

УДК 536.24, 539.217.1

## АНАЛИЗ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В СЛУЧАЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ И ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТЬЮ

С. Хуснэйн, А. Мехмуд\*, А. Али

Университет Куэйд-ай-Азэм, 45320 Исламабад, Пакистан

\* Международный исламский университет, Н-10 Исламабад, Пакистан

E-mail: ahmerqau@yahoo.co.uk

Проведен подробный математический анализ нестационарного течения в пограничном слое вязкой жидкости, протекающей через пористые среды, при наличии тепломассопереноса. Предполагается, что на поверхности имеет место отсос или вдув жидкости. С использованием преобразования подобия система управляющих нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных преобразована в систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и решена аналитически и численно с помощью метода гомотопического анализа и метода Рунге — Кутты совместно с методом стрельбы соответственно. Сравнение аналитического и численного решений показало, что они хорошо согласуются.

Ключевые слова: нестационарные пограничные слои, тепломассоперенос, вязкость, зависящая от температуры.

**Введение.** Интерес к изучению тепломассопереноса в пограничном слое обусловлен его применением в промышленности (горячая прокатка, производство бумаги, наклеивание пленок на горячие тела, вытягивание пластмассовых пленок, волочение проволоки, производство стекловолокна и т. д.). В ходе исследований замечено, что физические свойства окружающей жидкости изменяются вследствие высокой температуры помещенного в жидкость твердого тела. В работе [1] исследовано изменение динамической вязкости воды в зависимости от температуры. В [2] изучено течение пленки жидкости по наклонной горячей пластине с постоянной вязкостью. В [3–10] и других работах рассмотрены течения жидкостей, вязкость которых зависит от температуры. Во всех указанных выше работах число Прандтля полагалось постоянным. В [11] показано, что вследствие температурной зависимости вязкости жидкости число Прандтля также зависит от температуры и, следовательно, не является постоянным. В настоящей работе также предполагается, что число Прандтля зависит от температуры.

Исследование тепломассопереноса в пористых средах с различной геометрией областей течения имеет большое значение, что обусловлено его широким применением (геотермические резервуары, теплоизоляция, насадочные колонны каталитических реакторов, подземный перенос энергии, охлаждение ядерных реакторов, добыча нефти при искусственно

поддерживаемой энергии пласта, сушка пористых твердых тел и т. д.). В работе [12] изучалось влияние химической реакции и переменной вязкости на смешанный гидромагнитный конвективный теплоперенос в случае течения Хименца в пористых средах при наличии излучения. В [13] с использованием конечно-разностного метода Чебышева изучено влияние химической реакции и теплопереноса на ламинарное течение с переменной вязкостью вдоль полубесконечной горизонтальной пластины. Гидромагнитный теплоперенос с учетом электропроводности и переменной вязкости на наклонной горячей поверхности исследован в [11]. В [14] изучен теплоперенос на растягивающейся пластине при наличии отсоса или вдува. Существует большое количество работ, посвященных исследованию теплопереноса в случае течения в пограничном слое при различных допущениях (см., например, [15–22]).

В указанных выше работах рассматривались только установившиеся течения. Однако во многих практических задачах течение является нестационарным вследствие изменения скорости тела. Известно небольшое количество работ, в которых анализируются нестационарные течения жидкости с переменной вязкостью в пограничном слое в пористых средах при наличии теплопереноса. Нестационарное вязкое магнитогидродинамическое течение на вращающемся конусе рассматривалось в работе [23]. В [24] изучено нестационарное течение при наличии теплопереноса и источника (стока) тепла. В [25] исследовано явление теплообмена на нестационарно растягивающейся пластине. В [26] изучены нестационарные двумерные задачи теплопереноса при наличии химического тепловыделения.

Целью данной работы является исследование явления теплопереноса в нестационарном потоке жидкости в пористой среде на растягивающейся пластине при наличии отсоса на стенке.

