УДК 533.72

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ПУАЗЕЙЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНО-СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

В. Н. Попов, И. В. Тестова*, А. А. Юшканов**

Архангельский государственный технический университет, 163002 Архангельск
* Поморский государственный университет, 163002 Архангельск
** Московский государственный областной университет, 105005 Москва
E-mail: popov.vasily@pomorsu.ru

В рамках кинетического подхода в изотермическом приближении построено аналитическое (в виде ряда Неймана) решение задачи о течении разреженного газа в плоском канале с бесконечными стенками при наличии параллельного им градиента давления (течении Пуазейля). В качестве основного уравнения используется эллипсоидально-статистическая модель кинетического уравнения Больцмана, а в качестве граничного условия — модель диффузного отражения. С учетом полученной функции распределения вычислены плотности потоков массы и тепла в направлении градиента давления на единицу длины канала в направлении оси y' и построены профили массовой скорости газа и потока тепла в канале. Выполнен анализ результатов, полученных при переходе к континуальной и свободномолекулярной моделям течения, и проведено их сравнение с аналогичными результатами, полученными численными методами.

Ключевые слова: течение газа в канале, течение Пуазейля, кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, точные аналитические решения.

Аналитическое решение эллипсоидально-статистической (ЭС) модели кинетического уравнения Больцмана в задаче о течении Пуазейля (течении газа в плоском канале с бесконечными стенками при наличии параллельного им градиента давления) с использованием граничного условия почти зеркального отражения построено в [1]. Целью настоящей работы является построение аналитического решения ЭС-модели кинетического уравнения Больцмана в задаче о течении Пуазейля с использованием модели диффузного отражения молекул газа стенками канала. Следует отметить, что данная модель граничного условия является более реалистичной по сравнению с использованной в [1], особенно для технических (не обработанных специальным образом) поверхностей. В то же время при использовании данного граничного условия возникает ряд трудностей, которых удалось избежать в [1]. В частности, необходимо решать задачу факторизации коэффициента краевой задачи, к которой с использованием методов теории функции комплексной переменной сводится сингулярное интегральное уравнение, получаемое в результате подстановки граничных условий в общее решение исходного уравнения. Кроме того, нужно решать интегральное уравнение для нахождения коэффициентов в разложении решения задачи по собственным векторам непрерывного спектра. Для решения указанных выше проблем использовались методы, разработанные в [2]. Обзор результатов, полученных при решении задачи Пуазейля с использованием численных методов, представлен в [3].

1. Постановка задачи. Построение функции распределения молекул газа. Рассмотрим канал, представляющий собой две параллельные бесконечные плоскости (стенки канала), расстояние между которыми равно D'. Оси y', z' прямоугольной декартовой системы координат расположены в плоскости, параллельной стенкам канала. Расстояние между стенками канала является его толщиной ($d' = D'/2$). Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент давления, параллельный его стенкам. Направим ось z' декартовой системы координат вдоль градиента давления. Представим в выбранной системе координат ЭС-модель кинетического уравнения Больцмана:

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{2}{3}\,\frac{p}{\eta_g}\,(\Phi_{eq} - f). \tag{1.1}$$

Здесь $f(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v})$ — функция распределения молекул газа по координатам и скоростям; p, η_g — давление и динамическая вязкость газа; $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{r}'$ — скорости поступательного движения и размерные радиус-векторы координат центров масс молекул газа; $\Phi_{eq}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v})$ — локально-равновесный анизотропный максвеллиан [4].

Будем считать малым относительный перепад давления на длине свободного пробега молекул газа l_g. Тогда задача допускает линеаризацию, и функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям можно представить в виде

$$f(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}) = n(z)\beta^{3/2}\pi^{-3/2}\,\exp{(-C^2)}[1 + C_z G_n Z(x, C_x)]. \tag{1.2}$$

Здесь $\boldsymbol{C} = \sqrt{\beta}\,\boldsymbol{v}$ — безразмерная скорость молекул газа; $\beta = m/(2k_{\rm B}T)$; m — масса молекулы газа; $k_{\rm B}$ — постоянная Больцмана; T — температура газа; $G_n = (1/p)\,dp/dz$ — безразмерный градиент давления в направлении оси z'; $Z(x, \boldsymbol{C})$ — линейная поправка к локально-равновесной функции распределения; $x = 2x'/(3l_g)$, $z = 2z'/(3l_g)$ — безразмерные координаты; средняя длина свободного пробега молекул газа связана с динамической вязкостью газа соотношением $l_g = \eta_g\beta^{-1/2}/p$.

