

КОНВЕКТИВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СЛОЯ ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОПЕРЕЧНОГО ДВИЖЕНИЯ РЕАГЕНТА

Е. А. Еремин, А. К. Колесников
(Пермь)

В работе исследуются условия возникновения конвекции в горизонтальном слое химически активной жидкости с проницаемыми границами, поддерживаемыми при одинаковой температуре. В результате реакции нулевого порядка во всем объеме жидкости выделяется тепло. Через проницаемые границы слоя с постоянной скоростью осуществляется однородная поперечная прокачка реагента. Возможность существования в такой системе не зависящих от времени процессов переноса тепла, при которых свободная конвекция отсутствует, проанализирована в работе [1]. Ниже приводится решение линейной задачи конвективной устойчивости описанных в [1] стационарных теплопроводных режимов. Для различных значений параметров получены границы устойчивости, определяющие порог возникновения конвекции.

Конвективная устойчивость реагирующих жидкостей в отсутствие продува рассматривалась в [2—4]. Влияние поперечного движения на конвективную устойчивость горизонтального слоя нереагирующей жидкости изучено в работе [5].

Бесконечный горизонтальный слой несжимаемой химически активной жидкости ограничен твердыми проницаемыми плоскостями $z = 0$ и $z = d$. В жидкости происходит гомогенная экзотермическая реакция с высоким тепловыделением, позволяющим описывать процесс моделью реакции нулевого порядка. В соответствии с законом Аррениуса зависимость мощности тепловых источников от температуры описывается функцией $k_0 \exp[-E/(RT)]$, где T — абсолютная температура; R — газовая постоянная; предэкспоненциальный множитель k_0 и энергия активации E — параметры реакции. Границы слоя поддерживаются при постоянной температуре T_0 . Через нижнюю границу происходит однородное вдувание реагента со скоростью v_0 , а через верхнюю — однородное отсасывание с такой же скоростью. Это приводит к существованию в слое в невозмущенном состоянии поперечного течения с однородной вертикальной скоростью v_0 .

В режиме бесконвективного теплообмена в реагенте, совершающем однородное поперечное движение, возможны, как следует из [1], стационарные процессы теплопереноса. Соответствующие температурные распределения описываются решениями одномерного нелинейного уравнения теплопроводности, имеющего в безразмерной форме вид

$$(1) \quad \Theta_0'' - \text{Pe} \Theta_0' + \delta \exp[\Theta_0/(1 + \beta_0 \Theta_0)] = 0,$$

с граничными условиями $\Theta_0(0) = \Theta_0(1) = 0$. Здесь $\Theta_0(z)$ — невозмущенное значение температуры, отсчитываемой от температуры границ слоя; единицей измерения температуры служит RT_0^2/E ; $\text{Pe} = v_0 d / \chi$ — число Пекле, характеризующее интенсивность продува; $\delta = Q k_0 E d^2 \exp[-E/(RT_0)] / (\kappa RT_0^2)$ — параметр Франк-Каменецкого; $\beta_0 = RT_0/E$ — малый параметр, значения которого для реакций горения не превышают 0,05, и в дальнейшем, как обычно [4, 6], полагаем $\beta_0 = 0$; Q — тепловой эффект реакции; χ и κ — коэффициенты температуро- и теплопроводности.

В частном случае при $\text{Pe} = 0$ (отсутствие продува) уравнение (1) сводится к известному уравнению стационарной теории теплового взрыва, решение которого приведено в [6]. Согласно [6], стационарные состояния

системы существуют лишь в интервале $0 \leq \delta \leq \delta_{кр}$. Верхняя граница этого интервала $\delta_{кр} = 3,514$ определяет порог теплового взрыва. В области $\delta < \delta_{кр}$ в жидкости возможны два равновесных теплопроводных режима. Соответствующие стационарные распределения температуры симметричны относительно середины слоя, где температура максимальна.

