Уравнение представляет обобщение известного уравнения Бюргерса — Кортевега-де Вриза. Указаны физические условия, при которых справедливы различные предельные формы уравнения. Показано, что это уравнение имеет две точки бифуркации рождения цикла и, как следствие, периодические решения вблизи этих точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Глухих В. А., Тананаев А. В., Кириллов И. Р.** Магнитная гидродинамика в ядерной энергетике.— М.: Энергоатомиздат, 1987.
2. **Капица П. Л.** Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ.— 1948.— Т. 18, вып. 1.
3. **Демехин Е. А., Шкадов В. Я.** К теории солитонов в системах с диссипацией // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 3.
4. **Непомнящий А. А.** Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1974.— № 3.
5. **Аитов Т. Н., Кириллина Е. М.** Течение электропроводной жидкости в тонком слое со свободной поверхностью при воздействии сильного магнитного поля // Магнитная гидродинамика.— 1985.— № 3.
6. **Алиев И. Н., Шарохин А. П.** Асимптотика поверхности проводящей пленки в поперечном магнитном поле // Там же.
7. **Бернштам В. А., Козырев С. В., Незнамова Е. В., Элькин А. И.** Устойчивость течения пленки проводящей жидкости в наклонном магнитном поле // Магнитная гидродинамика.— 1985.— № 2.
8. **Ватажин А. Е., Любимов Г. А., Регирер С. А.** Магнитогидродинамические течения в каналах.— М.: Наука, 1970.
9. **Шкадов В. Я., Запрянов З. Д.** Течение вязкой жидкости.— М.: Изд-во МГУ, 1984.
10. **Маурин Л. Н., Точигин А. А.** Солитоны на стекающей жидкой пленке // ПМТФ.— 1979.— № 4.
11. **Кудряшов Н. А.** Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // ПММ.— 1988.— Т. 53, вып. 3.

г. Москва *Поступила 7/VI 1988 г., в окончательном варианте — 9/IX 1988 г.*

УДК 539.3

С. П. Киселев, В. М. Фомин, Ю. А. Шитов

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТСКОКА ПОРИСТОГО ЦИЛИНДРА ОТ ЖЕСТКОЙ ПРЕГРАДЫ

Отскок сплошного цилиндра (ударника) от недеформируемой преграды изучался многими авторами (см., например, [1—4]). В данной работе исследуется отскок пористого ударника от жесткой преграды. Показано, что время контакта и характер затекания пор зависят от отношения длины ударника к его радиусу.

1. Описание поведения пористого тела проводится в рамках модели Прандтля — Рейса [5]. Присутствие пор в ударнике учитывается выбором уравнения состояния, которое будет приведено ниже. Такой подход справедлив при достаточно интенсивных нагрузках, когда во фронте пластической ударной волны (УВ) происходит полное затекание пор. В этом случае вещество за фронтом пластической волны является сплошным, а все особенности, связанные с затеканием пор, локализованы на фронте пластической волны. Уравнения Прандтля — Рейса в двухмерной постановке имеют вид [4—6]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}+k\frac{u}{r}\right)=0, \tag{1.1}$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial S_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial S_{rz}}{\partial z}+k\frac{S_{rr}-S_{\varphi\varphi}}{r},$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial S_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial S_{zz}}{\partial z}+k\frac{S_{rz}}{r},\ \frac{\partial r}{\partial t}=u,\ \frac{\partial z}{\partial t}=w,$$

$$\frac{\partial S_{rr}}{\partial t} = 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{3\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial S_{zz}}{\partial t} = 2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{3\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial t} = 2\mu\left(k\frac{u}{r} + \frac{1}{3\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right),$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + S_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), S_{rr}^2 + S_{zz}^2 + S_{\varphi\varphi}^2 + 2S_{rz}^2 \leqslant \frac{2}{3}Y^2,$$

где ρ — плотность; u, w — компоненты вектора скорости вдоль r и z; p — давление; σ_{ij}, S_{ij} — компоненты тензора напряжений и девиатора напряжений; Y — предел текучести; μ — модуль сдвига; $k = 0$ соответствует плоскому, а $k = 1$ — осесимметричному случаю. Система (1.1) замыкается уравнением состояния

