

УДК 539.372; 539.62

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

С. В. Клишин, А. Ф. Ревуженко

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: sv.klishin@gmail.com,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

На основе метода дискретных элементов численно исследована задача о формировании вихревых движений сыпучего материала в ограниченной области. Гранулированный материал состоит из сферических частиц с заданным распределением по радиусам. На контактах между частицами учитывается сухое трение, а также сопротивление качению. Приведены кинематические картины деформирования образца сыпучей среды, показаны траектории движения отдельных частиц в процессе численного эксперимента. Даны значения нормальных и касательных напряжений, действующих на границах области со стороны материала.

Сыпучий материал, деформации, вихревое течение, численный анализ, метод дискретных элементов

Сыпучие среды занимают промежуточное положение между жидкостями и твердыми телами. До известной степени они принимают форму емкости, в которой находятся, способны к истечению из емкостей и т. д. В стесненных условиях деформирования поведение сыпучих сред близко к поведению твердых пластических сред. Если говорить о теоретических моделях, то сыпучие среды ближе к твердым телам и горным породам, чем к жидкостям. Типичная ситуация при деформировании твердых тел — локализация сдвигов и реализация ограниченных во времени деформаций, при течении жидкостей типично образование вихрей и неограниченное развитие деформаций [1]. Можно, однако, указать один класс специальных нагружений сыпучей среды, которые неизбежно будут приводить к неограниченным деформациям и формированию в среде вихревых движений. В ряде случаев изучение таких процессов представляет теоретический и прикладной интерес.

Пусть D — деформируемая область, а S — ее граница. Необходимо организовать процесс деформирования так, чтобы: 1) в результате деформирования конфигурация области D сохранялась (или почти сохранялась) неограниченно долго во времени и 2) отток и приток нового материала в область должен быть либо нулевым, либо практически сведен к нулевому. Ясно, что в этих условиях течение в ограниченной области может развиваться во времени неограниченно только за счет формирования в ней стационарных либо нестационарных вихрей. Для технической реализации здесь открывается достаточно много возможностей. Например, на границе S можно задать перемещения, которые периодически, через время T , возвращают все точки границы в исходное положение. Тогда необратимую часть внутренних смещений, отнесенную к периоду T , можно интерпретировать как заданное поле скоростей. В стационарном случае оно

даст вихревое течение [2]. Можно также на части границы S задавать скорости, направленные вдоль границы, либо задавать условия непроникания и развитого трения, направленного вдоль границы. В некоторых случаях удобно допустить наличие свободной поверхности, вдоль которой материал свободно стекает вниз под действием силы тяжести и т. д.

Рассмотрим конкретную ситуацию, экспериментально исследованную в [3]. На рис. 1, взятом из [3], показаны разные стадии течения сыпучего материала в емкости без дна. Передняя и задняя стенки емкости изготовлены из стекла, так что выполняются условия плоской деформации. Деформирование осуществляется путем скольжения емкости по жесткому шероховатому профилю. Материал увлекается в движение так, что в нем формируется наклонная свободная поверхность и соответствующее вихревое течение. Подобные процессы реализуются при транспортировании сыпучих материалов скребковыми конвейерами, а также при перемещении грунтов и дорожно-строительных материалов отвалами (щитами), расположенными на бульдозерах.