Подставляя (1.2) в (1.1) и линеаризуя $\Phi_{eq}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v})$ относительно абсолютного максвеллиана, получаем уравнение для нахождения $Z(x, \mu)$ ($\mu = C_x$)

$$\mu\,\frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, \mu) + 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp{(-\tau^2)}(1 - \mu\tau)Z(x, \tau)\,d\tau. \tag{1.3}$$

Общее решение (1.3) имеет вид [1]

$$Z(x, \mu) = \gamma x^2 - 2x\mu + 2\mu^2 + A_0 + A_1(x - \gamma^{-1}\mu) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{x}{\eta}\Big)F(\eta, \mu)a(\eta)\,d\eta, \tag{1.4}$$

$$F(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\eta P\,\frac{1}{\eta - \mu} + \exp{(\eta^2)}\lambda(\eta)\delta(\eta - \mu),$$

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,z\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp{(-\mu^2)}}{\mu - z}\,d\mu,$$

где $P(1/z)$ — распределение в смысле главного значения; $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака; $\gamma = 3/2$; A_0, A_1, $a(\eta)$ — неизвестные параметры и функция, определяемые ниже. С использованием модели диффузного отражения граничные условия на верхней и нижней стенках канала записываются в виде

$$Z(\pm d, \mp\mu) = 0, \qquad \mu > 0. \tag{1.5}$$

С учетом симметрии задачи выполняется условие $Z(-d,-\mu) = Z(d,\mu)$ [4]. В силу этого условия необходимо положить $A_1 = 0$, $a(-\eta) = a(\eta)$. Тогда, подставляя (1.4) в (1.5), получаем интегральное уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\eta b(\eta,-d)}{\eta-\mu}\,d\eta + \exp(\mu^2) b(\mu,-d)\lambda(\mu) = f(\mu), \qquad \mu > 0; \tag{1.6}$$

$$f(\mu) = -\gamma d^2 - 2\mu^2 - A_0 - 2d\mu - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau b(\tau,d)}{\tau+\mu}\,d\tau,$$

$$b(\eta,x) = \exp(-x/\eta) a(\eta).$$

Решение (1.6) будем искать с использованием методов краевых задач теории функций комплексной переменной. С этой целью введем вспомогательную функцию, заданную интегралом типа интеграла Коши:

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\eta b(\eta,-d)}{\eta-z}\,d\eta,$$

и сведем (1.6) к краевой задаче

$$N^+(\mu)X^+(\mu) - N^-(\mu)X^-(\mu) = \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)}\, 2\sqrt{\pi}\, i\mu f(\mu)\exp(-\mu^2), \qquad \mu > 0,$$

$$X(z) = \frac{1}{z}\exp\Big(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\theta(\tau)-\pi}{\tau-z}\,d\tau\Big), \qquad \theta(\tau) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}\frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\,\tau\exp(-\tau^2)}.$$

Из условия разрешимости построенной краевой задачи находим

$$A_0 = -\gamma d^2 + 2Q_2 + 2dQ_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \tau X(-\tau) a(\tau)\exp\Big(-\frac{d}{\tau}\Big)\,d\tau, \tag{1.7}$$

где $Q_1 = -1{,}016\,19$, $Q_2 = -1{,}266\,32$ — интегралы Лойалки [5]; функция $a(\mu)$ определяется из интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$a(\mu) = \frac{\exp(-\mu^2)X(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2}\Big(Q_1 - \mu - d - {}$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau X(-\tau)a(\tau)}{\tau+\eta}\exp\Big(-\frac{d}{\tau}\Big)\,d\tau\Big)\exp\Big(-\frac{d}{\mu}\Big), \quad \mu > 0. \tag{1.8}$$

Решение (1.8) будем искать в виде ряда по степеням λ

$$a(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k a_k(\mu), \qquad \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}. \tag{1.9}$$