**1. Формулировка задачи.** Рассмотрим нестационарное двумерное вынужденное конвективное течение несжимаемой вязкой жидкости в пограничном слое на горячей растягивающейся пластине, расположенной в пористой среде и движущейся с переменной скоростью  $u(x, t) = cx/(1 - \alpha t)$ , где  $c$  — начальная скорость растяжения;  $c/(1 - \alpha t)$  — эффективная скорость растяжения;  $c, \alpha$  — постоянные, имеющие размерность  $t^{-1}$ . Считается, что температура поверхности  $T_w$  является однородной и превышает температуру окружающей среды  $T_\infty$ . Предполагается, что вязкость жидкости и температуропроводность являются линейными функциями температуры. В приближении пограничного слоя определяющие уравнения движения и теплопереноса имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \mu \frac{\varphi}{k} u, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left( \varkappa \frac{\partial T}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_m \frac{\partial^2 C}{\partial y^2},$$

где  $u, v$  — составляющие скорости вдоль координат  $x, y$  соответственно;  $\mu$  — вязкость;  $\rho$  — массовая плотность жидкости;  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $\varphi$  — пористость;  $k$  — проницаемость;  $\varkappa$  — теплопроводность;  $D_m$  — коэффициент молекулярной диффузии;  $T, C$  — температура и концентрация компонентов соответственно.

Граничные условия для уравнений (1), (2) имеют вид

$$\begin{aligned} u = u(x, t), \quad v = v_w(t), \quad T = T_w(x, t), \quad C = C_w(x, t) \quad \text{при} \quad y = 0, \\ u = 0, \quad T = T_\infty, \quad C = C_\infty \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $v_w = -v_0 \sqrt{\nu^* c / (1 - \alpha t)}$  — скорость отсоса жидкости;  $\nu^*$  — кинематическая вязкость окружающей жидкости; нижние индексы  $w, \infty$  соответствуют параметрам на поверхности пластины и границе пограничного слоя соответственно.

Введем следующие соотношения и безразмерные переменные:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \eta = \sqrt{\frac{c}{\nu^*(1 - \alpha t)}} y, \quad \psi = \sqrt{\frac{\nu^* c}{1 - \alpha t}} x f(\eta); \quad (4)$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \varphi = \frac{c - c_\infty}{c_w - c_\infty}. \quad (5)$$

Зависимость вязкости от температуры задается в виде [27, 28]

$$\mu = \mu_\infty / [1 + b(T - T_\infty)], \quad (6)$$

где  $\mu_\infty$  — постоянное значение вязкости вдали от пластины;  $b > 0$  — константа.

Зависимость температуропроводности от безразмерной температуры имеет вид  $\kappa = \kappa_0(1 + \beta\theta)$ , где  $\kappa_0$  — значение температуропроводности при температуре поверхности  $T_w$ ;  $\beta$  — параметр, зависящий от типа жидкости. Заметим, что выражение для безразмерной температуры  $\theta$  может быть также записано в виде

$$\theta = \frac{T - T_r}{T_w - T_\infty} + \Theta,$$

где

$$\Theta = \frac{T_r - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad T_r = T_\infty - \frac{1}{b}. \quad (7)$$

Подставляя соотношения (7) в уравнение (6), имеем

$$\mu = \mu_\infty \frac{\Theta}{\Theta - \theta}. \quad (8)$$

За счет введения функции тока в уравнение (4) уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно. Подставляя уравнения (4), (5) в уравнения (2), получаем обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} f''' &= M \left(1 - \frac{\theta}{\Theta}\right) \left(\frac{\eta}{2} f'' + f'\right) + \left(1 - \frac{\theta}{\Theta}\right)^2 - \left(1 - \frac{\theta}{\Theta}\right) f f'' - \frac{\theta'}{\Theta - \theta} f'' + K f', \\ \theta'' + \beta \theta \theta'' + \beta \theta'^2 &= \text{Pr} \left(1 - \frac{\theta}{\Theta}\right) \left(M \frac{\eta}{2} \theta' + \frac{3}{2} M \theta + 2 f' \theta - f \theta'\right), \\ \varphi'' &= \text{Sc} \left(\frac{M}{2} \eta \varphi' - f \varphi' + 2 f' \varphi\right) \end{aligned} \quad (9)$$

с граничными условиями (3) в безразмерной форме

$$\begin{aligned} f' &= 1, \quad f = S, \quad \theta = 1, \quad \varphi = 1 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \\ f' &= 0, \quad \theta = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $M = \alpha/c$  — параметр нестационарности;  $K = (\varphi/k)(\nu^*/c)(1 - \alpha t)$  — параметр пористости среды;  $\text{Pr} = (\mu/k)c_p = [\Theta/(\Theta - \theta)] \text{Pr}_\infty$  — число Прандтля;  $\text{Sc} = \nu_\infty/D_m$  — число Шмидта.

