

УДК 532.5

## ЗАДАЧА О РАСПАДЕ РАЗРЫВА МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЕ. ПЕРВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

П. Е. Карабут, В. В. Остапенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
630090 Новосибирск  
E-mails: karabutp@mail.ru, ostapenkovv@ngs.ru

Предложен метод приближенного решения задачи о распаде разрыва малой амплитуды в случае строго гиперболической системы законов сохранения, имеющей линейно вырожденные характеристические поля. С помощью этого метода проведен анализ качественно различных режимов течения, возникающих при решении задачи о распаде разрыва малой амплитуды для модели двухслойной мелкой воды со свободной верхней границей. Наиболее подробно изучен частный случай — задача о разрушении плотины.

**Ключевые слова:** двухслойная мелкая вода, задача о распаде разрыва, задача о разрушении плотины, гиперболические системы, метод последовательных приближений.

**Введение.** В работе [1] выведены и проанализированы три дифференциальные модели двухслойной мелкой воды: модель I, описывающая движение жидкости в горизонтальном прямоугольном канале со свободной верхней границей, модель II, описывающая движение жидкости в горизонтальном прямоугольном канале “под крышкой”, и модель III, являющаяся предельным случаем моделей I и II, когда отношение плотностей жидкости в слоях стремится к единице. Поскольку для всех трех моделей построены области гиперболичности, в которых допускаются разрывные решения, была поставлена задача сформулировать эти модели в виде полных систем законов сохранения [2–6] и изучить допускаемые этими системами устойчивые разрывные решения с прерывными волнами.

В работе [7] предложен критерий корректности полной системы законов сохранения, предполагающий максимальную согласованность области выпуклости замыкающего закона сохранения [2] с областью гиперболичности дифференциальной модели. На основе этого критерия для модели двухслойной мелкой воды со свободной верхней границей получена корректная полная система законов сохранения, в которую в качестве базисных законов входят законы сохранения массы в слоях, полного импульса и скачка скорости на границе раздела слоев, а в качестве замыкающего — закон сохранения полной энергии (такая же полная система возникает в предельных случаях моделей вихревой мелкой воды, рассмотренных в [8, 9]). В [10] изучены устойчивые прерывные волны, допускаемые этой системой.

Для подтверждения того, что предложенная полная система законов сохранения правильно описывает прерывные волны в реальных течениях, необходимо провести сравнительный анализ решений задачи о распаде разрыва (прежде всего ее важнейшего частного

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 09-01-98001, 10-01-00338) и в рамках проектов фундаментальных исследований Президиума РАН № 16.7 и Президиума СО РАН № 23.

случая, наиболее простого при реализации в эксперименте, — задачи о разрушении плотины), получаемых с использованием этой системы и других полных систем, имеющих определенный физический смысл. Однако, поскольку данные системы состоят из четырех базисных законов сохранения, соответствующие им задачи о распаде разрыва являются очень сложными, что не позволяет провести их полный анализ в общем случае (в [11] такой анализ выполнен для простейшей модели III двухслойной мелкой воды, состоящей из двух базисных законов сохранения). В данной работе при проведении качественного анализа возможных типов решений задачи о распаде разрыва в двухслойной мелкой воде строятся приближенные решения этой задачи в случае разрыва малой амплитуды (в рассматриваемом приближении решения, получаемые на основе различных систем базисных законов сохранения, являются эквивалентными).

Теоретическим обоснованием для таких построений является доказанная в [2] теорема об однозначной разрешимости задачи о распаде разрыва малой амплитуды для произвольной сильнонелинейной гиперболической системы законов сохранения. В [4] эта теорема обобщена на случай строго гиперболической системы, имеющей линейно вырожденные характеристические поля. Основным недостатком этих теорем заключается в том, что они не дают явного алгоритма для построения соответствующего автомодельного решения.

В настоящей работе предлагается приближенный метод построения решения задачи о распаде разрыва малой амплитуды в случае строго гиперболической системы законов сохранения, имеющей линейно вырожденные характеристические поля. В линейном приближении этого метода получается задача Коши для линейной гиперболической системы, решение которой представляет собой линии разрыва, разделенные областями, в которых решение является постоянным. В первом приближении с учетом квазилинейности исходной гиперболической системы разрывы, получаемые в линейном приближении, могут быть устойчивыми ударными волнами, волнами разрежения и контактными разрывами. Данный метод применяется при получении приближенного решения задачи о распаде разрыва малой амплитуды в модели двухслойной мелкой воды со свободной верхней границей. Наиболее подробно изучен частный случай — задача о разрушении плотины.

**1. Постановка задачи.** Движение двухслойной мелкой воды в горизонтальном прямоугольном канале со свободной верхней границей без учета влияния трения в предположении, что ускорение свободного падения  $g = 1$ , описывается системой дивергентных дифференциальных уравнений [1]

$$H_t + Q_x = 0, \quad h_t + q_x = 0; \quad (1.1)$$

$$U_t + (U^2/2 + H + \nu h)_x = 0, \quad u_t + (u^2/2 + H + h)_x = 0, \quad (1.2)$$

где  $H$  — толщина нижнего слоя;  $U$  и  $Q = HU$  — скорость и расход воды в нижнем слое;  $h$  — толщина верхнего слоя;  $u$  и  $q = hu$  — скорость и расход воды в верхнем слое;  $\nu < 1$  — отношение плотностей верхнего и нижнего слоев. Систему (1.1), (1.2) можно записать в векторной форме

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \quad (1.3)$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} H \\ h \\ U \\ u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} HU \\ hu \\ U^2/2 + H + \nu h \\ u^2/2 + H + h \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

В [1] показано, что собственные значения матрицы

$$A(\mathbf{u}) = \mathbf{f}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} U & 0 & H & 0 \\ 0 & u & 0 & h \\ 1 & \nu & U & 0 \\ 1 & 1 & 0 & u \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

удовлетворяющие характеристическому уравнению

$$P(\mathbf{u}, \lambda) = |A - \lambda E| = ((U - \lambda)^2 - H)((u - \lambda)^2 - h) - \nu H h = 0, \quad (1.6)$$

являются действительными и различными при выполнении одного из двух неравенств

$$|U - u| < \sqrt{H} f_1(h/H), \quad |U - u| > \sqrt{H} f_2(h/H) \quad (1.7)$$

( $f_1, f_2$  — положительные функции, удовлетворяющие условию  $f_1 < f_2$  при всех значениях  $h/H$ ). В общем случае эти собственные значения, а также соответствующие им правые и левые собственные векторы в явном виде не вычисляются.

