

УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ДЕКРЕМЕНТА ЗАТУХАНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СЛОИСТОЙ СФЕРЫ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА МАССУ

В. А. Будугаева

Институт физико-технических проблем Севера СО РАН, 677891 Якутск

Рассмотрена задача синтеза из конечного набора вязкоупругих материалов многослойной сферической оболочки, максимально гасящей собственные колебания, при ограничении на массу. Получены необходимые условия оптимальности, построен вычислительный алгоритм и приведен пример расчета.

1. В работе [1], посвященной решению задач оптимального проектирования слоистых конструкций, на примере многослойной сферической оболочки, выполненной из заданного набора вязкоупругих материалов, показано, что ее уровень демпфирования может быть повышен за счет изменения взаимного расположения и относительной толщины слоев. В [1] с использованием принципа соответствия разработан алгоритм оптимального проектирования оболочек постоянной толщины, обеспечивающих максимальное гашение собственных колебаний. Представляется целесообразным обобщить полученный результат, вводя некоторые ограничения на рабочие характеристики конструкции, например, ограничив ее массу.

Сформулируем следующую задачу (см. [1]): из заданного набора материалов требуется сконструировать ограниченную по массе многослойную оболочку, обеспечивающую минимальное значение выбранного критерия качества

$$F_0 = \text{Im} [\omega(\theta)], \quad (1.1)$$

где $\omega = \omega_R + i\omega_I$ — комплексная собственная частота; θ — распределение плотности ρ и параметров Ламе $\bar{\lambda}$ и $\bar{\mu}$ по радиальной координате.

Собственные частота и форма свободных колебаний сферической оболочки определяются из решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \sigma_r &= (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\bar{\lambda} \frac{u}{r}, \\ \sigma_\varphi &= 2(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \frac{u}{r} + \bar{\lambda} \frac{\partial u}{\partial r}, & l < r < R, & \quad \sigma_r(l) = \sigma_r(R) = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь R — внешний радиус оболочки; l — внутренний радиус оболочки, определяемый в ходе решения задачи; комплексные параметры Ламе имеют вид [2]

$$\bar{\lambda}_n = \lambda_n [1 - \Gamma_{\lambda n}^c(\omega_R) - \Gamma_{\lambda n}^s(\omega_R)], \quad \bar{\mu}_n = \mu_n [1 - \Gamma_{\mu n}^c(\omega_R) - \Gamma_{\mu n}^s(\omega_R)],$$

где

$$\Gamma_{\lambda n}^c(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\lambda n}(\tau) \cos(\omega_R \tau) d\tau; \quad \Gamma_{\lambda n}^s(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\lambda n}(\tau) \sin(\omega_R \tau) d\tau; \quad (1.3)$$

$$\Gamma_{\mu n}^c(\omega R) = \int_0^{\infty} R_{\mu n}(\tau) \cos(\omega R \tau) d\tau; \quad \Gamma_{\mu n}^s(\omega R) = \int_0^{\infty} R_{\mu n}(\tau) \sin(\omega R \tau) d\tau;$$

индекс n — номер слоя ($n = \overline{1, N}$).

При вычислении интегралов (1.3) использовались выражения ядер релаксации вида [3] $R = \bar{a} \exp(-\beta t)/t^{1-\alpha}$, где \bar{a} , α , β — эмпирические константы.

Для однородной оболочки комплексная частота находится из трансцендентного уравнения, получаемого при решении задачи (1.2):

$$\begin{aligned} \cos[k(R-l)] \left\{ \frac{4\mu k}{l} \left(\frac{4\mu}{R^2} - \rho\omega^2 \right) - \frac{4\mu k}{R} \left(\frac{4\mu}{l} - \rho\omega^2 \right) \right\} + \\ + \sin[k(R-l)] \left\{ \frac{(4\mu k)^2}{Rl} + \left(\frac{4\mu}{l^2} - \rho\omega^2 \right) \left(\frac{4\mu}{R^2} - \rho\omega^2 \right) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $k^2 = \rho\omega^2/(\lambda + 2\mu)$ (черта над λ и μ опущена).

