

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ДВУМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

О. В. Капцов

Вычислительный центр СО РАН, 660036 Красноярск

Найдены новые типы плоских стационарных вихревых образований в идеальной жидкости. Эти структуры описываются точными решениями уравнения для функции тока. Данное уравнение является эллиптическим аналогом известного нелинейного волнового уравнения Буллафа — Додда — Жибера — Шабата. Устойчивость по Ляпунову некоторых решений следует из теоремы Арнольда.

Вихревые структуры, представляющие несомненный самостоятельный интерес, привлекают к себе дополнительное внимание в связи с изучением крупномасштабных образований в турбулентных движениях. В последние десять лет был найден ряд представлений для таких структур в жидкости и плазме [1–4]. В случае плоских стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости получены точные решения уравнений для функции тока

$$\Delta\psi = \omega(\psi). \quad (1)$$

Наибольший прогресс был достигнут в исследовании уравнений (1) с правыми частями $\sin\psi$, $\text{sh}\psi$. Это связано с тем, что гиперболические аналоги этих уравнений достаточно хорошо изучены методом Хироты, обратной задачи рассеяния и конечнозонного интегрирования. Среди других нелинейных волновых моделей особое место занимает уравнение Буллафа — Додда — Жибера — Шабата. Следует, однако, упомянуть, что в начале века данное уравнение рассматривалось в работах по дифференциальной геометрии [5]. Несмотря на это, формула для N -солитонного решения в литературе отсутствовала.

В данной работе вихревым структурам соответствуют решения уравнения

$$\Delta\psi = \delta \exp(\psi) - \exp(-2\psi), \quad \delta = \pm 1. \quad (2)$$

Для построения решений уравнения (2) выполним замену $\psi = \ln(\delta u)$ и будем искать u в виде $u = h/g$. В теории солитонов [6] такое представление решений является типичным. Как правило, функции h , g записываются в виде конечного числа слагаемых типа $r_i \exp(a_i x + b_i y)$, где r_i , a_i , b_i — некоторые коэффициенты. Основная трудность заключается в нахождении этих коэффициентов. Попытка получить формулы для коэффициентов предпринималась в работе [7].

Для нахождения функций h , g используем систему билинейных уравнений

$$h^2 \Delta(\ln h) = h^2 - g^2. \quad (3)$$

$$g^2 \Delta(\ln g) = -hg + g^2, \quad (4)$$

каждое решение которой порождает решение уравнения (2) при $hg \neq 0$. В этом легко убедиться, если разделить (3) на h^2 , (4) на g^2 и взять разность полученных выражений.

Полагая $g = \tau^2$, из уравнения (4) находим представления для h и u :

$$h = \tau^2 - 2(\tau \Delta(\tau) - (\nabla \tau)^2), \quad u = 1 - 2\Delta(\ln \tau). \quad (5)$$

Подставляя найденное выражение для h в (3), получаем уравнение на функцию τ . Обозначим это уравнение через H , оно является аналогом известных билинейных уравнений для τ -функции в формализме Хироты [6]. Отличие заключается в том, что в данном случае уравнение H трилинейно и весьма громоздко. Отметим, что в отличие от подхода, предложенного в [7], для построения решений уравнения (2) нужно находить одну функцию τ . Однако наиболее важным является тот факт, что частные решения уравнения H имеют ту же структуру, что и N -солитонные решения билинейных уравнений Хироты [6]. Например, прямой подстановкой несложно убедиться в том, что функция $\tau_1 = 1 + s \exp(kx \pm \sqrt{3 - k^2}y)$, $s, k \in R$ удовлетворяет уравнению H .

Руководствуясь аналогией с формулами для двухсолитонных решений, можно искать точное решение уравнения H в виде

$$\tau_2 = 1 + f_1 + f_2 + p_{12}f_1f_2, \tag{6}$$

где

$$f_i = s_i \exp(k_i x \pm \sqrt{3 - k_i^2}y), \quad s_i, k_i \in R, \tag{7}$$

величина p_{12} подлежит определению. Подставляя τ_2 в уравнение H , получаем многочлен относительно f_1, f_2 . Приравнявая к нулю коэффициент многочлена при $f_1^3 f_2^3$, находим

$$p_{12} = \frac{4m_1 m_2 k_1 k_2 - 9m_1 m_2 + 4k_1^2 k_2^2 - 6k_1^2 - 6k_2^2 + 27}{4m_1 m_2 k_1 k_2 + 9m_1 m_2 + 4k_1^2 k_2^2 - 6k_1^2 + 9k_1 k_2 - 6k_2^2 + 27}, \tag{8}$$

где $m_i^2 = 3 - k_i^2$. Затем проверяем, что τ_2 с найденным значением p_{12} удовлетворяет H .