Рассмотрим задачу о распаде разрыва для системы (1.3), (1.4), т. е. задачу Коши с кусочно-постоянными начальными данными

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}^l, & x \leq 0, \\ \mathbf{u}^r, & x > 0, \end{cases} \quad \mathbf{u}^l = \text{const}, \quad \mathbf{u}^r = \text{const}, \quad (1.8)$$

где  $\mathbf{u}^l = (H^l, h^l, U^l, u^l)$ ;  $\mathbf{u}^r = (H^r, h^r, U^r, u^r)$ . Предположим, что амплитуда начального разрыва достаточно мала:

$$|\mathbf{u}^r - \mathbf{u}^l| = \varepsilon \ll 1 \quad (1.9)$$

и средние начальные скорости в слоях различаются на малую величину, порядок которой не выше  $O(\varepsilon)$ :

$$|\bar{U} - \bar{u}| \leq O(\varepsilon), \quad \bar{U} = (U^l + U^r)/2, \quad \bar{u} = (u^l + u^r)/2.$$

Тогда согласно [2, 4] при достаточно малом  $\varepsilon$  задача о распаде разрыва (1.3), (1.8) имеет единственное автомодельное решение, удовлетворяющее первому неравенству (1.7) и, следовательно, принадлежащее области гиперболичности системы (1.1), (1.2). В общем случае это решение состоит из ударных волн, волн разрежения и контактных разрывов, разделенных областями, в которых решение является постоянным. В настоящей работе предлагается приближенный метод нахождения этого решения с помощью его разложения по параметру  $\varepsilon$ .

**2. Линейное приближение.** Линейное приближение решения задачи (1.3), (1.8) по параметру  $\varepsilon$  будем искать в виде

$$\mathbf{u}_1(x, t) = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{v}(x, t). \quad (2.1)$$

Здесь в качестве начального (нулевого) приближения  $\mathbf{u}_0$  принимается постоянная вектор-функция  $\mathbf{u}_0 = (H_0, h_0, U_0, u_0)$ , где

$$H_0 = \frac{H^l + H^r}{2}, \quad h_0 = \frac{h^l + h^r}{2}, \quad U_0 = u_0 = \tilde{u} = \frac{\bar{U} + \bar{u}}{2}.$$

Перейдем к новым переменным

$$H' = H/H_0, \quad h' = h/h_0, \quad U' = U - \tilde{u}, \quad u' = u - \tilde{u}, \quad (2.2)$$

с помощью которых вводятся безразмерные глубины и осуществляется переход в подвижную систему координат, движущуюся с начальной скоростью  $\tilde{u}$ . В новых переменных (2.2), при записи которых штрихи будем опускать, начальное приближение  $\mathbf{u}_0$  принимает вид

$$\mathbf{u}_0 = (1, h_0, 0, 0). \quad (2.3)$$

Подставляя разложение (2.1) в систему (1.3) и начальные условия (1.8), в первом приближении по параметру  $\varepsilon$  получаем, что функция  $\mathbf{v}$  представляет собой решение линейной системы

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + A_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0, \quad (2.4)$$

где с учетом (2.3)

$$A_0 = A(\mathbf{u}_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_0 \\ 1 & \nu & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & u \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Это решение удовлетворяет начальным условиям

$$\mathbf{v}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{v}^l, & x \leq 0, \\ \mathbf{v}^r, & x > 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

в которых с учетом (1.9)

$$\mathbf{v}^l = \frac{\mathbf{u}^l - \mathbf{u}_0}{\varepsilon}, \quad \mathbf{v}^r = \frac{\mathbf{u}^r - \mathbf{u}_0}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{v}^r - \mathbf{v}^l| = 1. \quad (2.7)$$

Линейная система (2.4) является гиперболической, поскольку получена путем линеаризации исходной квазилинейной системы (1.3), (1.4) относительно начального приближения (2.3), удовлетворяющего первому неравенству (1.7). Собственные значения  $\mu = \lambda(\mathbf{u}_0)$  матрицы (2.5) являются корнями характеристического уравнения

$$P_0(\mu) = P(\mathbf{u}_0, \lambda(\mathbf{u}_0)) = \mu^4 - r\mu^2 + \eta h_0 = 0, \quad (2.8)$$

где  $r = 1 + h_0$ ;  $\eta = 1 - \nu$ . Так как  $P(1) = -\nu h_0 < 0$ , то биквадратное уравнение (2.8) относительно  $y = \mu^2$  имеет два различных положительных корня. Таким образом, собственные значения матрицы (2.5), определяемые по формулам

$$\mu_3 = -\mu_2 = \sqrt{(r-d)/2}, \quad \mu_4 = -\mu_1 = \sqrt{(r+d)/2}, \quad (2.9)$$

где  $d = \sqrt{r^2 - 4\eta h_0}$ , являются действительными и различными.