(1.2) $$p = p(\rho, m_2), \ \rho = \rho_s m_2, \ m_1 + m_2 = 1$$

(ρ, ρ_s — плотность пористого и сплошного тела, m_2, m_1 — объемная концентрация сплошного тела и пор). Для выбора уравнения состояния воспользуемся уравнением ударной адиабаты, приведенной, например, в [7]. Согласно [7], затекание пор начинается в пластической области при выполнении условия

(1.3) $$p > p_0, \ p_0 = -(2/3)Y \ln(1 - m_2^0), \ m_2^0 = 1 - m_1^0$$

(m_1^0 — начальная пористость). При давлении $p < p_0$ затекания пор не происходит, поэтому

(1.4) $$p = c_0^2(\rho_s - \rho_s^0) + \Gamma\rho\varepsilon, \ m_2 = 0, \ \dot{m}_2 = m_2^0$$

(Γ — коэффициент Грюнайзена). Уравнения (1.4) дополняются уравнением для внутренней энергии ε

(1.5) $$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\left(S_{rr}\frac{\partial u}{\partial r} + S_{zz}\frac{\partial w}{\partial z} + S_{rz}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) + kS_{\varphi\varphi}\frac{u}{r}\right).$$

Область применимости (1.4), (1.5) показана на рис. 1 цифрой *1*. В (1.4) пренебрегается изменением объема пор вследствие упругой разгрузки на порах. После того как p превысит p_0, возникает пластическое затекание пор. На рис. 1 эта область обозначена цифрой *2*. Плотность твердого тела будем считать постоянной:

(1.6) $$\rho_s = \rho_s^1 = \text{const}, \ m_2^0 < m_2 < 1,$$

где ρ_s^1 находится по (1.4) при условии $p = p_0$. Зависимость давления от средней плотности примем в виде

(1.7) $$p = p_0(1 + \beta(\rho - \rho_1)), \ \rho_1 = m_2^0\rho_s^1.$$

Здесь β вычисляется по формуле $p_1 = p_0(1 + \beta(\rho_s^1 - \rho_1))$, а p_1 — из ударной адиабаты. Отметим, что в случае, когда существенную роль играет неполное затекание пор, вместо (1.7) необходимо использовать более точное уравнение (20) из [7]. Ударная адиабата при полном затекании пор определена в [7—9] и имеет вид

(1.8) $$p(m_2^0, \rho) = (\rho_s^0 c_0^2(v_1(h+1) - v_1^2 h/m_2^0 - m_2^0) + (1-h)(v_1 - m_2^0)p_0/m_2^0 + p_0(h - v_1))/(hv_1 - 1),$$
$$\rho_s^1 < \rho < \rho^*, \ \rho^* = h\rho^0, \ v_1 = \rho^0/\rho,$$
$$\rho^0 = m_2^0\rho_s^0, \ m_2 = 1, \ h = 1 + 2/\Gamma.$$

На рис. 1 область применимости (1.8) показана цифрой *3*. Разгрузка из состояния *A* происходит по адиабатическому закону (соответствующая адиабата дана штриховой линией).

Решение системы (1.1)—(1.8) проводилось численно методом Уилкинса [5].

2. Для выяснения особенностей распространения УВ в пористом теле рассмотрена одномерная плоская задача о поршне. Предположим, что в твердое тело с постоянной скоростью w_0 начинает вдвигаться не-