Теперь естественно предположить, что стандартные формулы для N -солитонных решений [6] имеют место и в данном случае. При небольших N возможна непосредственная проверка с помощью системы аналитических вычислений REDUCE, в общем случае необходимо обосновывать N -солитонную формулу методом математической индукции. Для полноты изложения приведем решения τ_3 и τ_4 :

$$\begin{aligned} \tau_3 &= 1 + f_1 + f_2 + p_{12}f_1f_2 + p_{13}f_1f_3 + p_{23}f_2f_3 + p_{12}p_{13}p_{23}f_1f_2f_3, \\ \tau_4 &= 1 + \sum_{1 \leq i \leq 4} f_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} p_{ij}f_i f_j + \sum_{1 \leq i < j < l \leq 4} p_{ij}p_{il}p_{jl}f_i f_j f_l + p_{12}p_{13}p_{14}p_{24}p_{34}f_1 f_2 f_3 f_4, \end{aligned} \tag{9}$$

где f_i заданы равенством (7), p_{ij} — формулой (8) с заменой индексов 1 и 2 на i и j .

Кроме приведенных выше решений τ_i , существуют и другие, которые также выражаются через элементарные функции. Для построения таких решений удобно использовать дифференциальные связи специального вида. Заметим, что решение (6) удовлетворяет линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$d_x(d_x - k_1)(d_x - k_2)(d_x - k_1 - k_2)\tau = 0; \tag{10}$$

$$d_y(d_y - m_1)(d_y - m_2)(d_y - m_1 - m_2)\tau = 0 \tag{11}$$

(d_x, d_y — производная по x и y , $m_i^2 = 3 - k_i^2$). Оказывается, существуют решения уравнений (10), (11), которые являются решениями уравнения H и не совпадают с (6).

Приведем два примера. Если $k_1 = k_2 = 0$, то функция

$$1 + r_1 x \exp(\sqrt{3}y) + (r_1/6)^2 \exp(2\sqrt{3}y), \quad r_1 \in R$$

удовлетворяет уравнениям (10), (11) и H . При $k_1 = k_2 = \sqrt{3}/2$ решением этих уравнений является функция

$$1 + r_1 \exp(x\sqrt{3}/2 + 3y/2) + r_2 \exp(\sqrt{3}x), \tag{12}$$

где r_1, r_2 — произвольные постоянные.

Построение такого типа примеров проводится следующим образом. Сначала находится общее решение уравнений (10), (11), которое содержит некоторые произвольные постоянные. Затем подставляя найденное общее решение в уравнение H , получаем дополнительные условия на константы.

Несложно выписать дифференциальные связи, которым удовлетворяют функции τ_n . При произвольном n эти связи имеют вид

$$d_x \prod_{1 \leq p \leq n} \left(\prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} (d_x - k_{i_1} - k_{i_2} - \dots - k_{i_p}) \right) \tau = 0,$$

$$d_y \prod_{1 \leq p \leq n} \left(\prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} (d_y - m_{i_1} - m_{i_2} - \dots - m_{i_p}) \right) \tau = 0,$$

где \prod — произведение; $m_{i_j}^2 = 3 - k_{i_j}^2$; k_{i_j} — любые константы. Приведенные выше связи также можно использовать для построения решений.

Перейдем к построению вихревых структур. Функции u_i , соответствующие найденным солитонным решениям τ_i , вычисляются согласно (5). Линии уровня функций u_i ($i = 2, 3, 4$) представлены соответственно на рис. 1–3. Двум более толстым линиям соответствуют значения функций u_i , равные 0 и -1 . Изолинии, представленные на рис. 1, получены при значениях констант $s_1 = s_2 = 1$, $k_1 = 1,25$, $k_2 = 1$; на рис. 2 — $s_1 = s_2 = s_3 = 1$, $k_1 = 1,25$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0,5$; на рис. 3 — $s_i = 1$ ($i = 1, \dots, 4$), $k_1 = 1$, $k_2 = 0,8$, $k_3 = 1,4$, $k_4 = 1,6$.