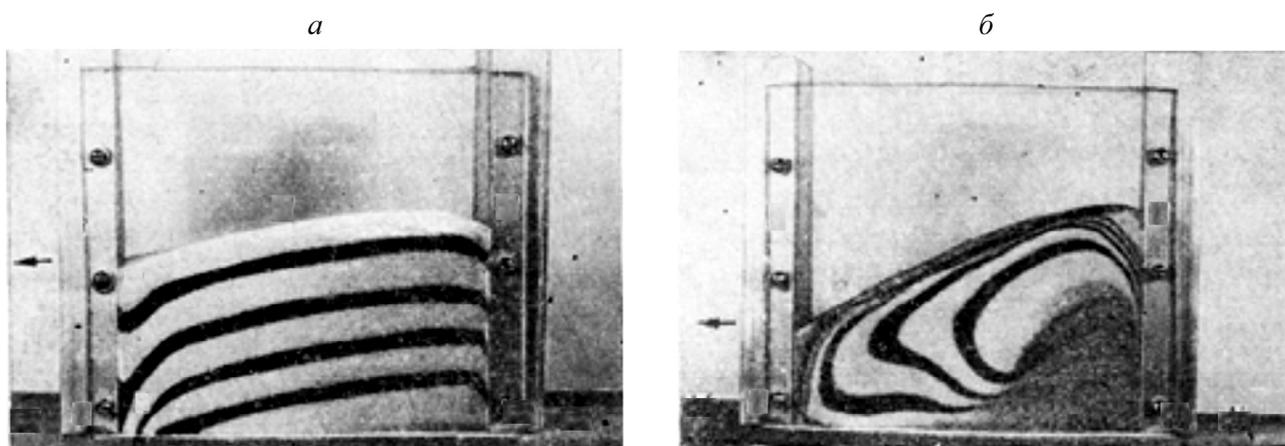


Рис. 1. Экспериментальное исследование вихревого течения в сыпучем материале (взято из [3]): *а* — начальная стадия деформирования; *б* — развитое движение сыпучего материала

Следует отметить, что при транспортировке полезных ископаемых на угольных и рудных шахтах, обогатительных фабриках, а также в механизированных бункерах, погрузочных машинах и т. д. скребковые конвейеры являются наиболее распространенным видом непрерывного транспорта. Наряду с такими достоинствами, как высокая прочность, способность выдерживать ударные нагрузки, а также возможность работы по искривленным траекториям, недостатками скребковых конвейеров являются интенсивный износ става и тягового органа, высокая энергоемкость транспортирования и измельчение материала. В этой связи исследования данного вида движения гранулированного материала весьма перспективны как в теоретическом, так и в экспериментальном плане.

Рассмотрим численное решение данной задачи методом дискретных элементов (МДЭ). В настоящее время этот метод приобрел большую популярность и используется многими исследователями для решения различных задач геомеханики [4–10]. В соответствии с МДЭ сыпучий материал представляется в виде совокупности из N сферических частиц (дискретных элементов). Каждый i -й элемент характеризуется радиусом r_i и известным набором физических свойств: плотностью, упругими и вязкими модулями, трением, сцеплением и т. п. ($i = 1, \dots, N$). Движение отдельного дискретного элемента состоит из поступательного и вращательного и описывается следующими уравнениями:

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_j \mathbf{f}_{ij} + m_i \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$I_i \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i = \sum_j (\mathbf{r}_{ic} \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{M}_{r,ij}). \quad (2)$$

Здесь точки означают дифференцирование по времени t ; \mathbf{x}_i — радиус-вектор центра тяжести i -й частицы; $\boldsymbol{\theta}_i$ — ее поворот относительно координатных осей; m_i — масса; I_i — момент инерции; \mathbf{g} — ускорение свободного падения; \mathbf{r}_{ic} — вектор, направленный из центра i -й частицы в точку контакта; контактная сила \mathbf{f}_{ij} действует на частицу с номером i со стороны частицы (или границы) с номером j , зависит от величины их перекрытия, а также от упругих и вязких модулей, ее нормальная составляющая вычисляется по закону Герца [11]; $\mathbf{M}_{r,ij}$ — момент сопротивления качению частиц друг по другу или по границе.

Суммирование в (1) и (2) проводится по всем элементам и границам, находящимся в контакте с текущей i -й частицей. Поскольку форма дискретных элементов на протяжении всего времени контакта предполагается неизменной, то степень их деформации описывается величиной перекрытия между контактирующими частицами.

Особенностью МДЭ является сферическая форма элементов, которая не изменяется в процессе всего численного эксперимента. Это накладывает некоторые ограничения на область применения данного метода, так как в реальной ситуации сопротивление качению частиц при их контакте друг с другом или с границей обусловлено их формой и деформациями. Снять данное ограничение можно либо использованием частиц произвольной формы, либо созданием из сферических частиц кластеров, которые рассматриваются как отдельные элементы. Недостаток таких методов — большие затраты вычислительных ресурсов. В настоящей работе используется способ, представленный в [12, 13], — дополнение контактной модели взаимодействия моделью сопротивления качению, препятствующего относительно движению частиц друг по другу или по границе.