Для слоистой оболочки плотность и параметры Ламе будут кусочно-постоянными функциями радиуса, а на границах слоев смещения и напряжения будут непрерывны. Это позволяет обобщить решение (1.4) на случай слоистой оболочки и получить для вычисления напряжений и перемещений рекуррентное соотношение

$$\begin{pmatrix} u_N(R) \\ \sigma_N(R) \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} u_1(l) \\ \sigma_1(l) \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

При этом будут выполняться граничные условия

$$\sigma_N(R) = \sigma_1(l) = 0. \quad (1.6)$$

В соотношении (1.5) G — результирующая матрица вида

$$G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \Lambda_n \cdot \Lambda_{n-1} \cdots \Lambda_1,$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_n &= \Delta_n \begin{vmatrix} a_n(r_n) & ib_n(r_n) \\ c_n(r_n) & id_n(r_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -d_n(r_{n-1}) & b_n(r_{n-1}) \\ -ic_n(r_{n-1}) & ia_n(r_{n-1}) \end{vmatrix}; \\ \Delta_n &= (c_n(r_{n-1})b_n(r_{n-1}) - d_n(r_{n-1})a_n(r_{n-1}))^{-1} \quad (n = \overline{1, N}); \\ a_n &= -\frac{k_n^2}{r} \cos(k_n r) + \frac{k_n}{r^2} \sin(k_n r); \quad b_n = -\frac{k_n}{r^2} \cos(k_n r) - \frac{k_n^2}{r} \sin(k_n r); \\ c_n &= \frac{k_n}{r} \left[\frac{4\mu_n k_n}{r} \cos(k_n r) - \left(\frac{4\mu_n}{r^2} - \rho_n \omega^2 \right) \sin(k_n r) \right]; \\ d_n &= \frac{k_n}{r} \left[\frac{4\mu_n k_n}{r} \sin(k_n r) + \left(\frac{4\mu_n}{r^2} - \rho_n \omega^2 \right) \cos(k_n r) \right], \quad r_{n-1} < r < r_n \quad (n = \overline{1, N}). \end{aligned}$$

Решая (1.5) с учетом условий (1.6), получим характеристическое уравнение для определения частоты многослойной сферической оболочки

$$g_{21} = 0. \quad (1.7)$$

2. Рассмотрим задачу оптимизации многослойной вязкоупругой полый сферы, обеспечивающей максимальное демпфирование свободных колебаний и имеющей ограничение на массу. Используя представление $u(r, t) = \exp(i\omega t)z_1(r)$, $\sigma(r, t) = \exp(i\omega t)z_2(r)$, сведем

исходную задачу (1.2) к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Вводя безразмерные переменные $z_1 = u/r_0$, $z_2 = \sigma_r$, $r^* = r/r_0$, $l^* = l/r_0$, $\rho^* = \rho/\rho_0$, $\lambda^* = \lambda/\sigma_0$, $\mu^* = \mu/\sigma_0$, $\omega^{*2} = \omega^2 r_0^2 \rho_0 / \sigma_0$, где r_0 , σ_0 , ρ_0 — характерные длина, напряжение и плотность, и переводя переменный отрезок интегрирования $[l, R]$ в постоянный $[0, 1]$ путем замены

$$r = l + x(R - l), \quad x \in [0, 1], \quad (2.1)$$

получим

$$\mathbf{Z}^1 = A\mathbf{Z} \equiv \mathbf{f}, \quad z_2(0) = z_2(1) = 0. \quad (2.2)$$

Здесь

$$A = \left\| \begin{array}{cc} -\frac{2\lambda(R-l)}{r(\lambda+2\mu)} & \frac{R-l}{\lambda+2\mu} \\ \left[\frac{4\mu(3\lambda+2\mu)}{r^2(\lambda+2\mu)} - \rho\omega^2 \right] (R-l) & -\frac{4\mu(R-l)}{r(\lambda+2\mu)} \end{array} \right\|; \quad \mathbf{Z} = \{z_1, z_2\}; \quad \mathbf{f} = \{f_1, f_2\}.$$

Будем считать, что внешний радиус R фиксирован, а внутренний l определяется при решении задачи. В качестве управления выберем пару $\{\theta(x), l\}$, где $\theta(x) = \{\rho(x), \lambda(x), \mu(x)\}$ — распределение плотности и параметров Ламе. Функционал (1.1), имеющий смысл декремента затухания собственных колебаний сферы, минимизируется при ограничении на массу сферы

$$F_1(\rho, l) \equiv P_* - \eta P \leq 0. \quad (2.3)$$

Здесь P_* — заданное значение массы; η — некоторое число.