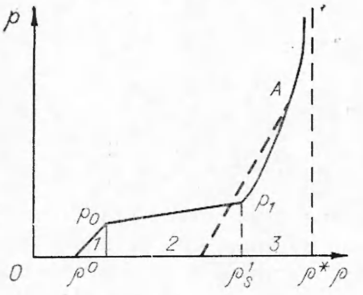

Рис. 1

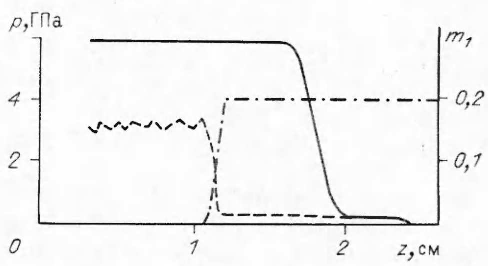

Рис. 2

деформируемый поршень. Тогда впереди поршня побежит упругопластическая волна, за фронтом которой реализуется одноосно-деформированное состояние. Полагая в (1.1) все функции зависящими от z, $k = 0$, $u = 0$, $\partial u/\partial z = 0$, получим одномерную систему уравнений, которая замыкается условиями (1.2)—(1.8). Начальные условия зададим в виде $w = 0$, $\sigma_{ij} = 0$, $\rho_s = \rho_s^0$, $m_2 = m_2^0$, граничное условие — $w = w_0$. В качестве параметров выберем $w_0 = 10^3$ м/с, $\rho_s^0 = 10^3$ кг/м³, $c_0 = 5\cdot 10^3$ м/с, $\Gamma = 1{,}18$, $\mu = 25$ ГПа, $Y = 0{,}3$ ГПа. При данных параметрах рассчитан пористый ($m_2^0 = 0{,}8$) и сплошной ($m_2^0 = 1$) материал.

На рис. 2 приведены распределения давления $p(z)$ и пористости $m_2(z)$ на момент $t = 3$ мкс. Сплошная кривая — $p(z)$ в сплошном теле, штриховая — в пористом, штрихпунктирная — $m_2(z)$. Из рис. 2 следует, что давление за фронтом пластической волны в сплошном теле в 2 раза превышает давление в пористом теле, а соответствующая скорость пластической волны больше в 1,63 раза. Полное затекание пор происходит во фронте пластической волны. Упругий предвестник в сплошном и пористом телах распространяется с одинаковой скоростью, что связано с пренебрежением разгрузкой на порах. Оценим изменение скорости звука вследствие разгрузки на порах. В окрестности поры скорость звука будет уменьшаться от продольной c_l до стержневой c_s. Поскольку в каждом сечении средняя площадь пор равна m_1, для средней скорости звука имеем

$$(2.1)\quad \langle c\rangle_p \simeq m_1 c_s + m_2 c_l,\quad c_s = \sqrt{E/\rho},\quad c_l = c_s\sqrt{(1-\nu)/[(1+\nu)(1-2\nu)]}$$

(ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга). Используя (2.1), получим следующую оценку:

$$(2.2)\quad \langle c\rangle_p/c_l \simeq 1 - m_1(1 - c_s/c_l),\quad c_s/c_l = \sqrt{(1+\nu)(1-2\nu)/(1-\nu)}.$$

Полагая в (2.2) $\nu = 0{,}3$, найдем $c_l/\langle c\rangle_p \simeq 1{,}03$ при $m_1 = 0{,}2$, $c_l/\langle c\rangle_p \simeq 1{,}01$ при $m_1 = 0{,}1$. Отсюда следует, что при маленькой пористости ($m_1 < 0{,}2$) изменение скорости упругого предвестника вследствие разгрузки на порах будет мало.

3. Рассмотрим задачу об отскоке цилиндрического пористого ударника от твердой преграды. Математически задача ставится следующим образом: найти функции u, w, ρ, ε, σ_{ij}, ρ_s, m_2, ρ, удовлетворяющие: системе уравнений (1.1)—(1.8); начальным условиям $w = w_0$, $u = 0$, $\sigma_{ij} = 0$, $\rho = \rho^0$, $m_2 = m_2^0$; граничным условиям: на плоскости контакта ($z = 0$) $w = 0$, $S_{rz} = 0$, при отходе от преграды ($z < 0$) $\sigma_{ij}n_j = 0$. На свободной деформирующейся поверхности ударника ставится условие $\sigma_{ij}n_j = 0$. Одна из важнейших характеристик соударения — время контакта (соударения) τ. Определение τ в данной работе производится аналогично [4]. Введем силу, действующую на границу $F(t) = \int_{s(t)} \sigma_{zz}(z = 0,\ t)\,ds'$, тогда обращение $F(t)$ в

w_0, м/с	m_x^0 ударника				
	короткого			длинного	
	0,8	0,9	1,0	0,9	1,0
300	1,4	1,4	0,92	15,3	14,5
400	1,5	1,32	0,91	17,28	17,0
500	1,5	1,23	0,93	—	—