Подставляя (1.9) в (1.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем систему рекуррентных соотношений

$$a_0(\tau)=h(\tau)(Q_1-\tau-D/2),\qquad a_1(\tau)=h(\tau)\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(\eta)(Q_1-\eta-D/2)\,d\eta}{\eta+\tau},$$

$$a_2(\tau)=h(\tau)\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(\eta)\,d\eta}{\eta+\tau}\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(\mu)(Q_1-\mu-D/2)\,d\mu}{\mu+\eta},\tag{1.10}$$

где

$$h(\tau)=\frac{X(-\tau)}{|\lambda^+(\tau)|^2}\exp\Big(-\tau^2-\frac{D}{2\tau}\Big),\qquad g(\tau)=\frac{\tau X^2(-\tau)}{|\lambda^+(\tau)|^2}\exp\Big(-\tau^2-\frac{D}{\tau}\Big).$$

Подставляя (1.9), (1.10) в (1.7), находим

$$A_0=-\frac{\gamma D^2}{4}+2Q_2+DQ_1+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k I_k,\quad I_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}g_1(\tau)(Q_1-\tau-D/2)\,d\tau,$$

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}g_1(\tau)\,d\tau\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(\eta)(Q_1-\eta-D/2)\,d\eta}{\eta+\tau},$$

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}g_1(\tau)\,d\tau\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(\eta)\,d\eta}{\eta+\tau}\int\limits_0^{+\infty}\frac{g(\mu)(Q_1-\mu-D/2)\,d\mu}{\mu+\eta}.$$

Здесь $g_1(\tau)=g(\tau)$. Таким образом, найдены неизвестные параметры A_0, A_1 и функция $a(\eta)$ в (1.4), а следовательно, построена функция распределения молекул газа по координатам и скоростям.

2. Вычисление макропараметров газа в канале. С учетом построенной функции распределения вычислим скорость газа в канале $u'_z(x')$ и плотность потока массы J'_M в направлении оси z' на единицу длины канала в направлении оси y':

$$u'_z(x')=\frac{1}{n}\int v_z f(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{v})\,d^3\boldsymbol{v}=\Big(\frac{2k_{\mathrm{B}}T}{m}\Big)^{1/2}U_z(x)\,\frac{1}{p}\,\frac{dp}{dz}.$$

Здесь

$$U_z(x)=\frac{1}{\pi^{3/2}}\int\exp{(-C^2)}\,C_z^2 Z(x,C_x)\,d^3\boldsymbol{C}\ \ —\tag{2.1}$$

безразмерная массовая скорость газа. Подставляя (1.4) в (2.1), в результате интегрирования получаем

$$U_z(x)=\frac{1}{2}\Big(\gamma\Big(x^2-\frac{D^2}{4}\Big)+DQ_1+2Q_2+1+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k(I_k+J_k(x))\Big).\tag{2.2}$$

Интегралы $J_k(x)$ отличаются от I_k тем, что в них вместо $g_1(\tau)$ входит функция

$$\gamma(x,\tau)=\frac{X(-\tau)}{|\lambda^+(\tau)|^2}\exp{(-\tau^2)}\Big[\exp\Big(\frac{x-D/2}{\tau}\Big)+\exp\Big(-\frac{x+D/2}{\tau}\Big)\Big].$$

Плотность безразмерного потока массы J_M в направлении оси z' на единицу длины канала в направлении оси y' вычислим по формулам, полученным в [6, 7]:

$$J_M = -\frac{2}{D^2} \int\limits_{-D/2}^{D/2} U_z(x)\,dx. \tag{2.3}$$

Подставляя (2.2) в (2.3) и выполняя интегрирование, получаем

$$J_M = \frac{\gamma D}{6} - Q_1 - \frac{1}{D}\Big(2Q_2 + 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k I_k\Big) - \frac{2}{D^2} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K_k. \tag{2.4}$$

Интегралы K_k отличаются от I_k тем, что в них вместо $g_1(\tau)$ входит функция

$$\zeta(\tau) = \frac{\tau X(-\tau)}{|\lambda^+(\tau)|^2} \exp{(-\tau^2)} \Big[1 - \exp\Big(-\frac{D}{\tau}\Big)\Big].$$