**2. Решение задачи.** Ниже приведены решения рассматриваемой задачи, полученные аналитическим и численным методами.

2.1. *Решение методом гомотопического анализа.* Для получения аналитического решения задачи использовался метод гомотопического анализа [29]. Этот метод уже использовался в ряде работ (см. [30–45]) для получения аналитических решений сильнонелинейных краевых задач. Выберем начальные приближения в виде

$$f_0(\eta) = 1 - S - e^{-\eta}, \quad \theta_0(\eta) = e^{-\eta}, \quad \varphi_0(\eta) = e^{-\eta}$$

и введем вспомогательные линейные операторы

$$L_1(f) = \frac{d^3 f}{d\eta^3} - \frac{df}{d\eta}, \quad L_2(\theta) = \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} - \theta, \quad L_3(\varphi) = \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} - \varphi,$$

удовлетворяющие соотношениям

$$L_1(D_1 + D_2 e^\eta + D_3 e^{-\eta}) = 0, \quad L_2(D_4 e^\eta + D_5 e^{-\eta}) = 0, \quad L_3(D_6 e^\eta + D_7 e^{-\eta}) = 0,$$

где  $D_j s$  ( $j = \overline{1, 7}$ ) — произвольные постоянные.

Пусть  $p \in [0, 1]$  — параметр вложения,  $h$  — ненулевой вспомогательный параметр,  $N_1[\hat{f}(\eta; p), \hat{\theta}(\eta; p)]$ ,  $N_2[\hat{\theta}(\eta; p), \hat{f}(\eta; p)]$ ,  $N_3[\hat{\varphi}(\eta; p), \hat{f}(\eta; p)]$  — нелинейные операторы. Запишем уравнения деформации нулевого порядка

$$\begin{aligned} (1-p)L_1[\hat{f}(\eta; p) - f_0(\eta)] &= ph_1 N_1[\hat{f}(\eta; p), \hat{\theta}(\eta; p)], \\ (1-p)L_2[\hat{\theta}(\eta; p) - \theta_0(\eta)] &= ph_2 N_2[\hat{\theta}(\eta; p), \hat{f}(\eta; p)], \\ (1-p)L_3[\hat{\varphi}(\eta; p) - \varphi_0(\eta)] &= ph_3 N_3[\hat{\varphi}(\eta; p), \hat{f}(\eta; p)], \end{aligned} \quad (11)$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$\begin{aligned} \hat{f}(0; p) &= S, \quad \hat{f}'(0; p) = 1, \quad \hat{f}(\infty; p) = 0, \\ \hat{\theta}(0; p) &= 0, \quad \hat{\theta}(\infty; p) = 0, \quad \hat{\varphi}(0; p) = 0, \quad \hat{\varphi}(\infty; p) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} N_1[\hat{f}(\eta; p), \hat{\theta}(\eta; p)] &= \frac{(\Theta - \hat{\theta}(\eta; p))^2}{\Theta} M \left( \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta} \right) + \\ &+ \frac{(\Theta - \hat{\theta}(\eta; p))^2}{\Theta} \left( \frac{\partial \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{(\Theta - \hat{\theta}(\eta; p))^2}{\Theta} \hat{f}(\eta; p) \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \hat{\theta}(\eta; p)}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta^2} + \\ &+ K(\Theta - \hat{\theta}(\eta; p)) \frac{\partial \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta} - (\Theta - \hat{\theta}(\eta; p)) \frac{\partial^3 \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta^3}, \\ N_2[\hat{\theta}(\eta; p), \hat{f}(\eta; p)] &= \text{Pr} \left( 1 - \frac{\hat{\theta}(\eta; p)}{\Theta} \right) \left( M \frac{\eta}{2} \frac{\partial \hat{\theta}(\eta; p)}{\partial \eta} + \frac{3}{2} M \hat{\theta}(\eta; p) + 2\hat{\theta}(\eta; p) \frac{\partial \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta} - \right. \\ &\left. - \hat{f}(\eta; p) \frac{\partial \hat{\theta}(\eta; p)}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 \hat{\theta}(\eta; p)}{\partial \eta^2} - \beta \left( \frac{\partial \hat{\theta}(\eta; p)}{\partial \eta} \right)^2 - \beta \hat{\theta}(\eta; p) \frac{\partial^2 \hat{\theta}(\eta; p)}{\partial \eta^2}, \\ N_3[\hat{\varphi}(\eta; p), \hat{f}(\eta; p)] &= \frac{\partial^2 \hat{\varphi}(\eta; p)}{\partial \eta^2} - \text{Sc} \left( \frac{M}{2} \eta - \hat{f}(\eta; p) \right) \frac{\partial \hat{\varphi}(\eta; p)}{\partial \eta} - 2 \text{Sc} \frac{\partial \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta} \hat{\varphi}(\eta; p). \end{aligned}$$

