alpha}^1 \frac{\varepsilon_{\theta}^{(0)c}}{r} dr \right), \quad A_2 = \frac{A_1}{2\alpha^2}.$$

Считая найденное напряженное состояние (3)—(5) неизменным в течение времени  $\Delta t$ , находим распределение деформаций  $\varepsilon_{\theta}^c$  на момент  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ :  $\varepsilon_{\theta}^{(0)c}(t_{k+1}) = \varepsilon_{\theta}^{(0)c}(t_k) + \dot{\varepsilon}_{\theta}^{(0)c}(t_k) \Delta t$ , где  $\dot{\varepsilon}_{\theta}^{(0)c}$  определяется согласно (2). Далее процедура счета повторяется. Таким образом, на любой момент времени в нулевом приближении будут известны распределения  $\sigma_r^{(0)}$ ,  $\sigma_{\theta}^{(0)}$  и  $\varepsilon_{\theta}^{(0)c}$  по радиусу  $r$ . Искомые напряжения представляем в виде рядов по параметру  $\delta$ :

$$(6) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^{(0)} + \delta\sigma_r^{(1)} + \delta^2\sigma_r^{(2)} + \dots, \\ \sigma_{\theta} &= \sigma_{\theta}^{(0)} + \delta\sigma_{\theta}^{(1)} + \delta^2\sigma_{\theta}^{(2)} + \dots, \quad \sigma_{r\theta} = \delta\sigma_{r\theta}^{(1)} + \delta^2\sigma_{r\theta}^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

Тогда на основании (1), (2) и (6) получим для первого приближения по деформациям

$$(7) \quad \varepsilon_{\theta}^{(1)} = u_1^{(1)} + \varepsilon_{\theta}^{(1)c}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(1)} = v_1^{(1)} + \varepsilon_{r\theta}^{(1)c},$$

где скорости деформаций ползучести определяются следующим образом:

$$(8) \quad \dot{\varepsilon}_{\theta}^{(1)c} = A n u^{(0)n-1} u_1^{(1)}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)c} = A u^{(0)n-1} v_1^{(1)}, \quad A = EBP^{n-1}.$$

Для любого приближения должны выполняться уравнения равновесия [1]

$$(9) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

и уравнение совместности деформаций, которое для рассматриваемого слу-

чая несжимаемой среды при плоской деформации примет вид

$$(10) \quad r^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} + 3r \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial \theta^2} = 2 \left( \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} + r \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} \right).$$

Исключая из (9) величину  $(\sigma_r + \sigma_\theta)/2$ , имеем

$$(11) \quad r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + 3r \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = -2 \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + r \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \right).$$

Решение будем искать в виде

$$(12) \quad \sigma_r^{(1)} = \sigma_{r1}^{(1)}(r, t) \cos 2\theta, \quad \sigma_\theta^{(1)} = \sigma_{\theta 1}^{(1)} \cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta 1}^{(1)}(r, t) \sin 2\theta.$$

Тогда для деформаций ползучести первого приближения получим

$$(13) \quad \varepsilon_\theta^{(1)c} = \varepsilon_{\theta 1}^{(1)c}(r, t) \cos 2\theta, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(1)c} = \varepsilon_{r\theta 1}^{(1)c}(r, t) \sin 2\theta, \\ u_1^{(1)} = u^{(1)} \cos 2\theta, \quad v_1^{(1)} = v^{(1)} \sin 2\theta.$$

Подставляя (12), (13) в (10), (11), найдем с учетом (7)

$$(14) \quad r^2 u^{(1)''} + 3ru^{(1)'} + 4u^{(1)} - 4v^{(1)} - 4rv^{(1)'} = f(r, t), \\ r^2 v^{(1)''} + 3rv^{(1)'} + 4v^{(1)} - 4u^{(1)} - 4ru^{(1)'} = 0,$$

где  $f(r, t) = 4(\varepsilon_{r\theta 1}^{(1)c} + r\varepsilon_{r\theta 1}^{(1)c'}) - \varepsilon_{\theta 1}^{(1)c} - 4\varepsilon_{\theta 1}^{(1)c} - 3r\varepsilon_{\theta 1}^{(1)c}$ .

Заметим, что величины  $u^{(1)}$  и  $v^{(1)}$ , входящие в (14), зависят только от  $r$  и  $t$ .