Линейная гиперболическая система (2.4) допускает запись в инвариантной форме [2–6]

$$\boldsymbol{\omega}_t + \Lambda \boldsymbol{\omega}_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\omega_i)_t + \mu_i (\omega_i)_x = 0, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (2.10)$$

где  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)^T = S\mathbf{v}$  — вектор инвариантов;  $\Lambda = (\mu_i \delta_j^i)$  — диагональная матрица;  $S = (\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^2, \mathbf{s}^3, \mathbf{s}^4)^T$  — невырожденная матрица, строки которой

$$\mathbf{s}^i = (\mu_i, b_i, 1, a_i) \quad (a_i = \mu_i^2 - 1, \quad b_i = \mu_i a_i / h_0 = (\mu_i^2 - \eta) / \mu_i) \quad (2.11)$$

являются левыми собственными векторами матрицы (2.5):

$$\mathbf{s}^i A = \mu_i \mathbf{s}^i, \quad i = \overline{1, 4} \quad \Leftrightarrow \quad SA = \Lambda S. \quad (2.12)$$

Из соотношений (2.12) следует, что матрица  $R = S^{-1} = (\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3, \mathbf{r}^4)$ , обратная матрице  $S$ , удовлетворяет соотношению

$$AR = R\Lambda \quad \Leftrightarrow \quad A\mathbf{r}^i = \lambda_i \mathbf{r}^i, \quad i = \overline{1, 4},$$

в силу которого ее столбцы

$$\mathbf{r}^i = \frac{1}{\rho_i} (\nu, a_i, \nu \mu_i, b_i), \quad \rho_i = 2(\nu \mu_i + a_i b_i) = 2\mu_i \left( \nu + \frac{a_i^2}{h_0} \right) \quad (2.13)$$

являются правыми собственными векторами матрицы (2.5).

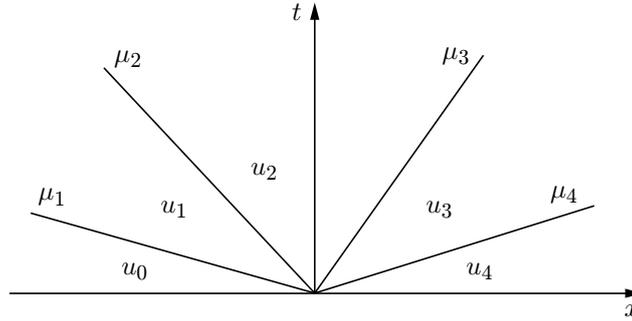


Рис. 1. Структура автомодельного решения задачи о распаде разрыва для линейной системы

С использованием инвариантной формы записи (2.10) компоненты  $v_i$  решения  $\mathbf{v}$  задачи (2.4)–(2.6) вычисляются по формуле [3, 6]

$$v_i(x, t) = (R\boldsymbol{\omega}(x, t))_i = \sum_{k=1}^4 r_i^k \omega_k(x, t) = \sum_{k=1}^4 r_i^k \omega_k(x - \mu_k t, 0) = \sum_{k=1}^4 r_i^k (S\mathbf{v}(x - \mu_k t, 0))_k = \sum_{k=1}^4 r_i^k \mathbf{s}^k \mathbf{v}(x - \mu_k t, 0), \quad i = \overline{1, 4}, \quad (2.14)$$

где  $r_i^k$  — компоненты правого собственного вектора  $\mathbf{r}^k$ . С учетом (2.6) решение (2.14) зависит только от автомодельной переменной  $\xi = x/t$  и в общем случае представляет собой четыре сильных разрыва (рис. 1), распространяющихся вдоль лучей  $x = \mu_k t, t > 0, k = \overline{1, 4}$ . Вне этих разрывов решение  $\mathbf{v}(\xi)$  принимает постоянные значения

$$\mathbf{v}(\xi) = \mathbf{v}^k = R\boldsymbol{\omega}^k, \quad \boldsymbol{\omega}^k = (\omega_1^r, \dots, \omega_k^r, \omega_{k+1}^l, \dots, \omega_4^l), \quad \xi \in (\mu_k, \mu_{k+1}), \quad k = \overline{0, 4}, \quad \mu_0 = -\infty, \quad \mu_5 = +\infty, \quad (2.15)$$

где  $\omega_k^r, \omega_k^l$  — компоненты векторов  $\boldsymbol{\omega}^r = S\mathbf{v}^r$  и  $\boldsymbol{\omega}^l = S\mathbf{v}^l$  соответственно. В частности,  $\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^l, \mathbf{v}^4 = \mathbf{v}^r$ . Детальный качественный анализ решения (2.15) выполнен в работе [12].

### 3. Условия, выделяющие устойчивые ударные волны и волны разрежения.

С учетом квазилинейности исходной гиперболической системы (1.3), (1.4) получим условия, которые среди разрывных решений линейной задачи (2.4)–(2.6) выделяют решения, в первом приближении переходящие в устойчивые ударные волны и центрированные волны разрежения.

Обозначим через  $\mathbf{u}^k$  решение задачи (1.3), (1.8) в области между волнами с индексами  $k$  и  $k + 1$ , где оно является постоянным. С учетом (2.1), (2.15) будем предполагать, что имеют место разложения

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{v}^k + O(\varepsilon^2), \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

Для единообразия записи формул введем обозначения

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{v}^0 = \mathbf{u}^l, \quad \mathbf{u}^4 = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{v}^4 = \mathbf{u}^r, \quad (3.2)$$

а также следующие обозначения:

$$\Phi_k = \Psi_k(\omega_k^l - \omega_k^r), \quad \Psi_k = \nabla \lambda_k(\mathbf{u}_0) \mathbf{r}^k. \quad (3.3)$$

Здесь  $\nabla \lambda_k(\mathbf{u})$  — градиент собственного значения  $\lambda_k(\mathbf{u})$  матрицы (1.5).

**Теорема 1.** При условиях (3.1) выполнение неравенства  $\Phi_k > 0$  ( $\Phi_k < 0$ ) необходимо и достаточно для того, чтобы разрыву с индексом  $k$ , получаемому в линейном приближении, при достаточно малом  $\varepsilon$  соответствовала устойчивая ударная волна (центрированная волна разрежения) с индексом  $k$  в квазилинейной задаче (1.3), (1.8).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим через  $[f(\mathbf{u})]_k = f(\mathbf{u}^{k-1}) - f(\mathbf{u}^k)$  скачок функции  $f(\mathbf{u})$  при переходе через линию разрыва с индексом  $k$ . Из [2, 3, 6] следует, что для устойчивости (неустойчивости) разрыва с индексом  $k$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство  $[\lambda_k(\mathbf{u})]_k > 0$  ( $[\lambda_k(\mathbf{u})]_k < 0$ ), при этом неустойчивый разрыв преобразуется в волну разрежения. Используя разложения (3.1) и (3.2), с учетом (2.15) с точностью до  $O(\varepsilon^2)$  получаем

$$[\lambda_k(\mathbf{u})]_k = \varepsilon \nabla \lambda_k^0[\mathbf{v}]_k = \varepsilon \nabla \lambda_k^0 R[\boldsymbol{\omega}]_k = \varepsilon \nabla \lambda_k^0 \mathbf{r}^k [\omega_k]_k = \varepsilon \Psi_k (\omega_k^l - \omega_k^r),$$

где  $\lambda_k^0 = \lambda_k(\mathbf{u}_0)$ . Теорема доказана.