При  $p = 0$  и  $p = 1$  из (11) следует

$$\begin{aligned} \hat{f}(\eta; 0) &= f_0(\eta), \quad \hat{f}(\eta; 1) = f(\eta), \\ \hat{\theta}(\eta; 0) &= \theta_0(\eta), \quad \hat{\theta}(\eta; 1) = \theta(\eta), \quad \hat{\varphi}(\eta; 0) = \varphi_0(\eta), \quad \hat{\varphi}(\eta; 1) = \varphi(\eta). \end{aligned}$$

Таким образом, при  $p \rightarrow 1$  получаем решение рассматриваемой краевой задачи. Следуя [29], запишем уравнения деформации  $m$ -го порядка

$$\begin{aligned} L_1[f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] &= h_1 R_{1m}(\eta), \\ L_2[\theta_m(\eta) - \chi_m \theta_{m-1}(\eta)] &= h_2 R_{2m}(\eta), \\ L_3[\varphi_m(\eta) - \chi_m \varphi_{m-1}(\eta)] &= h_3 R_{3m}(\eta) \end{aligned} \quad (12)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} f_m(0) = f'_m(0) = f'_m(\infty) = 0, \\ \theta_m(0) = \theta_m(\infty) = 0, \quad \varphi_m(0) = \varphi_m(\infty) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} R_{1m}(\eta) &= \Theta M \left( \frac{\eta}{2} f''_{m-1} - f'_{m-1} \right) + K \Theta f'_{m-1} + \sum_{k=0}^{m-1} \left[ -2M \left( \frac{\eta}{2} \theta_{m-1-k} f''_k + \theta_{m-1-k} f'_k \right) + \right. \\ &\quad \left. + \Theta f'_{m-1-k} f'_k - \Theta f_{m-1-k} f''_k - \theta'_{m-1-k} f''_k - K \theta_{m-1-k} f'_k \right] + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^k \left[ \frac{M}{\Theta} \left( \frac{\eta}{2} \theta_{m-1-k} \theta_{k-l} f''_l + \theta_{m-1-k} \theta_{k-l} f'_l \right) - 2\theta_{m-1-k} f'_{k-l} f'_l + 2\theta_{m-1-k} f_{k-l} f''_l \right] + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^k \sum_{r=0}^l (\theta_{m-1-k} \theta_{k-l} f'_{l-r} f'_r - \theta_{m-1-k} \theta_{k-l} f_{l-r} f''_r), \\ R_{2m}(\eta) &= \text{Pr} \left( M \frac{\eta}{2} \theta'_{m-1} + \frac{3}{2} M \theta_{m-1} \right) - \theta''_{m-1} + \sum_{k=0}^{m-1} \left[ \text{Pr} \left( 2f'_{m-1-k} \theta_k - f_{m-1-k} \theta'_k - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - M \frac{\eta}{2\Theta} \theta_{m-1-k} \theta'_{m-1-k} + \frac{3}{2\Theta} M \theta_{m-1-k} \theta_k \right) - \beta \theta_{m-1-k} \theta''_k - \beta \theta_{m-1-k} \theta_k \right] + \\ &\quad + \frac{\text{Pr}}{\Theta} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^k (-2f'_{m-1-k} \theta_{k-l} \theta_l + f_{m-1-k} \theta_{k-l} \theta'_l), \\ R_{3m}(\eta) &= \varphi''_{m-1} - \text{Sc} \frac{M}{2} \eta \varphi' + \text{Sc} \sum_{k=0}^{m-1} (f_{m-1-k} \varphi'_k - 2f'_{m-1-k} \varphi_k), \\ \chi_m &= \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Система (12), (13) представляет собой линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается с помощью пакета программ МАТНЕМАТИСА. Окончательное решение можно записать в форме бесконечного ряда