В уравнении (2) момент, возникающий при контакте частиц, представляется в виде двух слагаемых. Первое — это момент, возникающий при относительном скольжении частиц друг по другу при наличии сухого трения. Второе слагаемое — момент, препятствующий относительно вращению дискретных элементов:

$$\mathbf{M}_{r,ij} = - \frac{\boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{\omega}_j}{|\boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{\omega}_j|} \mu_{ij} r_{ij} |\mathbf{f}_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}|, \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\omega}_i$ и $\boldsymbol{\omega}_j$ — угловые скорости контактирующих частиц; \mathbf{n}_{ij} — единичный вектор, лежащий на прямой, соединяющей их центры; r_{ij} — приведенный радиус:

$$\frac{1}{r_{ij}} = \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j}.$$

Безразмерный параметр μ_{ij} — коэффициент сопротивления качению. Если провести аналогию с углом сухого трения между двумя телами, достаточно просто показать, что данный коэффициент может быть представлен в виде $\mu_{ij} = \text{tg} \psi_{ij}$. Причем здесь ψ_{ij} — максимальный угол наклона плоскости, при котором сферическая частица будет находиться на этой плоскости в состоянии равновесия за счет сопротивления качению (при отсутствии скольжения).

Таким образом, располагая данными о законе движения и контактного взаимодействия между частицами (уравнения (1)–(3)), а также начальными и краевыми условиями, можно численно строить решения уравнений и определять эволюцию напряженно-деформированного состояния среды. Для этих целей разработано программное обеспечение, позволяющее численно исследовать различные режимы движения гранулированного материала, состоящего из отдельных сферических частиц.

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассмотрим задачу в следующей двумерной постановке (рис. 2). Пусть на плоскости Oxz задана область, ограниченная слева и справа прямыми $x = \pm l/2$, а снизу — прямой $z = 0$; верхняя граница от напряжений свободна. В данном исследовании ширина емкости $l = 1.0$ м, а высота засыпки $h = 0.5$ м. Гранулированный материал представлен совокупностью дискретных элементов, радиусы которых выбраны из равномерного распределения на отрезке от 0.002 до 0.003 м. Сила тяжести направлена вдоль оси Oz вертикально вниз.

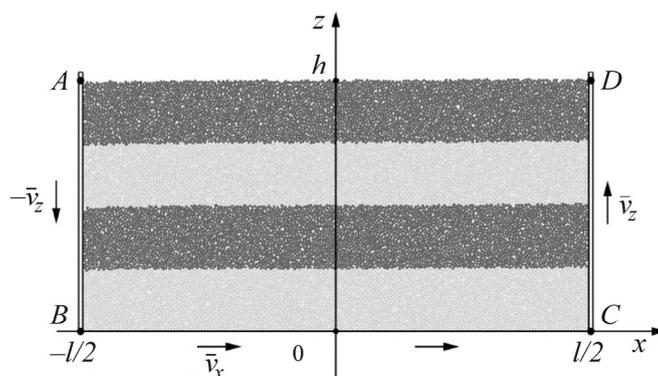


Рис. 2. Схема численного эксперимента

Физические параметры материала частиц, а также свойства на контактах между частицами и частицами и границей приведены ниже:

Плотность ρ_i	2 500 кг/м ³
Модуль упругости E_i	10 ГПа
Коэффициент Пуассона ν_i	0.25
Угол сухого трения φ_{ij}	30°
Угол сопротивления качению ψ_{ij}	20°

Создание первоначальной равновесной упаковки отдельных твердых сферических частиц является важным начальным этапом при решении задач методом дискретных элементов и исследуется как отдельная самостоятельная задача во многих работах. Существует ряд подходов для генерирования первоначальной плотной упаковки, которые можно разделить на две основные категории в зависимости от того, как достигается конечная конфигурация области, состоящей из отдельных элементов.

К динамическим относятся схемы, заключающиеся в имитации движения частиц под действием заданной внешней силы. Здесь начальное распределение не контактирующих друг с другом частиц, имеющих заданный размер, под воздействием внешних сил в заданной ограни-

ченной области приходит в равновесное состояние. Применению динамических методов при различных граничных условиях посвящена обширная литература. Одной из модификаций такого класса методов является алгоритм синтеза упаковок частиц в рамках механики Аристотеля, который представлен в [14].

Альтернативой динамическим алгоритмам служит геометрический подход к созданию плотных исходных полидисперсных упаковок частиц. Основная особенность этих схем заключается в том, что упаковки создаются на основе теоретических геометрических расчетов, без имитации динамики движения и соударения частиц. Как правило, процесс упаковывания происходит последовательно для каждой частицы. Положение новой частицы рассчитывается на основе известных положений уже упакованных частиц таким образом, что она касается определенных ранее уложенных частиц в достаточном числе контактов. Обзор геометрических методов построения исходных упаковок представлены в [15].