Аналогично вычислим z-компоненту вектора плотности потока тепла $q'_z(x')$ и плотность потока тепла J'_Q в направлении оси z' на единицу длины канала в направлении оси y'. С учетом (1.2) находим [8]

$$q'_z(x') = \int \frac{m}{2}\,[v_z - u_z(\boldsymbol{r}')]\,|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}')|^2 f(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v})\,d^3\boldsymbol{v} =$$
$$= \frac{nk_{\mathrm{B}}T}{\sqrt{\beta}} \int \exp{(-C^2)} C_z [1 + C_z G_n Z(x, C_x)]\,d^3\boldsymbol{C} = \frac{nk_{\mathrm{B}}T}{\sqrt{\beta}}\, q_z(x)\,\frac{1}{p}\,\frac{dp}{dz},$$

где $q_z(x)$ — безразмерная z-компонента вектора плотности потока тепла:

$$q_z(x) = \pi^{-3/2} \int \exp{(-C^2)}\, C_z^2 \Big(C^2 - \frac{5}{2}\Big) Z(x, C_x)\,d^3\boldsymbol{C}. \tag{2.5}$$

Подставляя (1.4) в (2.5), в результате интегрирования получаем

$$q_z(x) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k J_k(x)\Big). \tag{2.6}$$

Плотность безразмерного потока тепла J_Q в направлении оси z' на единицу длины канала в направлении оси y' вычислим по формулам, полученным в [6, 7]:

$$J_Q = -\frac{2}{D^2} \int\limits_{-D/2}^{D/2} q(x)\,dx. \tag{2.7}$$

Подставляя (2.6) в (2.7) и выполняя интегрирование, имеем

$$J_Q = -\frac{1}{D^2}\Big(D - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K_k\Big). \tag{2.8}$$

3. Анализ полученных результатов. Значения интегралов, входящих в (2.2), (2.4), (2.6), (2.8), найдены с использованием численных методов путем последовательного сведения их к определенным интегралам. Поскольку подынтегральные выражения, входящие в указанные формулы, содержат множитель $\exp{(-\mu^2)}$, эти интегралы достаточно быстро сходятся. При их вычислении в качестве верхнего предела интегрирования принималось значение, равное пяти. Число членов ряда, которое учитывалось при нахождении сумм,

Таблица 1

Зависимость значений $\lambda^k K_k$ от толщины канала

D'/l_g	$\lambda^k K_k$				
	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
0,1	0,067 953 4	−0,005 103 1	0,000 361 7	−0,000 025 2	0,000 001 7
1,0	0,524 129 6	−0,015 125 5	0,000 373 9	−0,000 009 1	—
10,0	2,579 739 0	−0,001 081 2	—	—	—

существенно зависело от толщины канала. Так, при вычислении суммы ряда, входящего в (2.8), при $D' = 0{,}1 l_g$ учитывались пять членов ряда, а при $D' = l_g$ — только два (табл. 1). Аналогичная ситуация имела место при вычислении сумм рядов, входящих в (2.2), (2.3), (2.6). Проведенные расчеты показали, что при $D' > 10 l_g$ можно ограничиться только одним (нулевым) членом ряда. При дальнейшем увеличении D' при вычислении сумм, входящих в (2.6), можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными $\exp(-D/\mu)$. В этом случае имеем

$$J_M = \frac{\gamma D}{6} - Q_1 + \frac{2Q_1^2 - 1}{D} + \frac{4(Q_3 + Q_1 Q_2)}{D^2}, \tag{3.1}$$

где $Q_3 = -1{,}8207$. Проведенные расчеты показали, что при $D' > 25$ различие значений, полученных на основе разложений (3.1) и (2.4), не превышает 1 %.

В табл. 2, 3 приведены значения J_M и J_Q, вычисленные согласно (2.4) и (2.8), а также аналогичные результаты, полученные в [6, 7] с использованием линеаризованного уравнения Больцмана для молекул, представляющих собой жесткие сферы (LBE-модели), модели Шахова кинетического уравнения Больцмана (S-модели) и модели с синтетическим оператором столкновений (CES-модели). Из табл. 2, 3 следует, что в широком диапазоне значений D' результаты, полученные в настоящей работе, хорошо согласуются с аналогичными результатами, полученными численными методами с использованием линеаризованного уравнения Больцмана для молекул, представляющих собой жесткие сферы, и кинетического уравнения Больцмана для S-, CES-моделей.