Величину $\omega^2(\theta, l)$ можно найти из системы (2.2):

$$\omega^2(\theta, l) = \int_0^1 J_1(x, \mathbf{Z}, \theta, l) dx \Big/ \int_0^1 J_2(x, \mathbf{Z}, \theta, l) dx, \quad (2.4)$$

где

$$J_1(x, \mathbf{Z}, \theta, l) = \left(\frac{4\mu(3\lambda+2\mu)}{r^2(\lambda+2\mu)} z_1^2 + \frac{1}{\lambda+2\mu} z_2^2 \right) r^2, \quad J_2(x, \mathbf{Z}, \theta, l) = \rho z_1^2 r^2,$$

а r зависит от x согласно (2.1). При этом главная часть приращения функционала (2.4) на вариациях

$$\tilde{\theta}(x) = \begin{cases} t(x) = \{\rho(x), \lambda(x), \mu(x)\}, & x \in D, \quad t \in W, \\ \theta(x) = \{\tilde{\rho}(x), \tilde{\lambda}(x), \tilde{\mu}(x)\}, & x \notin D \end{cases} \quad (2.5)$$

($D \in [0, 1]$ — множество малой меры; $W = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ — заданное конечное дискретное множество; m — число различных материалов) имеет вид

$$\delta\omega^2 = \left[\int_0^1 J_2(\cdot, \theta) dx \right]^{-1} \left\{ \int_D [H(\cdot, \tilde{\theta}) - H(\cdot, \theta)] dx + B\delta l \right\}. \quad (2.6)$$

Здесь $H(\cdot, \tilde{\theta}) = \left[J_1(\cdot, \tilde{\theta}) - \omega^2 J_2(\cdot, \tilde{\theta}) - \frac{2}{R-l} r^2 z_2 f_1(\cdot, \tilde{\theta}) \right]$, аналогичный вид имеет $H(\cdot, \theta)$;

$B = \int_0^1 \left[\frac{\partial J_1(\cdot, \theta)}{\partial l} - \omega \frac{\partial J_2(\cdot, \theta)}{\partial l} - \frac{2}{R-l} r^2 z_2 \frac{\partial f_1(\cdot, \theta)}{\partial l} \right] dx$; точкой обозначены пропущенные аргументы x, \mathbf{Z}, l .

Из ограничения (2.3) можно выразить δl , считая, что на вариациях (2.5) $\delta F_1 = 0$:

$$\delta P = \int_D (R-l)(\tilde{\rho}(x) - \rho(x))r^2 dx + B_1 \delta l = 0, \quad (2.7)$$

где $B_1 = \int_0^1 \rho(x)r[(R-l)(2-3x) - l] dx$. Подставив (2.7) в (2.6), окончательно получим

$$\delta F_0 = \delta \text{Im}(\omega) = \int_D \text{Im} \left\{ \left[\int_0^1 J_2(\cdot, \theta) dx \right]^{-1} (2\omega)^{-1} [T(\cdot, \tilde{\theta}) - T(\cdot, \theta)] \right\} dx,$$

где $T(\cdot, \tilde{\theta}) = H(\cdot, \tilde{\theta}) - (B/B_1)(R-l)r^2\tilde{\rho}(x)$.