В данной работе заполнение области (емкости) осуществлялось с использованием динамического алгоритма упаковывания сферических частиц. На некоторой высоте от неподвижной нижней грани $z = 0$ создавался начальный набор из не контактирующих между собой дискретных элементов. Далее под действием силы тяжести частицы осаждались в контейнер с учетом контактного взаимодействия друг с другом и границами. По достижении равновесного состояния элементы, у которых вертикальная координата центра тяжести не удовлетворяла соотношению $z_i \leq h$, удалялись. Затем материал раскрашивался для визуализации процесса деформирования. Данная засыпка продемонстрирована на рис. 2. Свойства таких упаковок с учетом сопротивления качению детально исследованы в [16].

Сформулируем граничные условия. Пусть в каждой граничной точке задан вектор скорости следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{на отрезке } AB: \mathbf{v}_{AB} &= (0, 0, -v), \\ \text{на } BC: \mathbf{v}_{BC} &= (v, 0, 0), \\ \text{на } CD: \mathbf{v}_{CD} &= (0, 0, v), \end{aligned} \tag{4}$$

где v — заданная постоянная или зависящая от времени величина. Такая постановка численной задачи равносильна натурному эксперименту, когда вдоль заданных границ с некоторой скоростью протягивается шероховатая лента. В данном численном эксперименте скорость точек границ постоянна: на протяжении всего численного счета $v = \text{const} = 0.05$ м/с. Подобная постановка позволяет, в отличие от лабораторных опытов, избежать заклинивания частиц материала в угловой точке C .

Таким образом, за счет трения на контактах между частицами и граничными точками материал вовлекается в движение. Через некоторое время процесс деформирования приобретает установившийся характер. Кинематические картины движения исследуемого образца через равные промежутки времени приведены на рис. 3.

Анализ кинематических картин движения дискретных элементов позволяет сделать вывод, что при движении материала с заданными краевыми условиями (4) частицы движутся по стационарным траекториям, причем в среде образуется область, внутри которой деформации сравнительно малы. Другими словами, в образце формируется ядро течения. Это подтверждается анализом траекторий отдельных частиц, представленных на рис. 4а. Для сравнения на рис. 4б показана ситуация, когда коэффициент сопротивления качению равен нулю — на контактах между элементами действует только сухое трение скольжения.

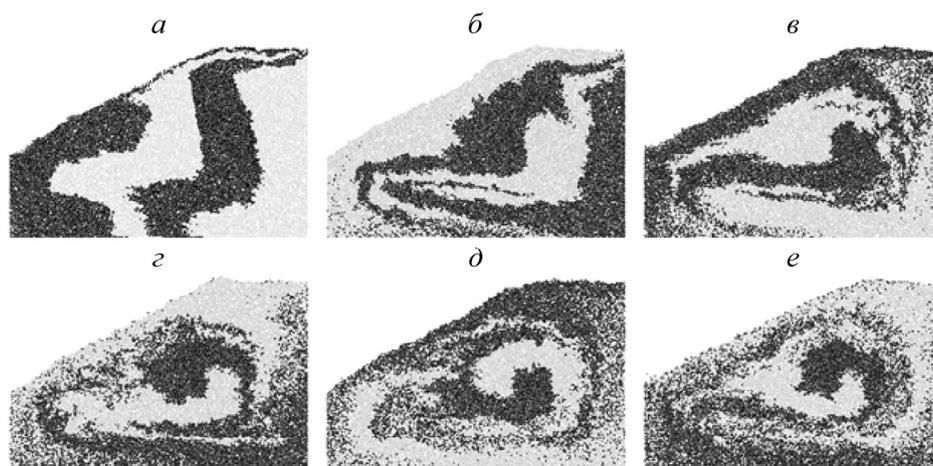


Рис. 3. Кинематика деформирования сыпучего материала в процессе нагружения в фиксированные моменты времени