В общем случае ($Pe \neq 0$) решение краевой задачи (1) показывает [1], что для фиксированного числа Пекле в ограниченной сверху величиной

$\delta_{кр}$ области значений δ в реагенте, как и при $Pe = 0$, существуют два стационарных режима теплопереноса. Величина $\delta_{кр}$ по-прежнему характеризует границу теплового взрыва и возрастает с увеличением значений Pe . Зависимость $\delta_{кр}(Pe)$ при $Pe < 4$ хорошо аппроксимируется полиномом

$$\delta_{кр} = 3,514 + 0,0485Pe^2 + 0,0015Pe^4.$$

Поперечное течение для обоих решений нарушает симметрию температурных профилей, и зона наибольшего разогрева смещается к границе $z = 1$. На фиг. 1 приведена зависимость максимальной температуры в слое Θ_{om} от параметра Франк-Каменецкого δ для нескольких чисел Пекле ($Pe = 0; 4; 8$) и схематично показано типичное в случае продува невозмущенное распределение температуры. При любых значениях Pe верхнее стационарное решение в режиме теплопроводности оказывается неустойчивым.

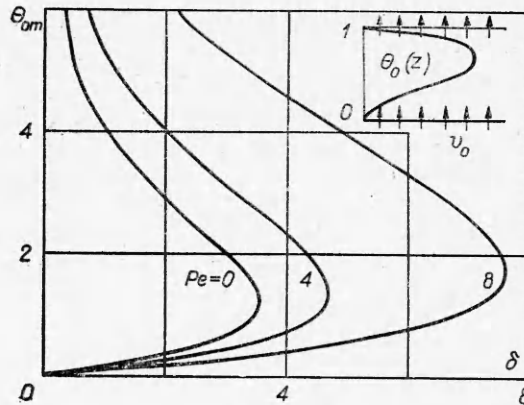
В подвижной реагирующей среде вследствие конвективной неустойчивости может нарушиться и нижний стационарный теплопроводный режим (в верхней части слоя стратификация плотности потенциально неустойчива). Представляющая наибольший интерес конвективная устойчивость этого режима и будет исследована в дальнейшем.

Уравнения конвекции в приближении Буссинеска для однородной химически активной жидкости [2—4] отличаются от обычных [7] наличием в уравнении теплопроводности члена, описывающего экспоненциально-растущее с температурой внутреннее тепловыделение. Для определения условий возникновения конвекции рассмотрим поведение малых возмущений скорости v , температуры Θ и давления p . Безразмерные линеаризованные уравнения возмущений имеют вид

$$(2) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{Pe}{Pr} (\gamma \nabla) v = -\nabla p + \Delta v + Ra \Theta \gamma,$$

$$Pr \frac{\partial \Theta}{\partial t} + Pe \gamma \nabla \Theta + v \Delta \Theta_0 = \Delta \Theta + \delta \Theta \exp \Theta_0, \quad \text{div } v = 0,$$

где t — время; γ — единичный вектор, направленный вверх по оси z ; $Pr = \nu/\chi$ — число Прандтля; $Ra = g\beta RT_0^2 d^3 / E\nu\chi$ — число Рэлея; g — ускорение свободного падения; β и ν — коэффициенты объемного расширения и кинематической вязкости жидкости. В качестве единиц измерения расстояния и температуры, как и в стационарной задаче (1), выбраны величины d и RT_0^2/E , а для времени, скорости и давления — соответственно d^2/ν , χ/d и $\rho_0 \chi \nu / d^2$.



Фиг. 1

На границах слоя возмущения скорости и температуры обращаются в нуль

$$(3) \quad \mathbf{v} = 0, \Theta = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = 1.$$

Введем нормальные возмущения, зависящие от времени и горизонтальных координат по закону $\exp[-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)]$, где k_1 и k_2 — вещественные волновые числа; $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ (λ_r — вещественная, а λ_i — мнимая части декремента λ). Краевая задача для амплитуд нормальных возмущений скорости $w(z)$ и температуры $\theta(z)$ после исключения в (2) давления приобретает вид

$$(4) \quad -\lambda(w'' - k^2 w) + \frac{Pr}{Pr} (w''' - k^2 w') = (w^{IV} - 2k^2 w'' + k^4 w) - Ra k^2 \theta,$$

$$-\lambda Pr \theta + Pe \theta' + w \Theta_0' = (\theta'' - k^2 \theta) + \delta \theta \exp \Theta_0 (k^2 = k_1^2 + k_2^2);$$

$$(5) \quad w = 0, w' = 0, \theta = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = 1.$$

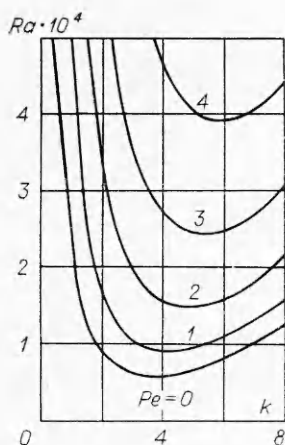
Распределения температуры $\Theta_0(Pr, \delta, z)$ являются решениями невозмущенной стационарной задачи (1) и существуют в области $\delta \leq \delta_{кр}$.