Предположим, что на момент времени  $t_k$  известно распределение деформаций  $\varepsilon_\theta^{(1)c}$  и  $\varepsilon_{r\theta}^{(1)c}$  по радиусу трубы (при  $t = 0$   $\varepsilon_\theta^{(1)c} = \varepsilon_{r\theta}^{(1)c} = 0$ ). Интегрируя систему (14) и приводя несложные, но достаточно громоздкие преобразования, получим

$$(15) \quad [u^{(1)}] = F^{(1)} - \Phi^{(1)} + 2c_1^{(1)} + 2c_2^{(1)}r^2 + 2c_3^{(1)}r^{-4} - 2c_4^{(1)}r^{-2}, \\ v^{(1)} = \Phi^{(1)} + 2c_1^{(1)} + 2c_2^{(1)}r^2 - 2c_3^{(1)}r^{-4} + 2c_4^{(1)}r^{-2},$$

где  $F^{(1)}(r) = 4r^2 \left[ \int_{\alpha}^r \frac{1}{r^3} \left( \int_{\alpha}^r \frac{\varepsilon_{r\theta 1}^{(1)c} - \varepsilon_{\theta 1}^{(1)c}}{r} dr \right) dr + \int_{\alpha}^r \frac{\varepsilon_{r\theta 1}^{(1)c} - \varepsilon_{\theta 1}^{(1)c}}{r^3} dr \right] - \varepsilon_{\theta 1}^{(1)c}$ ;

$$\Phi^{(1)}(r) = \frac{4}{r^2} \left[ \int_{\alpha}^r rF(r) dr - 3 \int_{\alpha}^r \left( \frac{1}{r^3} \int_{\alpha}^r r^3 F(r) dr \right) dr \right].$$

Из (15), (9) можно найти  $\sigma_{r1}^{(1)}(r)$  на момент  $t_k$ , и окончательно будем иметь

$$(16) \quad \sigma_{r1}^{(1)} = \Psi^{(1)} - c_1^{(1)} - c_3^{(1)}r^{-4} + 2c_4^{(1)}r^{-2}, \\ \sigma_{\theta 1}^{(1)} = \sigma_{r1}^{(1)} + u^{(1)}, \quad \sigma_{r\theta 1}^{(1)} = \Phi^{(1)}/2 + c_1^{(1)} + c_2^{(1)}r^2 - c_3^{(1)}r^{-4} + c_4^{(1)}r^{-2},$$

$$\text{где } \Psi^{(1)}(r) = \int_{\alpha}^r \frac{F^{(1)}(r) - 2\Phi^{(1)}(r)}{r} dr.$$

Константы  $c_1^{(1)}$ ,  $c_2^{(1)}$ ,  $c_3^{(1)}$  и  $c_4^{(1)}$  определяются из граничных условий, которые в данном случае имеют вид

$$\sigma_{r1}^{(1)}(\alpha) = \sigma_{r\theta 1}^{(1)}(\alpha) = 0, \quad \sigma_{r1}^{(1)}(1) = -1, \quad \sigma_{r\theta 1}^{(1)}(1) = 1.$$

Считая найденное напряженное состояние (15), (16) неизменным в течение времени  $\Delta t$ , из (8) находим распределение деформаций ползучести на момент  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ :  $\varepsilon_\theta^{(1)c}(t_{k+1}) = \varepsilon_\theta^{(1)c}(t_k) + \dot{\varepsilon}_\theta^{(1)c}(t_k) \Delta t$ ,  $\varepsilon_{r\theta}^{(1)c}(t_{k+1}) = \varepsilon_{r\theta}^{(1)c}(t_k) + \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)c}(t_k) \Delta t$ . Затем процедура счета повторяется.

Используя методику, аналогичную описанной в [1], после несложных преобразований можно получить для второго приближения по деформациям

$$(17) \quad \varepsilon_{\theta}^{(2)} = u^{(2)} + \varepsilon_{\theta}^{(2)c}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(2)} = v^{(2)} + \varepsilon_{r\theta}^{(2)c},$$

где скорости деформаций ползучести определяются следующим образом:

$$(18) \quad \dot{\varepsilon}_{\theta}^{(2)c} = Anu^{(0)n-2}u^{(2)} + \frac{A(n-1)}{4}u^{(0)n-2}[nu^{(1)2} + v^{(1)2} + \\ + (nu^{(1)2} - v^{(1)2}) \cos 4\theta], \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)c} = \frac{A(n-1)}{2}u^{(0)n-2}u^{(1)}v^{(1)} \sin 4\theta.$$