В теореме 1 не рассмотрен случай  $\Phi_k = 0$ , который возможен при условии

$$\Psi_k = \nabla \lambda_k(\mathbf{u}_0) \mathbf{r}^k = 0, \quad (3.4)$$

означающем, что при  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$  характеристическое поле с индексом  $k$  является линейно вырожденным [2]. Если при этом  $\omega_k^l \neq \omega_k^r$ , то в первом приближении по параметру  $\varepsilon$  разрыв с индексом  $k$  является контактным. Если  $\omega_k^l = \omega_k^r$ , то в первом приближении по параметру  $\varepsilon$  волна с индексом  $k$  отсутствует.

**4. Вычисление величин  $\Psi_k$  и определение их знаков.** Подставляя в характеристическое уравнение (1.6) собственное значение  $\lambda(\mathbf{u})$  матрицы (1.5) и дифференцируя по  $\mathbf{u}$ , получаем соотношение для определения градиента  $\nabla \lambda = \lambda_{\mathbf{u}}$ :

$$\nabla P(\mathbf{u}, \lambda(\mathbf{u})) = P_{\mathbf{u}} + P_{\lambda} \nabla \lambda = 0,$$

где

$$P_{\mathbf{u}} = (\psi^2 - \eta h, \varphi^2 - \eta H, 2\varphi(\psi^2 - h), 2\psi(\varphi^2 - H)),$$

$$P_{\lambda} = 2(\varphi\psi(\varphi + \psi) - H\psi - h\varphi); \quad \varphi = \lambda - U; \quad \psi = \lambda - u.$$

Таким образом, для начального приближения (2.3) с учетом формул (2.9), (2.11) имеем уравнения

$$\nabla \lambda(\mathbf{u}_0) = (\mu^2 - \eta h_0, \mu b, 2\mu(\mu^2 - h_0), 2\mu a) / P_{\lambda}^0(\mu); \quad (4.1)$$

$$P_{\lambda}^0(\mu) = P_{\lambda}(\mathbf{u}_0, \mu) = 2\mu p(\mu), \quad p(\mu) = 2\mu^2 - r \neq 0. \quad (4.2)$$

Из формул (2.13), (4.1), (4.2) следует

$$\Psi = \nabla \lambda(\mathbf{u}_0) \mathbf{r} = \frac{F(\mu)}{\rho P_{\lambda}^0(\mu)} = \frac{F(\mu)}{4c\mu^2 p(\mu)}; \quad (4.3)$$

$$F(\mu) = \nu(2\mu^4 + (1 - 2h_0)\mu^2 - \eta h_0) + 3\mu ab, \quad c = \nu + a^2/h_0. \quad (4.4)$$

Здесь индексы у собственных значений матрицы (1.5) и соответствующих им при  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$  правых собственных векторов (2.13) для краткости опускаются.

**Лемма 1.** При всех значениях  $h_0 > 0$  и  $\nu \in (0, 1)$  имеют место неравенства  $p(\mu_1) = p(\mu_4) > 0$ ,  $p(\mu_2) = p(\mu_3) < 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Утверждение леммы следует из того, что если  $\mu^2 = \mu_1^2 = \mu_4^2 = (r + d)/2$ , то  $2\mu^2 - r = d > 0$ , и если  $\mu^2 = \mu_2^2 = \mu_3^2 = (r - d)/2$ , то  $2\mu^2 - r = -d < 0$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.** При всех значениях  $h_0 > 0$  и  $\nu \in (0, 1)$  имеет место неравенство  $F(\mu_1) = F(\mu_4) > 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычитая из правой части формулы (4.4) величину  $2\nu P_0(\mu) = 0$ , где  $\mu$  — корень характеристического уравнения (2.8), с учетом (2.9), (2.11), (2.13) получаем

$$F(\mu) = F(\mu) - 2\nu P_0(\mu) = 3(\nu f(\mu) + \mu^2 a^2/h_0), \quad f(\mu) = \mu^2 - \eta h_0.$$

Покажем, что  $f(\mu) > 0$  при  $\mu^2 = \mu_1^2 = \mu_4^2$ . Поскольку в этом случае

$$f(\mu) = \mu^2 - \eta h_0 = \frac{r+d}{2} - \eta h_0 = \frac{1 + (\nu - \eta)h_0 + d}{2},$$

неравенство  $f(\mu) > 0$  будет верным при условии  $1 + (\nu - \eta)h_0 \geq 0$ . Предположим, что данное условие не выполнено (это возможно при одновременном выполнении неравенств  $\nu < \eta$  и  $h_0 > 1/(\eta - \nu)$ ). Тогда, записывая неравенство  $f(\mu) > 0$  в виде  $d > (\eta - \nu)h_0 - 1$ , можно показать, что оно эквивалентно верному неравенству

$$d^2 - ((\eta - \nu)h_0 - 1)^2 = 4\eta\nu h_0^2 > 0.$$

Лемма доказана.