При $Ra = 0$ (отсутствие подъемной силы) краевая задача (4), (5) сводится к задаче устойчивости относительно температурных возмущений бесконвективных процессов переноса тепла в совершающем однородное поперечное движение реагенте [1]. В случае $Pe = 0$ система (4) с граничными условиями (5) совпадает с рассмотренной в работах [2—4].

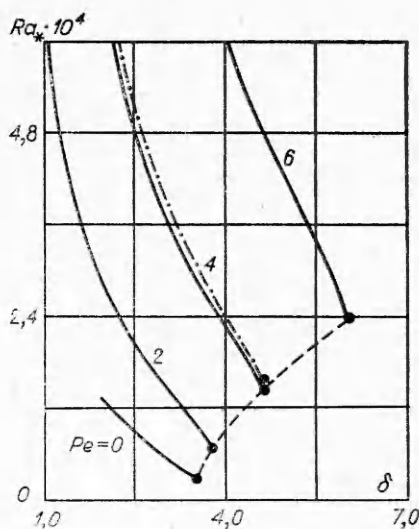
Результатом решения задачи конвективной устойчивости (4), (5) является определение декрементов нормальных возмущений λ в зависимости от пяти безразмерных параметров: чисел Прандтля, Пекле и Рэлея, параметра Франк-Каменецкого и волнового числа. При отыскании собственных чисел $\lambda(Pr, Pe, Ra, \delta, k)$ уравнения (4) представлялись в виде системы двенадцати обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для вещественных и мнимых частей комплексных амплитуд возмущений и их производных. Численно строились три линейно-независимых частных решения, для которых выполнены условия в начальной точке интегрирования. Собственные числа находились как корни характеристического соотношения, вытекающего из требования существования нетривиального решения задачи, удовлетворяющего граничным условиям в конечной точке интервала интегрирования. При построении частных решений использовался метод Рунге—Кутты, применение которого для решения задач конвективной устойчивости обсуждается в [8]. Критическими условиями возникновения конвекции являются значения параметров, при которых $\lambda_r = 0$; состояния с $\lambda_r > 0$ устойчивы, с $\lambda_r < 0$ — неустойчивы.

Вычисления показывают, что спектры декрементов $\lambda(Ra)$ имеют весьма сложную структуру, схожую с приведенной в [4] для случая $Pe = 0$. В частности, в области устойчивости ($\lambda_r > 0$) возможны колебательные режимы с $\lambda_i \neq 0$. За конвективную неустойчивость, однако, ответственны вещественные ветви спектра, и критические возмущения монотонны. Наличие продува приводит к появлению зависимости границы монотонной неустойчивости ($\lambda = 0$) от числа Прандтля. Заметим, что в случае несимметричного внутреннего тепловыделения картина конвективной устойчивости в отличие от [5] не является инвариантной по отношению к смене направления поперечного движения жидкости.

На фиг. 2 представлено семейство нейтральных кривых $Ra(k)$ нижнего невозмущенного стационарного режима. Графики построены для $\delta = 3$ и $Pr = 1$ при различных значениях числа Пекле ($Pe = 0; 1; 2; 3; 4$). Зоны неустойчивости находятся над кривыми. Увеличение интенсивности продува при фиксированном значении параметра Франк-Каменецкого для нижнего стационарного режима уменьшает разогрев жидкости, вызван-



Ф и г. 2



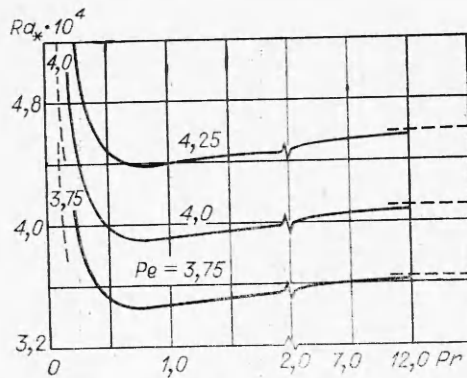
Ф и г. 3

ный внутренним тепловыделением (см. фиг. 1), и сужает область неустойчивой стратификации плотности у верхней границы слоя [1]. Эти обстоятельства приводят к существенному повышению конвективной устойчивости среды с ростом значений Pe . Заметное смещение при увеличении числа Пекле критических волновых чисел k_* , соответствующих $\min Ra(k) \equiv Ra_*$, в сторону коротковолновых возмущений является следствием сужения зоны развития конвекции.