Учитывая (17), (18), будем искать решение для второго приближения в виде суммы осесимметричного и неосесимметричного состояний:

$$\sigma_r^{(2)} = \sigma_{r1}^{(2)}(r, t) + \sigma_{r11}^{(2)}(r, t) \cos 4\theta, \quad \sigma_{\theta}^{(2)} = \sigma_{\theta 1}^{(2)}(r, t) + \sigma_{\theta 11}^{(2)}(r, t) \cos 4\theta, \\ \sigma_{r\theta}^{(2)} = \sigma_{r\theta 1}^{(2)}(r, t) \sin 4\theta, \quad \varepsilon_{\theta}^{(2)} = \varepsilon_{\theta 1}^{(2)}(r, t) + \varepsilon_{\theta 11}^{(2)}(r, t) \cos 4\theta, \\ \varepsilon_{r\theta}^{(2)} = \varepsilon_{r\theta 1}^{(2)}(r, t) \sin 4\theta$$

при следующих граничных условиях:  $\sigma_{r1}^{(2)} = \sigma_{r11}^{(2)} = \sigma_{r\theta 1}^{(2)} = 0$  ( $r = \alpha$  и  $r = 1$ ). Не останавливаясь на громоздких выкладках, приведем окончательные формулы для напряжений второго приближения, аналогичные (3)–(5) и (15), (16):

$$(19) \quad \sigma_{r1}^{(2)} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \left( \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{r^2} \right) \int_{\alpha}^1 \frac{\varepsilon_{\theta 1}^{(2)c}}{r} dr - \int_{\alpha}^r \frac{\varepsilon_{\theta 1}^{(2)c}}{r} dr, \\ \sigma_{\theta 1}^{(2)} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \left( \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{r^2} \right) \int_{\alpha}^1 \frac{\varepsilon_{\theta 1}^{(2)c}}{r} dr - \int_{\alpha}^r \frac{\varepsilon_{\theta 1}^{(2)c}}{r} dr - \varepsilon_{\theta 1}^{(2)c}, \\ \sigma_{r11}^{(2)} = \Psi^{(2)} + c_1^{(2)}r^2 - c_2^{(2)}r^4 - c_3^{(2)}r^{-6} + \frac{3}{2}c_2^{(2)}r^{-4}, \\ \sigma_{\theta 11}^{(2)} = F^{(2)} - \Phi^{(2)} + \Psi^{(2)} + c_1^{(2)}r^2 + \frac{3}{2}c_2^{(2)}r^4 + c_3^{(2)}r^{-6} - \frac{r^{\frac{3}{2}}}{2}r^{-4}, \\ \sigma_{r\theta 1}^{(2)} = \frac{1}{2}\Phi^{(2)} + c_1^{(2)}r^2 + c_2^{(2)}r^4 - c_3^{(2)}r^{-6} + c_4^{(2)}r^{-4},$$

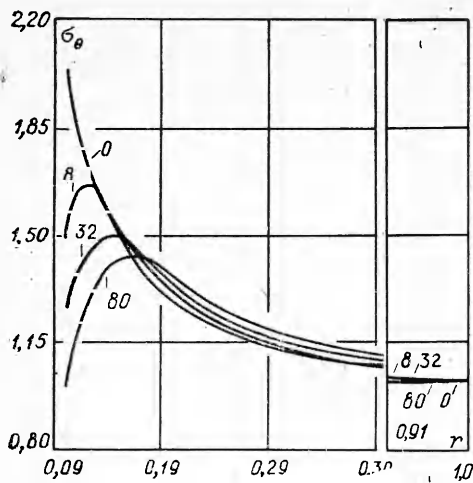
$$\text{где } F^{(2)}(r) = 8r^4 \left[ 3 \int_{\alpha}^r \frac{1}{r^3} \left( \int_{\alpha}^r \frac{\varepsilon_{r\theta 1}^{(2)c} - \varepsilon_{\theta 11}^{(2)c}}{r^3} dr \right) dr + \int_{\alpha}^r \frac{\varepsilon_{r\theta 1}^{(2)c} - \varepsilon_{\theta 11}^{(2)c}}{r^5} dr \right] - \varepsilon_{\theta 11}^{(2)c};$$

$$\Phi^{(2)}(r) = -\frac{8}{r^4} \left[ 5 \int_{\alpha}^r \frac{1}{r^3} \left( \int_{\alpha}^r r^5 F^{(2)}(r) dr \right) - \int_{\alpha}^r r^3 F^{(2)}(r) dr \right]; \quad \Psi^{(2)}(r) = \\ = \int_{\alpha}^r \frac{F^{(2)}(r) - 3\Phi^{(2)}(r)}{r} dr.$$