**Лемма 3.** Если параметры  $h_0 > 0$  и  $\nu \in (0, 1)$  удовлетворяют одному из двух условий

$$h_0 \leq 1 \quad \text{или} \quad h_0 \in (1, 5/4), \quad \nu \in (\nu_1, \nu_2), \quad (4.5)$$

то  $F(\mu_2) = F(\mu_3) > 0$ . Если эти параметры удовлетворяют одному из двух условий

$$h_0 > 5/4 \quad \text{или} \quad h_0 \in (1, 5/4], \quad \nu \notin (\nu_1, \nu_2), \quad (4.6)$$

то  $F(\mu_2) = F(\mu_3) < 0$ . Если для параметров  $h_0$  и  $\nu$  выполнено условие

$$h_0 \in (1, 5/4], \quad \nu \in \{\nu_1, \nu_2\}, \quad (4.7)$$

то  $F(\mu_2) = F(\mu_3) = 0$ . В формулах (4.5)–(4.7)

$$\nu_{1,2} = \frac{4 - 3h_0 \mp (2 - h_0)\sqrt{5 - 4h_0}}{2h_0} \quad (4.8)$$

корни квадратного уравнения  $g(\nu) = 0$ ,

$$g(\nu) = h_0^2 \nu^2 + (3h_0 - 4)h_0 \nu + (h_0 - 1)^3. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуя формулу (4.4) с учетом того, что  $P_0(\mu) = 0$ , где  $\mu^2 = \mu_2^2 = \mu_3^2 = (r - d)/2$ , получаем

$$\begin{aligned} F(\mu) &= F(\mu) + \nu P_0(\mu) = 3\mu^2(a^2/h_0 + \nu(\mu^2 - h_0)) = \\ &= \frac{3\mu^2}{h_0} ((\mu^2 - 1)^2 + \nu(\mu^2 - h_0)h_0 - P_0(\mu)) = \frac{3\mu^2}{h_0} G(\nu), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$G(\nu) = \eta(h_0 - 1)^2 + \nu r - d((1 + \nu)h_0 - 1).$$

Если выполнено неравенство

$$(1 + \nu)h_0 - 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad h_0 \leq 1/(1 + \nu) < 1, \quad (4.11)$$

то  $G(\nu) > 0$ . Если это неравенство не выполнено, то после ряда преобразований получаем, что  $\text{sign}(G(\nu)) = \text{sign}(\bar{G}(\nu))$ , где

$$\bar{G}(\nu) = (\eta(h_0 - 1)^2 + \nu r)^2 - d^2((1 + \nu)h_0 - 1)^2 = -4\nu g(\nu),$$

$g(\nu)$  — многочлен (4.9). Если дискриминант этого многочлена

$$D = h_0^2(h_0 - 2)^2(5 - 4h_0) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad h_0 > 5/4,$$

то  $\text{sign}(G(\nu)) = -\text{sign}(g(\nu)) < 0$ . Если  $h_0 \leq 5/4$ , то уравнение  $g(\nu) = 0$  имеет действительные корни (4.8). Поскольку неравенства  $g(0) \leq 0$  и  $g(1) \leq 0$  эквивалентны неравенству  $h_0 \leq 1$ , то эти корни  $\nu_1, \nu_2 \in (0, 1)$  при условии  $h_0 \in (1, 5/4]$ . С учетом того, что неравенство (4.11) более сильное, чем неравенство  $h_0 \leq 1$ , получаем  $G(\nu) > 0$  при условиях (4.5),  $G(\nu) < 0$  при условиях (4.6) и  $G(\nu) = 0$  при условии (4.7). Таким образом, с учетом (4.10) утверждение леммы следует из того, что  $\text{sign}(F(\mu)) = \text{sign}(G(\nu))$ . Лемма доказана.

Из формулы (4.3) с учетом лемм 1–3 следует

**Теорема 2.** При всех значениях  $h_0 > 0$  и  $\nu \in (0, 1)$  имеют место неравенства  $\Psi_1 = \Psi_4 > 0$ . Пусть  $h_0 > 0$  и  $\nu \in (0, 1)$ . Тогда:

- 1) если выполнено одно из условий (4.5), то  $\Psi_2 = \Psi_3 < 0$ ;
- 2) если выполнено одно из условий (4.6), то  $\Psi_2 = \Psi_3 > 0$ ;
- 3) если выполнено условие (4.7), то  $\Psi_2 = \Psi_3 = 0$ .

Из теоремы 2 следует, что в некоторой окрестности начального приближения (2.3) характеристические поля с индексами 1 и 4 являются сильнонелинейными [2, 6] при всех допустимых значениях  $h_0$  и  $\nu$ , а соответствующие поля с индексами 2 и 3 — при выполнении одного из условий (4.5) или одного из условий (4.6). При выполнении условия (4.7) характеристические поля с индексами 2 и 3 на начальном приближении (2.3) являются линейно вырожденными (3.4), что в первом приближении по параметру  $\varepsilon$  может привести к формированию контактного разрыва.

**5. Классификация волн.** Для компонент векторов  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}^l$ ,  $\mathbf{v}^r$  введем следующие обозначения:

$$\mathbf{v} = (\Theta, \theta, V, v), \quad \mathbf{v}^l = (\Theta^l, \theta^l, V^l, v^l), \quad \mathbf{v}^r = (\Theta^r, \theta^r, V^r, v^r). \quad (5.1)$$

С учетом нормировки (2.2) и соотношений (2.7) имеем

$$\begin{aligned} \Theta^l &= \frac{H^l - 1}{\varepsilon} = \frac{H^l - H^r}{2\varepsilon}, & \Theta^r &= \frac{H^r - 1}{\varepsilon} = \frac{H^r - H^l}{2\varepsilon}, \\ \theta^l &= \frac{h^l - h_0}{\varepsilon} = \frac{h^l - h^r}{2\varepsilon}, & \theta^r &= \frac{h^r - h_0}{\varepsilon} = \frac{h^r - h^l}{2\varepsilon}, \\ V^l &= \frac{U^l}{\varepsilon}, & V^r &= \frac{U^r}{\varepsilon}, & v^l &= \frac{u^l}{\varepsilon}, & v^r &= \frac{u^r}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Подставляя в формулу (3.3) значения инвариантов  $\omega_k^l = \mathbf{s}^k \mathbf{v}^l$  и  $\omega_k^r = \mathbf{s}^k \mathbf{v}^r$ , с учетом (2.11), (5.1) получаем

$$\Phi_k = \Psi_k(\omega_k^l - \omega_k^r) = \Psi_k \mathbf{s}^k (\mathbf{v}^l - \mathbf{v}^r) = \Psi_k f_k(\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^r, \mu_k); \quad (5.2)$$

$$f_k(\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^r, \mu_k) = \mu_k(\Theta^l - \Theta^r) + b_k(\theta^l - \theta^r) + (V^l - V^r) + a_k(v^l - v^r). \quad (5.3)$$