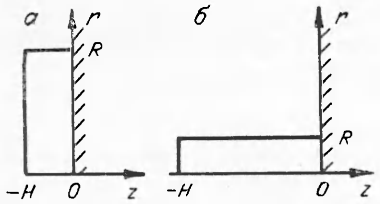

Рис. 3

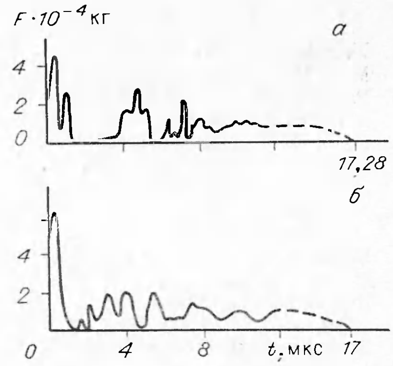

Рис. 4

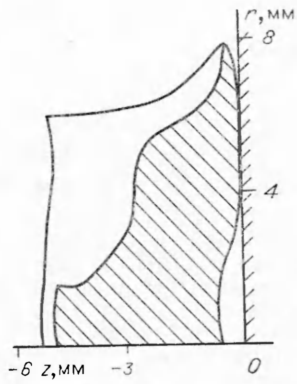

Рис. 5

нуль отвечает моменту отскока. Естественно ожидать, что τ для пористых ударников будет больше, чем для сплошных. Однако расчеты показали, что это предположение выполняется не всегда. Рассчитанные времена контакта τ (мкс) для короткого и длинного ударников приведены в таблице. На рис. 3, *а* показан короткий ударник ($H = 0{,}2$ см, $R = 1$ см), на рис. 3, *б* — длинный ($H = 1$ см, $R = 0{,}4$ см). В качестве материала ударника выбрана сталь с характеристиками $\rho_s{}^0 = 7{,}85$ г/см^3, $\mu = 80$ ГПа, $Y = 1{,}2$ ГПа. Расчеты проводились для различных w_0 и $m_2{}^0$.

Из таблицы следует, что заметное увеличение времени контакта имеет место только для короткого ударника. Для длинного времена контакта пористого и сплошного ударников близки между собой. Последнее связано с тем, что вследствие боковых волн разгрузки происходит падение амплитуды и скорости пластической УВ, возникающей на контакте. Поэтому напряжение снимается упругими волнами, скорости распространения которых для пористого и сплошного ударников совпадают. На рис. 4 дана зависимость $F(t)$ для длинного ударника при $w_0 = 400$ м/с. Случай *а* соответствует пористому ударнику с $m_2{}^0 = 0{,}9$, *б* — сплошному ($m_2{}^0 = 1$). Из рис. 4 видно, что в начальный момент $t \leqslant 2$ мкс сила F пористого ударника существенно меньше, чем сплошного. В дальнейшем, вследствие боковых волн разгрузки, эти силы выравниваются. Отметим другую интересную особенность соударения пористых ударников, связанную с влиянием боковых волн разгрузки. Как следует из (1.3), затекание пор происходит в тех точках, через которые прошел фронт пластической УВ, и выполнено условие $p > p_0$. Поскольку для ударников с $H > R$ УВ может не достигать свободной поверхности, затекания пор во всем объеме ударника происходить не будет. На рис. 5 штриховкой показана область затекания пор на момент $t = 5$ мкс для ударника с $H = 0{,}6$ см, $R = 0{,}5$ см, $w_0 = 300$ м/с, $m_2{}^0 = 0{,}8$. В последующие моменты времени ($t > 5$ мкс) область затекания остается практически неизменной. Фронт отраженной пластической волны отходит от преграды на расстояние порядка 3 мм и практически совпадает с границей области затекания. Некоторая вытянутость области затекания вблизи оси связана с усилением амплитуды волн при их схождении к оси. Для короткого ударника можно пренебречь влиянием боковой разгрузки и считать движение близким к одномерному. В этом случае УВ, возникающая на контактной поверхности, достигает свободной поверхности и отражается волной разгрузки. Время контакта определяется скоростью распространения УВ. Как было показано в п. 2, скорость УВ в пористом теле существенно меньше, чем в сплошном, поэтому время контакта больше.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Уилкинс М. Л., Гуинан М. У.** Удар цилиндра по жесткой преграде // Механика.— М., 1973.— № 3.
2. **Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А.** Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках.— М.: Физматгиз, 1961.
3. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности.— М.: ГИТЛ, 1956.
4. **Гулидов А. И., Фомин В. М.** Численное моделирование отскока осесимметричных стержней от твердой преграды // ПМТФ.— 1980.— № 3.
5. **Уилкинс М. Л.** Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике.— М.: Мир, 1967.
6. **Баум Ф. А., Орленко Л. П., Станюкович К. П. и др.** Физика взрыва.— М.: Наука, 1975.
7. **Дунин С. З., Сурков В. В.** Эффекты диссипации энергии и влияние плавления на ударное сжатие пористых тел // ПМТФ.— 1982.— № 1.
8. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.
9. **Херман В.** Определяющее уравнение для динамического сжатия пластических пористых материалов // Механика.— М., 1970.— № 5.