На рис. 1 приведены профили массовой скорости газа в канале $U_z(x)$ ($x = \xi d$, $\xi \in [0;1]$), рассчитанные по формуле (2.2) при различных значениях D', а также профили массовой скорости, полученные в рамках уравнений гидродинамики с условиями скольжения на стенках канала [4]

$$U_z(x) = \frac{1}{2}\Big(\gamma\Big(x^2 - \frac{D^2}{4}\Big) + Q_1 D\Big). \tag{3.2}$$

Из рис. 1 следует, что с уменьшением толщины канала различие зависимостей $U_z(\xi)$, полученных по формулам (3.2) и (2.2), становится более существенным. При $l_g \to 0$ (гидродинамическое приближение) подынтегральные выражения в интегралах, входящих в (2.2), стремятся к нулю, и (2.2) асимптотически переходит в (3.2). На рис. 2 приведены профили вектора потока тепла в канале, рассчитанные по формуле (2.6) при различных значениях D'.

В случае свободномолекулярного течения ($l_g \to \infty$) в (1.1) можно пренебречь интегралом столкновений. При этом функция $Z(x,\mu)$ определяется из уравнения

$$\mu\,\frac{\partial Z}{\partial x} + 1 = 0.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (1.5), имеет вид

$$Z(x,\mu) = -(x/\mu + d/|\mu|).$$

Таблица 2

Плотность потока массы газа J_M в направлении оси z' на единицу длины канала в направлении оси y' при $D' = kl_g$

k	J_M			
	ЭС-модель	S-модель [6]	CES-модель [6]	LBE-модель [7]
0,1	2,1913	2,0395	1,9259	1,9499
1,0	1,6199	1,5536	1,4863	1,5067
10,0	2,7989	2,7799	2,7220	2,7296

Таблица 3

Плотность потока тепла J_Q в направлении оси z' на единицу длины канала в направлении оси y' при $D' = kl_g$

k	J_Q			
	ЭС-модель	S-модель [6]	CES-модель [6]	LBE-модель [7]
0,1	−0,782 59	−0,732 680	−0,790 870	−0,799 280
1,0	−0,353 92	−0,365 460	−0,404 560	−0,389 080
10,0	−0,091 98	−0,098 147	−0,093 046	−0,089 950