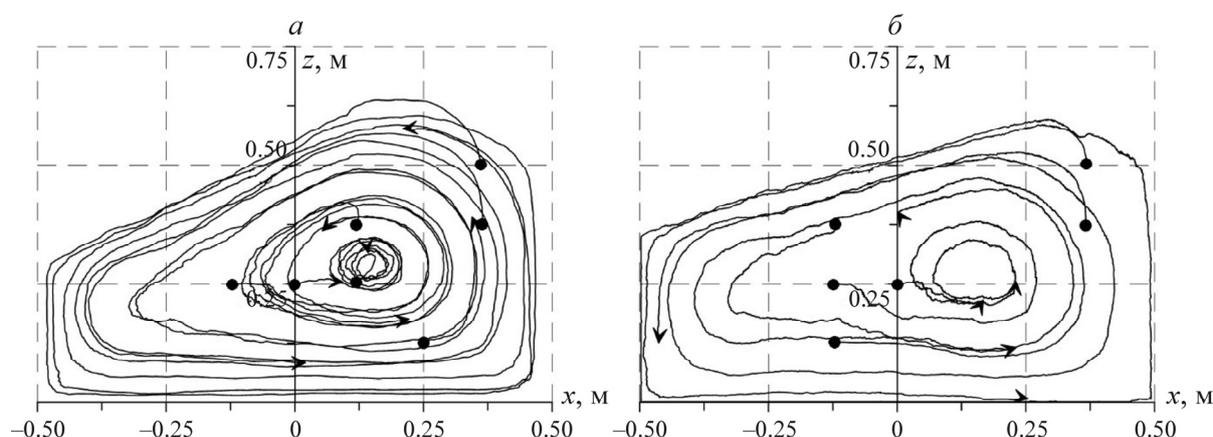


Рис. 4. Траектории движения отдельных частиц в процессе нагружения: точкой обозначено начало траектории, стрелкой — конечное положение частицы. Угол сопротивления качению $\psi_{ij} = 20^\circ$ (а); $\psi_{ij} = 0$ (б)

В численном счете можно получить значения нормальных и касательных напряжений, действующих на стенки емкости со стороны сыпучего материала. Определим напряжения следующим образом. В фиксированный момент времени на отрезках AB и CD (см. рис. 2) значения нормального напряжения равны

$$\sigma_{n,j} = \frac{1}{h'} \sum_{i=1}^{N_h} (f_{ij} \cdot n_{ij}),$$

где h' — максимальная координата контакта частицы и соответствующей границы; N_h — число этих контактов; n_{ij} — единичный вектор, направленный от центра i -й частицы по нормали к границе с номером j ; индекс j принимает значения 1 и 2 для границ AB и CD соответственно. Аналогично определяются нормальные напряжения на отрезке BC :

$$\sigma_{n,j} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{N_l} (f_{ij} \cdot n_{ij}).$$

Здесь l — длина границы BC ; N_l — количество контактов с частицами среды. Касательные напряжения вычисляются по той же схеме, а именно: на AB и CB

$$\tau_{n,j} = \frac{1}{h'} \sum_{i=1}^{N_h} (f_{ij} \cdot t_{ij}),$$

где t_{ij} — единичный вектор, параллельный соответствующей границе, а на BC

$$\tau_{n,j} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{N_l} (f_{ij} \cdot t_{ij}).$$

Значения данных величин в процессе нагружения приведены на рис. 5. Здесь графики с номером 1 соответствуют напряжения на дне емкости (на отрезке BC), а графикам с номерами 2 и 3 — на отрезках AB и CD соответственно. Для сравнения штриховой линией на рис. 5а показано значение веса материала. Видно, что напряжения стабилизируются уже на начальном этапе нагружения, что указывает на стационарное движение среды.