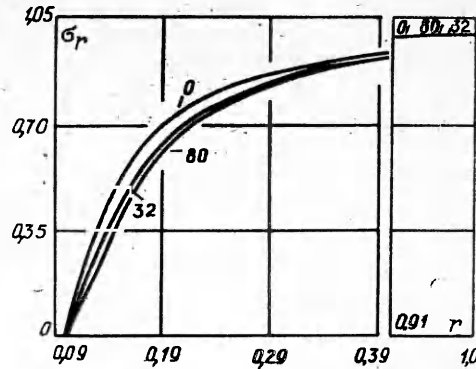
Константы  $c_1^{(2)}$ ,  $c_2^{(2)}$ ,  $c_3^{(2)}$  и  $c_4^{(2)}$  находятся из указанных граничных условий. Аналогичным путем можно получить и любые последующие приближения.

При расчете было принято  $A = EBP^{n-1} = 0,827\text{ч}^{-1}$ ,  $n = 7$ ,  $\alpha = 0,1$ ,  $\delta = 0,08$ ,  $\Delta t = 0,08$  ч. Все интегралы, входящие в (3)–(5), (16), (15) и (19), вычислялись с использованием известной формулы Симпсона. При этом число точек разбиения по радиусу полагалось равным 100, т. е. шаг интегрирования  $\Delta r = 0,009$ . Результаты счета представлены на фиг. 1–5.

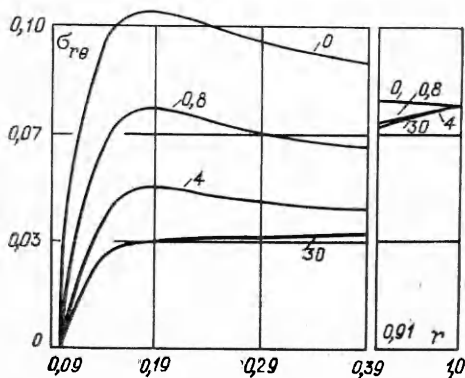
Так, на фиг. 1–3 приведены эпюры напряжений  $\sigma_{\theta}$ ,  $\sigma_r$  и  $\sigma_{r\theta}$  соответственно на различные моменты времени, указанные на графиках числами, при значении угла  $\theta = \pi/4$ . На фиг. 4, 5 представлены эпюры напряжения  $\sigma_{\theta}$  на моменты времени 0; 80 ч соответственно при  $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ . Из фиг. 1–3 видно, что наиболее интенсивное перераспределение напряжений  $\sigma_{\theta}$  и  $\sigma_{r\theta}$  происходит в начальный период времени (0–32 ч)



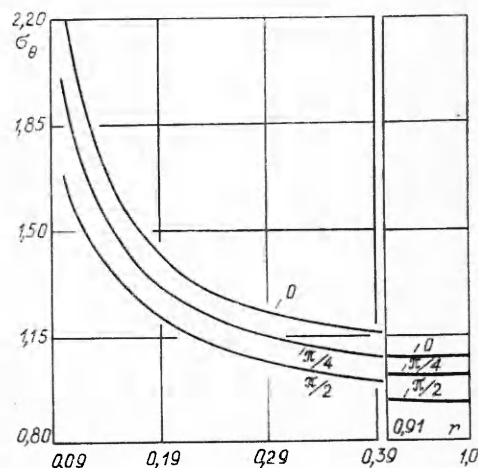
Ф и г. 1



Ф и г. 2



Ф и г. 3

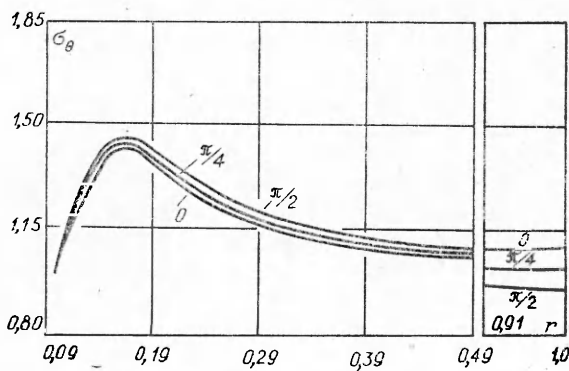


Ф и г. 4

около внутреннего отверстия трубы. С течением времени, как можно видеть из фиг. 4, 5, происходит перераспределение напряжения  $\sigma_\theta$  в сторону сближения его величины при различных значениях угла  $\theta$ .