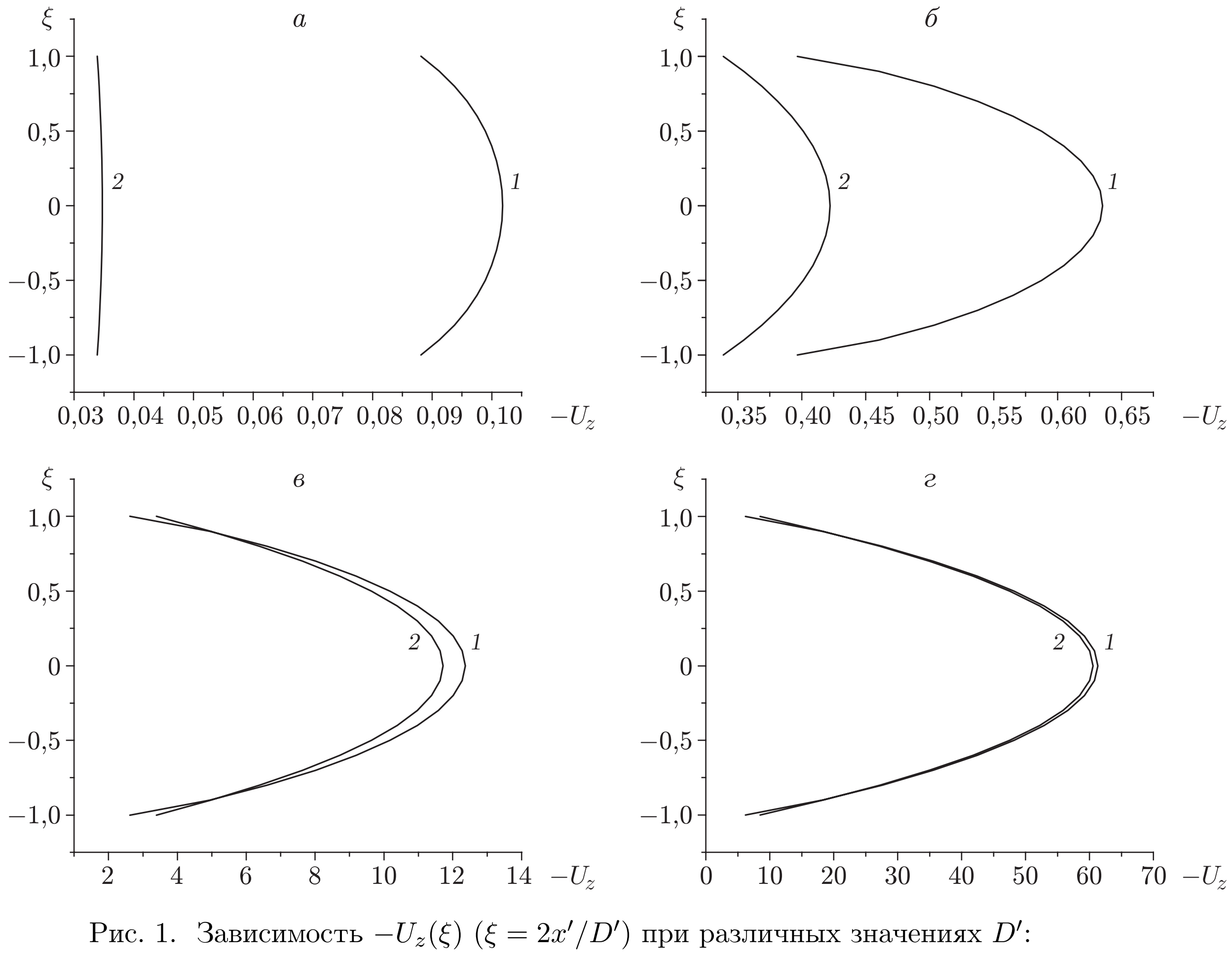

Рис. 1. Зависимость $-U_z(\xi)$ ($\xi = 2x'/D'$) при различных значениях D': *а* — $D' = 0{,}1l_g$, *б* — $D' = l_g$, *в* — $D' = 10l_g$, *г* — $D' = 25l_g$; *1* — результаты расчета по формуле (2.2), *2* — результаты расчета по формуле (3.2)

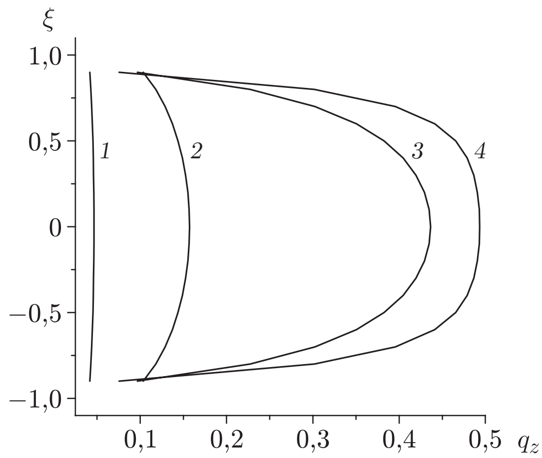

Рис. 2. Зависимость $q_z(\xi)$ при различных значениях D':
1 — $D' = 0{,}1l_g$; *2* — $D' = l_g$; *3* — $D' = 10l_g$; *4* — $D' = 25l_g$