Результаты решения задачи устойчивости удобно представлять на диаграммах, описывающих зависимость величины минимального критического числа Рэлея Ra_* основного уровня неустойчивости от остальных параметров. На фиг. 3 приведена зависимость $Ra_*(\delta)$ для $Pr = 1$ и $Pe = 0; 2; 4; 6$. При $\delta = \delta_{кр}$ кривые $Ra_*(\delta)$ имеют конечные точки, причем их положение в соответствии с [1] определяется значениями числа Пекле. Зависимость $Ra_*(\delta_{кр})$ на фиг. 3 показана штриховой линией. (Как уже указывалось, при $\delta > \delta_{кр}$ невозмущенные состояния в системе невозможны и задача об их устойчивости не возникает). В области существования невозмущенных состояний для $Ra > Ra_*(\delta)$ стационарные режимы по отношению к возникновению конвекции неустойчивы. Интенсификация продува оказывает стабилизирующее действие. С ростом параметра Франк-Каменецкого возрастает мощность химических внутренних источников тепла и вместе с этим разогрев реагента, что приводит к снижению конвективной устойчивости. Для жидких реагентов увеличение значений числа Прандтля (у жидких взрывчатых веществ $Pr \sim 20$) сопровождается слабым повышением порога возникновения конвекции. Зависимость $Ra_*(\delta)$, соответствующая $Pe = 4$ и $Pr = 20$, изображена штрихпунктиром.

Критические значения числа Рэлея Ra_* монотонно возрастают с увеличением скорости вдувания реагента, причем при всех значениях параметра Франк-Каменецкого повышение конвективной устойчивости оказывается весьма значительным. Так, в слое реагента толщиной 1 см со свойствами, близкими к воде, поперечное движение со скоростью 0,005 см/с повышает устойчивость в 4 раза.

Зависимость границы конвективной устойчивости от числа Прандтля $Ra_*(Pr)$ (на фиг. 4 эта зависимость построена при $\delta = 3$ и $Pe = 3,75; 4,00; 4,25$) имеет довольно сложный вид. В области $Pr > 1$, как отмечено



Фиг. 4

выше, устойчивость системы незначительно повышается и при больших Pr кривые $Ra_*(Pr)$ выходят на асимптоты, соответствующие $Pr = \infty$ (штриховые прямые на фиг. 4). Величины Ra_* при $Pr = \infty$ превышают Ra_* при $Pr = 1$ лишь на 4—5%. Для большинства химически активных жидкостей характерны высокие значения Pr , и при решении краевой задачи (4), (5) в уравнении движения можно пренебрегать членом, описывающим прокачку реагента. В этом асимптотическом случае зависимость Ra_* от Pr исчезает.

При числах Прандтля $Pr \sim 1$ зависимости $Ra_*(Pr)$ имеют минимум. Для значений $Pr < 1$ (реагирующие газы) с уменьшением Pr наблюдается резкое повышение порога устойчивости. При $Pr \rightarrow 0$ у верхней границы $z = 1$ образуется пограничный слой. Уравнения (4) в случае $Pr = 0$ имеют особенность, и для выяснения поведения зависимости $Ra_*(Pr)$ при малых Pr следует воспользоваться методом сращиваемых асимптотических разложений [9]. Оказывается, что для определения асимптотики в первом порядке по Pr достаточно провести лишь внешнее разложение, в котором в системе уравнений (4) отбрасываются «вязкие» члены и порядок краевой задачи (4), (5) понижается на единицу. Внутреннее разложение, локализованное вблизи границы $z = 1$, вносит поправку в решения более высокого порядка по Pr , и в рассматриваемом приближении его можно не учитывать. Таким образом, для значений Pr , близких к нулю, граница устойчивости определяется из краевой задачи следующего вида:

$$(6) \quad -L(w'' - k^2w) + Pe(w''' - k^2w') = -Ak^2\theta, \\ -L\theta + Pe\theta' + w\theta'_0 = (\theta'' - k^2\theta) + \delta\theta \exp \Theta_0;$$

$$(7) \quad w = 0, w' = 0, \theta = 0 \text{ при } z = 0, \\ w = 0, \theta = 0 \text{ при } z = 1,$$

где $L = \lambda Pr$; $A = Ra Pr$.