Как показывает расчет, учет второго приближения практически не влияет на картину распределений и перераспределений напряжений — максимальная относительная погрешность по напряжениям между первым и вторым приближениями не превосходит 0,2%.

В рассмотренном выше примере в качестве малого параметра бралась величина, характеризующая возмущение граничных условий в напряже-



Ф и г. 5

ниях. Очевидно, можно рассмотреть случай возмущения геометрических краевых условий, а также тех и других одновременно. Это позволит решить достаточно большой класс задач, аналогичных рассмотренным в [1] в унругопластической постановке. При этом за основу следует брать решение (3)—(5) для напряжений, соответствующее осесимметричному состоянию.

Поступила 12 I 1981

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
3. Горев Б. В., Цвелодуб И. Ю. Применение энергетических уравнений ползучести к расчету толстостенной цилиндрической трубы. — В сб.: Динамика сплошной среды. Вып. 17. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.

УДК 539.3

## ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СРЕДЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СДВИГОВЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

В. А. Баскаков

(Воронеж)

Рассматривается задача о взаимодействии сдвиговых ударных волн в пластически несжимаемой упругопластической среде с упрочнением. В рамках теории малых упругопластических деформаций математическая модель среды предполагает их аддитивность:  $e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p$  (слева — направо соответственно полные, упругие и пластические деформации). Напряженно-деформированное состояние материала определяется в окрестности точки взаимодействия, в которой на достаточно далеком расстоянии от источников возмущения фронты исходных волн  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  можно считать плоскими, образующими угол  $0 < 2\alpha < \pi$  (см. фигуру). Оси  $x_1, x_2, x_3$  ортогональны. Все искомые величины считаются не зависящими от  $x_3$ ; перед фронтами волн  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  среда находится в свободном состоянии:  $\sigma_{ij}^{(0)} = e_{ij}^{(0)} = u_i^{(0)} = 0$  ( $\sigma_{ij}, u_i$  — соответственно компоненты тензора напряжений и перемещений,  $i, j = 1, 2, 3$ ). Индексом в круглых скобках наверху обозначаются номера зон, на которые разбивается пространство фронтами волн.

Модель среды предполагает учет двух механизмов упрочнения [1]: кинематического и изотропного. С использованием методики [2—4] строятся сначала упругое, а затем упругопластическое автомодельные решения задачи. В процессе взаимодействия волн могут образовываться как бездиссипативные области деформирования материала (упругие, нейтральные), так и области пластического течения. В бездиссипативных областях изменение напряжений и деформаций определяется упругими зависимостями, в то время как в пластических областях следует воспользоваться уравнением поверхности нагружения и ассоциированным законом пластического течения.

Отметим, что в [5] решалась аналогичная задача о взаимодействии безвихревых ударных волн в упругопластическом пространстве с упрочнением.

Рассмотрим, не конкретизируя пока тип волн, взаимодействие двух ударных фронтов, имеющих вид ступеньки. Этот случай примечателен тем, что он дает некоторые представления о характере распространения волн более общего вида и приближение для начального момента времени, необходимое для решения общей задачи. При этом может оказаться, что бездиссипативная область в результате взаимодействия волн заполняет все пространство. В системе координат  $x = x_1 - St, y = x_2$  поле напряжений, скоростей и деформаций будет тогда стационарным за фронтами исходных волн и решение можно считать автомодельным, т. е. можно положить, что все искомые величины зависят только от  $\xi \equiv \xi = \text{ctg } \varphi = xy^{-1}$ , где  $\varphi$  — угол, отсчитываемый от положительного направления оси  $x$  против хода часовой стрелки ( $S$  — скорость подвижной системы координат, связанной с точкой взаимодействия волн). Как