С учетом теорем 1, 2 из (5.2), (5.3) следует

**Теорема 3.** Решение задачи о распаде разрыва (1.3), (1.8), (1.9) при достаточно малом  $\varepsilon$  имеет следующую структуру:

- 1) в случае  $k = 1, 4$  при выполнении неравенства  $f_k > 0$  ( $f_k < 0$ ) волна с индексом  $k$  представляет собой ударную волну (волну разрежения);
- 2) в случае  $k = 2, 3$  при выполнении одного из условий (4.5) и неравенства  $f_k > 0$  ( $f_k < 0$ ) или одного из условий (4.6) и неравенства  $f_k < 0$  ( $f_k > 0$ ) волна с индексом  $k$  представляет собой волну разрежения (ударную волну);
- 3) в случае  $k = 2, 3$  при выполнении условия (4.7) и неравенства  $f_k \neq 0$  волна с индексом  $k$  в первом приближении представляет собой контактный разрыв;
- 4) в случае  $f_k = 0$  волна с индексом  $k$  в первом приближении отсутствует.

Из теоремы 3 следует, что за счет соответствующего выбора входных параметров  $\nu$ ,  $h_0$  и начальных данных (5.1) при решении задачи о распаде разрыва (1.3), (1.8), (1.9) можно получить любой заданный набор типов волн, т. е. волна с любым индексом  $k = \overline{1, 4}$  может оказаться как ударной волной, так и волной разрежения. В частности, если

$$h_0 > 5/4 \Rightarrow \Psi_k > 0 \quad \forall k = \overline{1, 4}, \quad \Theta^l = \Theta^r, \quad \theta^l = \theta^r, \quad (5.4)$$

то при начальных скоростях  $V^l > V^r$ ,  $v^l > v^r$  все волны в решении будут ударными. Если при условиях (5.4) начальные скорости удовлетворяют неравенствам  $V^l < V^r$ ,  $v^l < v^r$ , то все волны в решении будут волнами разрежения.

**6. Разложение решения в волнах разрежения.** Для завершения построения первого приближения решения задачи о распаде разрыва (1.3), (1.8), (1.9) необходимо получить разложение автомодельного решения внутри центрированных волн разрежения, выделенных с помощью теорем 1 и 3.

Предположим, что на линии разрыва с индексом  $k$ , полученной в линейном приближении, выполнено неравенство  $\Phi_k < 0$ , следовательно, этот разрыв переходит в волну разрежения в задаче (1.3), (1.8). Обозначим через  $\tilde{\mathbf{r}}^k(\mathbf{u})$  правый собственный вектор матрицы (1.5), соответствующий собственному значению  $\lambda_k(\mathbf{u})$  и такой, что  $\tilde{\mathbf{r}}^k(\mathbf{u}_0) = \mathbf{r}^k$ . Введем также обозначение

$$\tilde{\Psi}_k(\mathbf{u}) = \nabla \lambda_k(\mathbf{u}) \tilde{\mathbf{r}}^k(\mathbf{u}) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Psi}_k(\mathbf{u}_0) = \Psi_k.$$

Далее в данном пункте индекс  $k$  будем опускать, а для решений слева и справа от волны разрежения введем обозначения  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^{k-1}$  и  $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^k$  соответственно.

Решение в центрированной волне разрежения определяется уравнениями [2, 6]

$$\mathbf{u}_\xi = \bar{\mathbf{r}}(\mathbf{u}), \quad \xi = \lambda(\mathbf{u}), \quad (6.1)$$

где  $\bar{\mathbf{r}}(\mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{u})/\tilde{\Psi}(\mathbf{u}) \Rightarrow \nabla \lambda(\mathbf{u}) \bar{\mathbf{r}}(\mathbf{u}) = 1$ . Из уравнений (6.1) с учетом того, что  $\lambda(\mathbf{u}_0) = \mu$ , следует интегральное уравнение

$$\mathbf{u}(\xi) - \mathbf{u}_0 = \int_{\mu}^{\xi} \bar{\mathbf{r}}(\mathbf{u}(\eta)) d\eta. \quad (6.2)$$

При построении первого приближения решения по параметру  $\varepsilon$  будем искать это решение в виде

$$\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{v}(\xi) + O(\varepsilon^2). \quad (6.3)$$

Подставляя разложение (6.3) в уравнение (6.2) и учитывая, что в рассматриваемой центрированной волне  $\max |\xi - \mu| = O(\varepsilon)$ , получаем

$$\varepsilon \mathbf{v} + O(\varepsilon^2) = \int_{\mu}^{\xi} \bar{\mathbf{r}}(\mathbf{u}_0) d\eta + O(\varepsilon^2) = \frac{\xi - \mu}{\Psi} \mathbf{r} + O(\varepsilon^2),$$

откуда в первом приближении по параметру  $\varepsilon$  находим

$$\mathbf{v} = \frac{\xi - \mu}{\varepsilon \Psi} \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{v} = \mathbf{u}_0 + \frac{\xi - \mu}{\Psi} \mathbf{r}.$$

Записывая последнее соотношение покомпонентно, с учетом (2.3) и (2.13) получаем

$$H_1 = 1 + \frac{\nu(\xi - \mu)}{\rho \Psi}, \quad h_1 = h_0 + \frac{a(\xi - \mu)}{\rho \Psi}, \quad U_1 = \frac{\nu(\xi - \mu)}{2c\Psi}, \quad u_1 = \frac{a(\xi - \mu)}{2ch_0\Psi}.$$