Решения задачи (6), (7) при $\delta = 3$ и $Pe = 3,75; 4,00$ на фиг. 4 показаны штриховыми кривыми. Для всех значений параметров в пределе $Pr \rightarrow 0$ критические числа Рэлея $Ra_* \rightarrow \infty$.

Полученные результаты показывают, что поперечный продув реагента является эффективным средством воздействия на конвективную устойчивость реагирующих систем.

Авторы выражают благодарность Е. М. Жуховицкому за руководство работой и А. А. Непомнящему за обсуждение результатов.

Поступила 30 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремин Е. А., Колесников А. К. К стационарной теории теплового взрыва. — ФГВ, 1978, № 5.
2. Merzhanov A. G., Shtessel E. A. Free convection and thermal explosion in reactive systems. — «Astronautica Acta», 1973, vol. 18, p. 191—199.
3. Jones D. R. The dynamic stability of confined, exothermically reacting fluids. — «Internat. J. Heat and Mass Transfer», 1973, vol. 16, p. 157—167.

4. Еремин Е. А., Колесников А. К. К теории конвективной устойчивости горизонтального слоя реагирующей среды. — Респ. сб. Гидродинамика. Вып. 10. Пермь, 1977.
5. Шварцблат Д. Л. О спектре возмущений и конвективной неустойчивости плоского горизонтального слоя жидкости с проницаемыми границами. — ПММ, 1968, т. 32, № 2.
6. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., «Наука», 1967.
7. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
8. Бирх Р. В., Рудаков Р. Н. Применение метода Рунге—Кутты для исследования устойчивости плоскопараллельных конвективных течений. — В кн.: Приближенное решение краевых задач и функциональных уравнений. Пермь, изд. Перм. политехн. ин-та, 1971, № 84.
9. Найфэ А. Методы возмущений. М., «Мир», 1976.

УДК 532.525.2

О ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ НЕУСТОЙЧИВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ С ПЛОСКОЙ ПРЕГРАДОЙ

В. Е. Кузьмина, С. К. Матвеев

(Ленинград)

Неустойчивому взаимодействию сверхзвуковой осесимметричной струи с плоской преградой посвящены многочисленные экспериментальные работы (например, [1—8]), в которых определены границы зоны неустойчивости [7], амплитудно-частотные характеристики процесса и отмечены характерные особенности качественной картины течения в достаточно широком диапазоне режимов взаимодействия. В [9—13] были выдвинуты различные гипотезы о механизме возникновения колебаний и в рамках той или иной модели построены аналитические решения, из которых определены частотные характеристики процесса или нижняя граница зоны неустойчивости. В [14] проведено численное исследование одного режима нестационарного взаимодействия сверхзвуковой струи с преградой конечных размеров.

В данной работе рассмотрено неустойчивое взаимодействие сверхзвуковой струи с безграничной преградой. Задача решалась в рамках модели невязкого нетеплопроводного газа по разностной схеме Годунова. Возможности этой схемы в решении ряда задач нестационарной газовой динамики проиллюстрированы в [15]. В [16] метод Годунова успешно использовался при расчете стационарных режимов взаимодействия сверхзвуковой струи с плоской преградой.

Расчет велся на равномерной прямоугольной сетке. Расстояние от оси симметрии до верхней границы сетки N выбиралось большим, чем диаметр максимального сечения первой бочки свободной струи, определенный по данным [17]. При этом в расчетную область целиком попадала та часть границы струи, которая по данным [9] является источником акустических волн во внешнем пространстве. Если в процессе расчета звуковая линия в растекающейся по преграде струе выходила за пределы расчетной сетки, то ширина сетки соответственно увеличивалась.

Сопло моделировалось трубой толщины Δ с открытым концом, внутри которой задавались постоянные значения параметров газа, соответствующие значениям числа Маха M_a , нерасчетности n_a и показателя адиабаты κ_a потока на срезе профилированного сопла. Начало прямоугольной системы координат rOx выбиралось в центре выходного сечения трубы. Рассчитываемая область течения ограничивалась осью симметрии $r = 0$, линией $r = N$ и сечениями $x = -k$ и $x = x_n$, где x_n — расстояние от среза сопла до преграды. Здесь и далее все линейные размеры отнесены к радиусу сопла r_a .