Для каждой функции u_i рассмотрим на плоскости течения два множества

$$L_n = \{(x, y): u_i(x, y) < 0\}, \quad L_p = \{(x, y): u_i(x, y) > 0\}.$$

Линии уровня, лежащие в L_n или L_p , совпадают с линиями тока, поэтому рис. 1–3 представляют картины течений на плоскости $R^2(x, y)$. Если множество

$$S_{ab} = \{(x, y): -1 < a \leq u_i(x, y) \leq b < 0\}$$

является компактным (это достигается выбором чисел a, b), то принимая его границу за твердые стенки, можно утверждать, что в этом случае течение на S_{ab} устойчиво по отношению к двумерным возмущениям. Действительно, на множестве S_{ab} при некоторых положительных числах A и B справедливы следующие соотношения:

$$A \leq \omega'(\psi) = \delta \exp(\psi) + 2 \exp(-2\psi) \leq B.$$

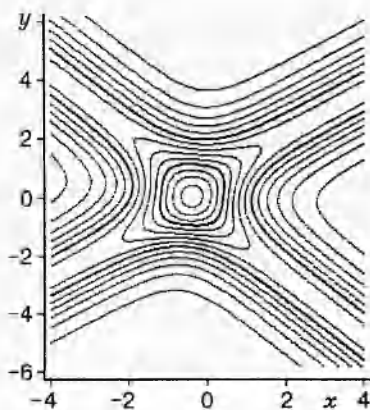


Рис. 1

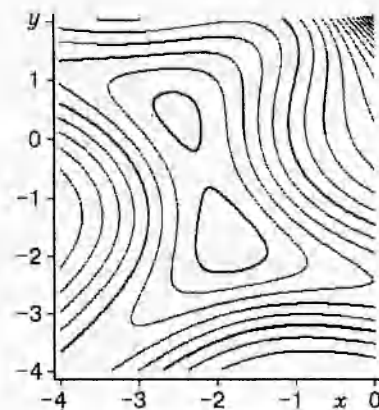


Рис. 2

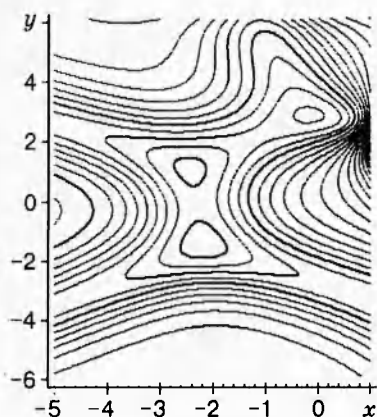


Рис. 3

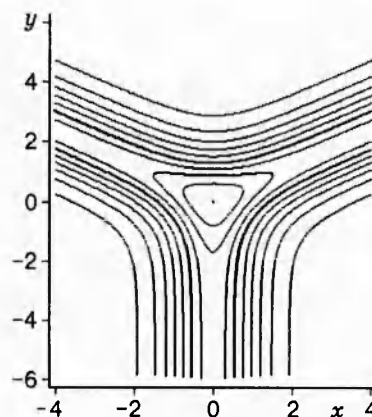


Рис. 4

Таким образом, выполнены условия теоремы Арнольда [8] об устойчивости решений по отношению к двумерным возмущениям. Вихревая структура, соответствующая решению (12), представлена на рис. 4 ($r_1 = r_2 = 1$).

Работа выполнена в рамках интеграционного проекта СО РАН № 43 «Исследование поверхностных и внутренних гравитационных волн в жидкости», поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00047).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994.
2. Мовсисянц Ю. Б. Солитоны в двумерной гидродинамической модели холодной плазмы // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 493–499.
3. Шанько Ю. В. О точных решениях осесимметричных уравнений Эйлера // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 1. С. 438–442.
4. Ting A. C., Chen H. H., Lee Y. C. Exact solutions of nonlinear boundary value problem: the vortices of the two-dimensional Sinh-Poisson equation // Physica D. 1987. V. 26. P. 37–66.
5. Tzitzeica G. Sur une nouvelle classe de surfaces // C. R. Acad. Sci. 1910. Т. 150. P. 955–956.
6. Solitons / R. K. Bullough, P. J. Caudrey (Eds). Berlin: Springer-Verlag, 1980.
7. Марков Ю. А. Об одном классе точных решений кинетической модели равновесия плазмы // Теорет. и мат. физика. 1992. Т. 91, № 1. С. 129–141.
8. Арнольд В. И. Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости // Изв. вузов. Математика. 1966. Т. 54, № 5. С. 3–5.

Поступила в редакцию 18/XI 1996 г.