Для границ отрезка  $[\xi^0, \xi^1]$ , на котором существует волна разрежения, и для значений решения  $\mathbf{u}^0$  и  $\mathbf{u}^1$  слева и справа от нее будем использовать разложения

$$\xi^i = \mu + \varepsilon \eta^i + O(\varepsilon^2), \quad \mathbf{u}^i = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{v}^i + O(\varepsilon^2), \quad i = 0, 1.$$

Подставляя эти разложения во второе уравнение (6.1), раскладывая его правую часть в ряд по  $\varepsilon$  и приравнивая затем коэффициенты при  $\varepsilon$ , с учетом формулы (4.1) и обозначений (5.1) получаем

$$\eta^i = \nabla \lambda(\mathbf{u}_0) \mathbf{v}^i = \frac{(\mu^2 - \eta h_0) \Theta^i + \mu b \theta^i + 2\mu((\mu^2 - h_0)V^i + a v^i)}{P_\lambda^0(\mu)}.$$

**7. Задача о разрушении плотины.** Важным частным случаем задачи о распаде разрыва (1.3), (1.8) является задача о разрушении плотины, в которой в начальный момент времени жидкости в слоях неподвижны, т. е.

$$U^l = U^r = u^l = u^r = 0 \quad \Rightarrow \quad V^l = V^r = v^l = v^r = 0. \quad (7.1)$$

В этом случае функции (5.3), входящие в (5.2), принимают вид

$$f_k(\Theta^l, \Theta^r, 0, 0, \theta^l, \theta^r, 0, 0, \mu_k) = \mu_k g_k(\Theta^l, \Theta^r, \theta^l, \theta^r, \mu_k),$$

$$g_k(\Theta^l, \Theta^r, \theta^l, \theta^r, \mu_k) = \Theta^l - \Theta^r + \frac{a_k}{h_0} (\theta^l - \theta^r).$$

Поскольку  $\mu_1 = -\mu_4$ ,  $\mu_2 = -\mu_3$  и  $g_1 = g_4$ ,  $g_2 = g_3$ , с учетом теоремы 2 при начальных условиях (7.1) теорему 3 можно сформулировать следующим образом:

**Теорема 4.** При достаточно малом  $\varepsilon$  решение задачи о разрушении плотины (1.3), (1.8), (1.9), (7.1) имеет следующую структуру:

1) при выполнении неравенства  $g_1 > 0$  ( $g_1 < 0$ ) волна с индексом 1 представляет собой волну разрежения (ударную волну), а волна с индексом 4 — ударную волну (волну разрежения);

2) при выполнении одного из условий (4.5) и неравенства  $g_2 > 0$  ( $g_2 < 0$ ) или одного из условий (4.6) и неравенства  $g_2 < 0$  ( $g_2 > 0$ ) волна с индексом 2 представляет собой ударную волну (волну разрежения), а волна с индексом 3 — волну разрежения (ударную волну);

3) при выполнении условия (4.7) и неравенства  $g_2 \neq 0$  волны с индексами 2 и 3 в первом приближении представляют собой контактные разрывы;

4) в первом приближении при  $g_1 = 0$  отсутствуют волны с индексами 1 и 4, а при  $g_2 = 0$  — волны с индексами 2 и 3.

Из теоремы 4 следует, что в невырожденном случае, т. е. при  $g_1 \neq 0$ , волны с индексами 1 и 4 являются волнами разного типа: если волна с индексом 1 (с индексом 4) является ударной, то волна с индексом 4 (с индексом 1) — волной разрежения. Аналогично при выполнении неравенства  $g_2 \neq 0$  и невыполнении условия (4.7) волны с индексами 2 и 3 являются волнами разного типа: если волна с индексом 2 (с индексом 3) является ударной, то волна с индексом 3 (с индексом 2) — волной разрежения. Следовательно, с учетом теоремы 3 в работе [12] (в силу которой на внешних волнах скачки в слоях происходят в одном направлении, а на внутренних волнах — в противоположных направлениях) задача о разрушении плотины (1.3), (1.8), (1.9), (7.1) с точностью до симметрии относительно вертикальной оси  $z$  допускает 10 различных типов решения (рис. 2, 3). На рис. 2 показаны невырожденные случаи задачи ( $g_1 \neq 0$ ,  $g_2 \neq 0$ ): 1) за двумя ударными волнами следуют две волны разрежения (рис. 2, а, б); 2) ударные волны и волны разрежения чередуются (рис. 2, в, г); 3) в первом приближении внутренние волны (волны с индексами 2 и 3) представляют собой контактные разрывы (рис. 2, д, е). На рис. 3 представлены вырожденные