Построение минимизирующей последовательности управления $[\theta(x), l]$ основывается на негативной формулировке принципа максимума Понтрягина (см. [4]), из которой следует существование в окрестности неоптимального управления $[\theta(x), l]$ нового управления $[\theta(x), l + \delta l]$, которое улучшает конструкцию, удовлетворяя ограничению (2.3). Это управление ищется из условия минимальности δF_0 , т. е.

$$\int_{D_i} \text{Im} \left[\left[\int_0^1 J_2(\cdot, \theta) dx \right]^{-1} (2\omega)^{-1} T(\cdot, \tilde{\theta}) \right] dx = \min_{\theta \in W} \int_{D_i} \text{Im} \left[\left[\int_0^1 J_2(\cdot, \theta) dx \right]^{-1} (2\omega)^{-1} T(\cdot, \theta) \right] dx. \quad (2.8)$$

3. С учетом сказанного выше вычислительный алгоритм строится следующим образом:

1. Интервал $[0, 1]$ разбиваем равномерной сеткой узлов $\{x_n\}$ на достаточно большое число отрезков малой длины, моделирующих множество малой меры D_i .
2. При допустимом управлении $[\theta(x), l]$ находим собственную частоту, решая уравнение (1.7) методом Мюллера [5].
3. Решаем систему (2.2) для найденной частоты, полагая, что на отрезке D_i значение вектора фазовых переменных характеризуется его значением в середине отрезка $x = x_i + h/2$ (h — длина малого отрезка).
4. На отрезке D_i задаем новое управление $\tilde{\theta}$ из условия (2.8).
5. Если новое управление совпадает со старым, то переходим к п. 2, увеличивая индекс малого отрезка на единицу. В противном случае из условия (2.3) вычисляем δl_i , допуская, что $F_1 + \delta F_1 \approx 0$:

$$\delta l_i = \left\{ P_* - \eta \int_0^1 (R-l)[l + x(R-l)]^2 \rho(x) dx - \eta \int_D (R-l)r^2[\tilde{\rho}(x) - \rho(x)] dx \right\} (\eta B_1)^{-1}. \quad (3.1)$$

При этом следует учесть, что мера отрезков D_i и $|\delta l|$ должна быть достаточно малой, чтобы обеспечить использование линейного приближения (3.1).

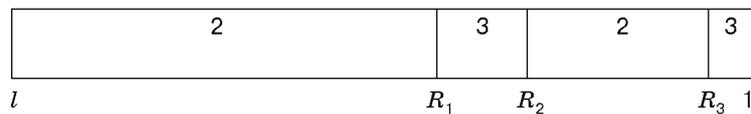
6. С новым управлением $[\tilde{\theta}(x), l_i + \delta l_i]$ переходим к п. 1 и рассматриваем отрезок D_{i+1} .

В качестве примера решим следующую задачу. Пусть задан набор из пяти вязкоупругих материалов, безразмерные характеристики которых приведены в таблице.

Требуется спроектировать сферическую оболочку, максимально гасящую собственные колебания и имеющую массу в 3,5 раза меньше, чем однородная оболочка из самого плотного материала. Начальное приближение для управления выбиралось в виде $[\theta(x), l] = [1; 0,8]$, что соответствовало однородной сфере с внутренним радиусом $l = 0,8$, выполненной из материала 1 (см. таблицу). Такая сфера имеет массу 0,65 и собственную частоту $6,687 - 3,29i$.

Материал	ρ	E	ν	α	\bar{a}	β
1	4,00	90	0,25	0,4	1	0,05
2	2,86	50	0,25	0,2	1	0,05
3	1,75	30	0,25	0,2	1	0,05
4	1,00	15	0,25	0,2	1	0,05
5	2,90	65	0,25	0,3	1	0,05

В результате оптимизации получается четырехслойная сфера, состоящая из чередующихся материалов 2 и 3 (см. таблицу), с внутренним радиусом $l = 0,92587$ и массой 0,1857. Последовательность слоев: $[l, R_1]$ — материал 2, $[R_1, R_2]$ — материал 3, $[R_2, R_3]$ — материал 2, $[R_3, 1]$ — материал 3, где $R_1 = 0,9718$; $R_2 = 0,9778$, $R_3 = 0,99703$ (см. рисунок).



Данная сфера имеет частоту $2,64 - 7,46i$, т. е. ее демпфирующие свойства улучшились более чем в 2 раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бондарев Э. А., Будугаева В. А., Гусев Е. Л. Синтез слоистых оболочек из конечного набора вязкоупругих материалов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 3. С. 5–11.
2. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970.
3. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. М.: Высш. шк., 1976.
4. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 5/IV 1999 г.