г. Новосибирск *Поступила 26/XII 1988 г.*

УДК 533.95:538.4

А. П. Кузнецов

ЭКСПРЕСС-ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РЕЛЬСОТРОННОГО УСКОРИТЕЛЯ

По поводу электромагнитного ускорения тел существует весьма обширная литература как обзорного [1, 2], так и конкретного плана [3, 4]. Большинство результатов, описанных в этих работах, получено с помощью численных методов. Их аналитическое обобщение на всю гамму вариантов такой многопараметрической задачи, какой является задача о рельсотроне, при этом оказывается затрудненным. В связи с чем полезно найти такие соотношения, связывающие характеристики разрядного контура с параметрами ускоряемого тела, которые позволили бы без претензий на особую точность, но качественно верно и быстро сделать правдоподобные оценки интересующих величин. Следует отметить, что в [5] приведены важные соотношения, касающиеся учета влияния величины активного сопротивления контура на асимптотику КПД преобразования энергии накопителя в кинетическую энергию. Настоящая работа предполагает сделать доступными быстрой оценке и величины электрических характеристик разрядного контура в зависимости от требований, предъявляемых к тракту ускорения (длина разгона, допустимые перегрузки, требуемая скорость) как для одноступенчатого, так и для многоступенчатого ускорителя.

1. Для постановки задачи воспользуемся функцией Лагранжа $\mathscr{L}$, которая для идеального рельсотрона имеет вид

$$\mathscr{L} = \frac{m\dot{q}_1^2}{2} + \frac{(L_0 + kq_1)}{2}\dot{q}_2^2 - \frac{q_2^2}{2C}. \tag{1.1}$$

Здесь обобщенные координаты q_1 и q_2 — соответственно путь, пройденный телом, и заряд конденсатора накопителя энергии; L_0 — начальная индуктивность ускорителя; C — емкость конденсатора; k — погонная индуктивность ускорителя; m — масса ускоряемого тела.

Аналитическое решение уравнений движения, порождаемых (1.1), не найдено, и, как сказано выше, теоретическое рассмотрение процесса ускорения требует численного решения этих уравнений.

Ниже предлагается следующая процедура экспресс-оценок параметров рельсотронного ускорителя. Рассмотрим уравнение «движения» для q_2:

$$\ddot{q}_2 L + \dot{q}_2\dot{L} + q_2/C = 0 \tag{1.2}$$

$L = L_0 + kq_1$). Поставим в соответствие (1.2) уравнение

$$\ddot{q} + \frac{2n}{(n+2)\,t_*}\dot{q} + \frac{2q}{L_0C\,(n+2)} = 0, \tag{1.3}$$