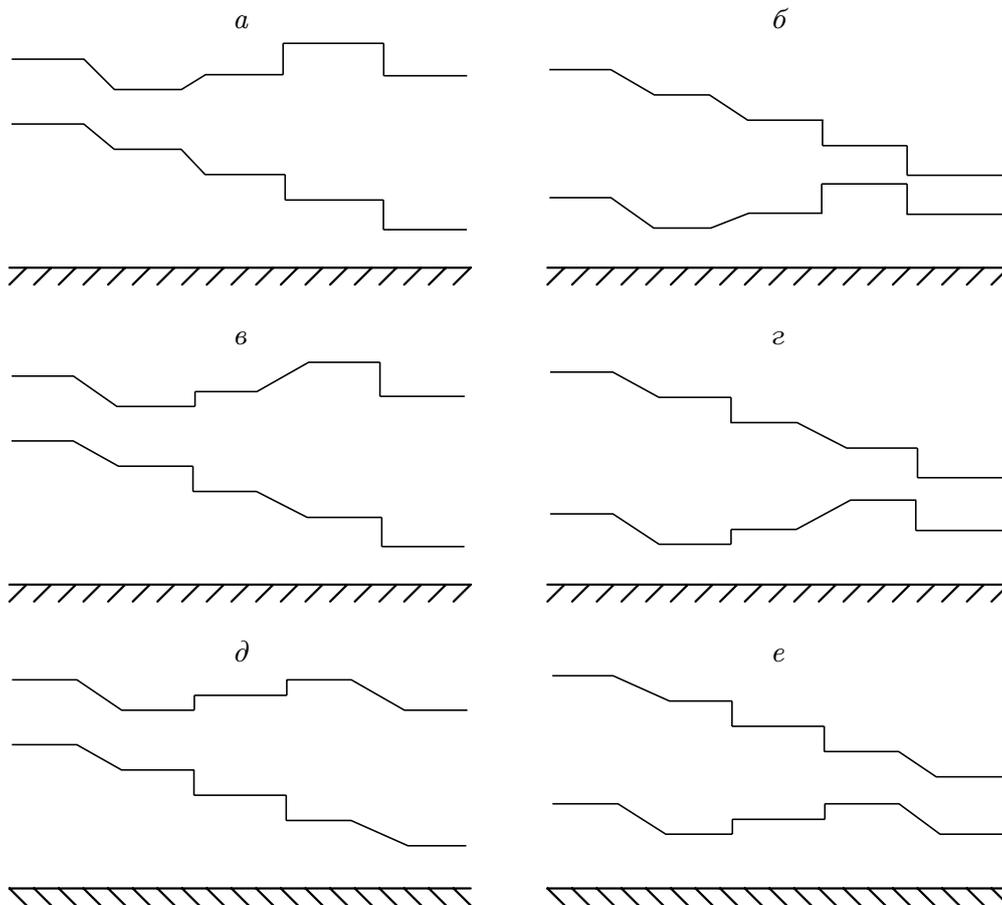


Рис. 2. Невырожденные случаи задачи о разрушении плотины:  
*a, б* — за двумя ударными волнами следуют две волны разрежения; *в, г* — ударные волны и волны разрежения чередуются; *д, е* — внутренние волны представляют собой контактные разрывы

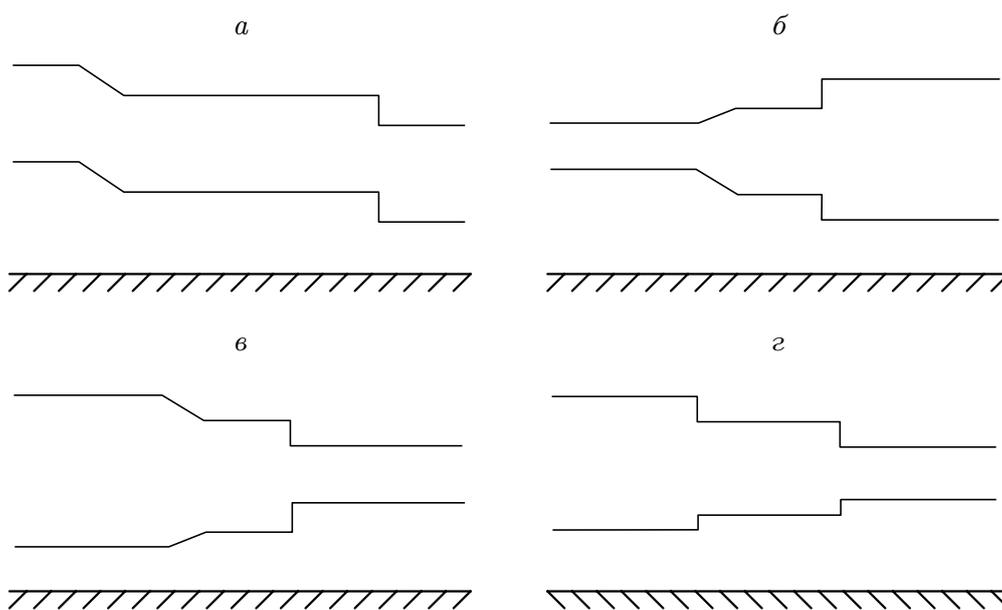


Рис. 3. Вырожденные случаи задачи о разрушении плотины:  
*a* — отсутствуют внутренние волны; *б, в* — отсутствуют внешние волны; *г* — внешние волны отсутствуют, а внутренние представляют собой контактные разрывы

случаи задачи: 1) отсутствуют внутренние волны с индексами 2 и 3 ( $g_2 = 0$ ) (рис. 3,а); 2) отсутствуют внешние волны с индексами 1 и 4 ( $g_1 = 0$ ) (рис. 3,б-г), при этом на рис. 3,г в первом приближении внутренние волны являются контактными разрывами.

**Заключение.** В настоящей работе решение задачи о распаде разрыва малой амплитуды для модели двухслойной мелкой воды построено в первом приближении относительно малого параметра  $\varepsilon$ . Для построения следующих приближений необходимо с использованием волновой структуры решения, полученной в первом приближении, искать решения в областях между волнами и скорости ударных волн в виде согласованных рядов по параметру  $\varepsilon$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Модели двухслойной “мелкой воды” // ПМТФ. 1979. № 2. С. 3–14.
2. **Lax P. D.** Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Philadelphia: SIAM, 1972.
3. **Рождественский Б. Л.** Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. М.: Наука, 1978.
4. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
5. **Куликовский А. Г.** Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. М.: Физматлит, 2001.
6. **Остапенко В. В.** Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды: Курс лекций. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 2004.
7. **Остапенко В. В.** Полные системы законов сохранения для моделей двухслойной “мелкой воды” // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 5. С. 23–32.
8. **Тешуков В. М.** Гидравлический прыжок на сдвиговом течении идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 11–20.
9. **Тешуков В. М.** Гидравлический прыжок на сдвиговом течении баротропной жидкости // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 73–81.
10. **Остапенко В. В.** Устойчивые ударные волны в двухслойной “мелкой воде” // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 1. С. 94–113.
11. **Ляпидевский В. Ю.** Задача о распаде разрыва для уравнений двухслойной мелкой воды // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1981. Вып. 50. С. 85–98.
12. **Карabut П. Е., Остапенко В. В.** Задача о разрушении плотины в двухслойной мелкой воде (линейное приближение) // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 72, вып. 6. С. 958–970.

*Поступила в редакцию 22/III 2010 г.,  
в окончательном варианте — 27/IX 2010 г.*