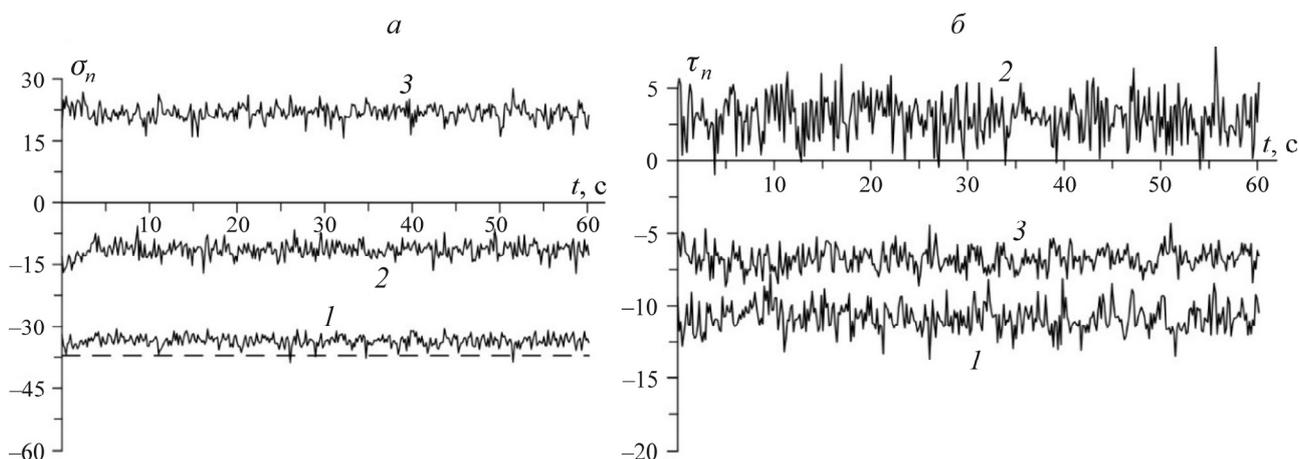


Рис. 5. Нормальные (а) и касательные напряжения (б), действующие со стороны сыпучего материала на дно и стенки емкости в процессе нагружения

Анализ диаграмм показывает, что нормальное давление со стороны сыпучего материала на стенку, которая смещается в сторону материала, в 1.5–2 раза выше, чем нормальное давление на стенку, которая смещается от материала. При этом, как видно из рис. 5б, касательные напряжения на стенках контейнера порождают опрокидывающий момент, который может служить одной из причин износа частей скребковых конвейеров при транспортировании раздробленных горных пород.

ВЫВОДЫ

Задание касательных скоростей и условий развитого трения на границах емкости, вмещающей сыпучий материал, а также наличие свободной поверхности приводит к установившемуся вихревому течению среды. Вихрь содержит ядро течения, внутри которого деформации материала малы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Milton Van Dyke. An album of fluid motion. Stanford, California, Parabolic Press Inc., 4th edition, 1988.

2. **Revuzhenko A. F.** Mechanics of granular media. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
3. **Стажевский С. Б., Ревуженко А. Ф.** О кинематике движения сыпучих материалов относительно жестких поверхностей // ФТПРПИ. — 1975. — № 1.
4. **Верещагин А. С., Казанин И. В., Зиновьев В. Н., Пак А. Ю., Фомина А. Ф., Лебига В. А., Фомин В. М.** Математическая модель проницаемости микросфер с учетом их дисперсионного распределения // ПМТФ. — 2013. — № 2.
5. **Киселев С. П.** Метод молекулярной динамики в механике деформированного твердого тела // ПМТФ. — 2014. — № 3.
6. **Клишин С. В., Клишин В. И., Опрук Г. Ю.** Моделирование процесса выпуска угля при механизированной отработке мощных крутопадающих угольных пластов // ФТПРПИ. — 2013. — № 6.
7. **Хан Г. Н.** Моделирование методом дискретных элементов динамического разрушения горной породы // ФТПРПИ. — 2012. — № 1.
8. **Федоров А. В., Федорченко И. А.** Взаимодействие нормально падающей ударной волны со слоем пористого материала, расположенным на твердой стенке // Физика горения и взрыва. — 2010. — № 1.
9. **Клишин С. В., Ревуженко А. Ф.** Исследование задачи Янсена методом дискретных элементов в трехмерной постановке // ФТПРПИ. — 2014. — № 3.
10. **Psakhie S., Shilko E., Smolin A., Astafurov S.** Development of a formalism of movable cellular automaton method for numerical modeling of fracture of heterogeneous elastic-plastic materials. Fracture and Structural Integrity, 2013, No. 24.
11. **Johnson K. L.** Contact mechanics. Cambridge University Press, 1985.
12. **Zhou Y. C., Wright B. D., Yang R. Y., Xu B. H., Yu A. B.** Rolling friction in the dynamic simulation of sandpile formation. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 1999, Vol. 269, Issue 2–4.
13. **Jun Ai, Jian-Fei Chen, J. Michael Rotter, Jin Y.** Ooi Assessment of rolling resistance models in discrete element simulations. Powder Technology, 2011, Vol. 206, Issue 3.
14. **Ревуженко А. Ф., Клишин С. В., Микенина О. А.** Об одном алгоритме синтеза упаковок частиц в рамках аристотелевой механики // Физ. мезомеханика. — 2014. — Т. 17. — № 5.
15. **Stoyan D.** Random systems of hard particles: models and statistics. Chinese Journal of Stereology and Image Analysis, 2002, Vol. 7, No. 1.
16. **Yutaka Fukumoto, Hide Sakaguchi, Akira Murakami.** The role of rolling friction in granular packing. Granular Matter, 2013, Vol. 15, Issue 2.

Поступила в редакцию 2/XI 2015