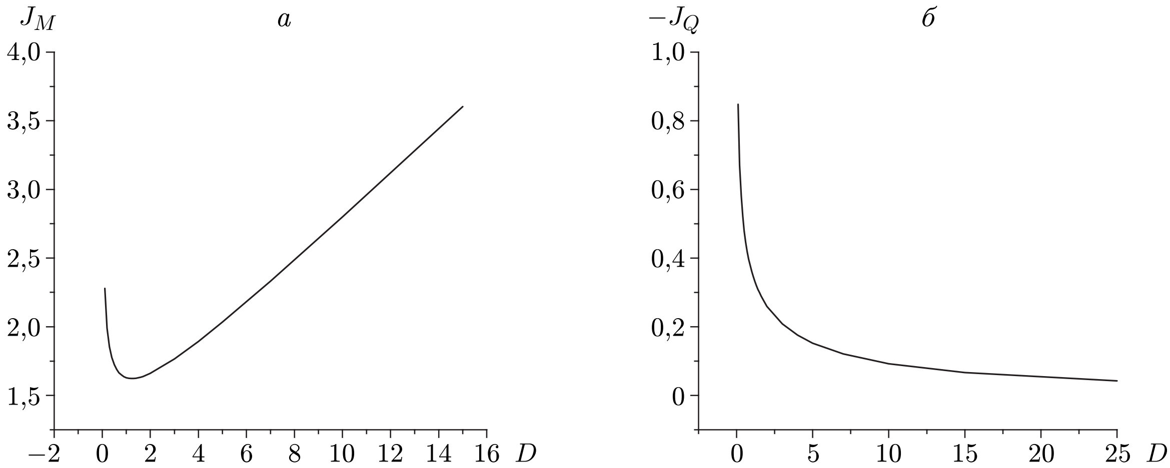

Рис. 3. Зависимости $J_M(D)$ (*а*) и $-J_Q(D)$ (*б*)

Поскольку в случае свободномолекулярного течения учитываются только столкновения молекул газа со стенками канала, для безразмерной компоненты скорости молекул газа $C_x = \mu$ должно выполняться условие $|\mu| > D$ [4]. Тогда

$$U_z(x) = -\frac{1}{2\pi^{1/2}} \int\limits_{|\mu|>D} \left(\frac{x}{\mu} + \frac{d}{|\mu|}\right) \exp\left(-\mu^2\right) d\mu \approx -\frac{d}{\pi^{1/2}} \ln D,$$

$$q_z(x) = -\frac{1}{2\pi^{1/2}} \int\limits_{|\mu|>D} \left(\frac{x}{\mu} + \frac{d}{|\mu|}\right)\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) \exp\left(-\mu^2\right) d\mu \approx \frac{d}{2\pi^{1/2}} \ln D,$$

$$J_M \approx -\pi^{-1/2} \ln D, \qquad J_Q \approx (\pi^{-1/2}/2) \ln D,$$

т. е. в случае свободномолекулярного течения плотности потоков J_M и J_Q имеют логарифмическую особенность [4]. На рис. 3 приведены зависимости $-J_Q(D)$ и $J_M(D)$. На графике зависимости $J_M(D)$ имеется минимум, что согласуется с полученными в данной работе результатами и выводами, приведенными в [4].

Заключение. В рамках ЭС-модели кинетического уравнения Больцмана построено решение задачи о течении Пуазейля в виде ряда Неймана. В случае диффузного отражения молекул газа от стенок канала получены аналитические выражения для расчета плотностей потоков массы и тепла в направлении градиента давления на единицу длины канала в направлении оси y'. Проведен анализ результатов, полученных при переходе к континуальной и свободномолекулярной моделям течения. В результате численного анализа установлено, что полученные результаты согласуются с аналогичными результатами, полученными на основе численных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Латышев А. В., Юшканов А. А.** Задача Пуазейля для эллипсоидально-статистического уравнения и почти зеркальных граничных условий // Журн. техн. физики. 1998. Т. 68, № 11. С. 27–32.
2. **Латышев А. В.** Неоднородные кинетические задачи. Метод сингулярных интегральных уравнений: Моногр. / А. В. Латышев, В. Н. Попов, А. А. Юшканов. Архангельск: Помор. гос. ун-т, 2004.
3. **Шарипов Ф. М.** Движение разреженных газов в каналах и микроканалах / Ф. М. Шарипов, В. Д. Селезнев. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2008.
4. **Черчиньяни К.** Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973.
5. **Loyalka S. K.** The Q_n and F_n integrals for the BGK model // Transport Theory Statist. Phys. 1975. V. 4. P. 55–65.
6. **Siewert C. E.** Poiseuille, thermal creep and Couette flow: results based on the CES model linearized Boltzmann equation // Eur. J. Mech. B. Fluids. 2002. V. 21. P. 579–597.
7. **Siewert C. E.** The linearized Boltzmann equation: concise and accurate solutions to basic flow problems // Z. angew. Math. Phys. 2003. Bd 54. S. 273–303.
8. **Латышев А. В.** Аналитические решения граничных задач для кинетических уравнений / А. В. Латышев, А. А. Юшканов. М.: Моск. гос. обл. ун-т, 2004.

Поступила в редакцию 21/VI 2010 г.,
в окончательном варианте — 12/IX 2011 г.