$$f(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\eta), \quad \theta(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \theta_m(\eta), \quad \varphi(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(\eta). \quad (14)$$

В [29] доказано, что, в случае если бесконечные ряды (14) являются сходящимися, они представляют собой решение рассматриваемой задачи. Сходимость рядов решения (14) доказана в подп. 2.3.

2.2. *Численное решение.* Система обыкновенных дифференциальных уравнений (9) с граничными условиями (10) решается с помощью схемы Рунге — Кутты четвертого порядка. Для этого необходимо преобразовать краевые задачи в задачи вида

$$\begin{aligned} f' &= w_1, & w_1' &= w_2, & \theta' &= w_3, & \varphi' &= w_4, \\ w_2' &= \left(1 - \frac{\theta}{\Theta}\right) \left[ M \left( \frac{\eta}{2} w_2 + w_1 \right) + w_1^2 - f w_2 \right] - \frac{w_3}{\Theta - \theta} w_2 + K w_1, \\ w_3' &= \frac{\text{Pr}}{1 + \beta \theta} \left(1 - \frac{\theta}{\Theta}\right) \left( \frac{M}{2} \eta w_3 + \frac{3}{2} M \theta + 2 w_1 \theta - f w_3 \right) - \frac{\beta w_3^2}{1 + \beta \theta}, \\ w_4' &= \text{Sc} (M \eta / 2 - f) w_4 + 2 \text{Sc} w_1 \varphi \end{aligned} \quad (15)$$

с начальными условиями

$$f(0) = S, \quad f'(0) = 1, \quad \theta(0) = 1, \quad \varphi(0) = 1. \quad (16)$$

Для того чтобы решить задачу (15), (16), используем метод Рунге — Кутты четвертого порядка совместно с методом стрельбы, выбирая значения  $f''(0)$ ,  $\theta'(0)$ ,  $\varphi'(0)$  при заданных параметрах  $M$ ,  $\Theta$ ,  $\beta$ ,  $K$ ,  $S$ ,  $\text{Pr}$ ,  $\text{Sc}$ . Численное решение получено с использованием программного обеспечения Matlab, расчет выполнялся с точностью до  $10^{-7}$  при различных величинах шагов.

2.3. *Сходимость и точность решения, полученного методом гомотопического анализа.* Согласно [29] скорость сходимости рядов решения, получаемого методом гомотопического анализа, существенно зависит от параметра  $h$ . На рис. 1–3 представлены диапазоны значений  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  для приближения 16-го порядка. Видно, что допустимые значения  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  находятся в интервалах  $0,2 < h_1 < 0,6$ ,  $-1,1 < h_2 < -0,5$  и  $-1,5 < h_3 < -0,3$ . Однако значения этих параметров могут быть найдены при вычислении остаточных погрешностей. Результаты проведенного анализа показывают, что при  $h_1 = 0,34$ ,  $h_2 = -0,882$ ,  $h_3 = -0,9165$  остаточные погрешности  $\delta_f$ ,  $\delta_\theta$ ,  $\delta_\varphi$  быстро уменьшаются, при этом порядок аппроксимации увеличивается (табл. 1). Это доказывает сходимость решения, полученного методом гомотопического анализа. Чтобы доказать справедливость этого решения, нужно провести его сравнение с численным решением (табл. 2). Из табл. 2 следует, что данные решения хорошо согласуются.

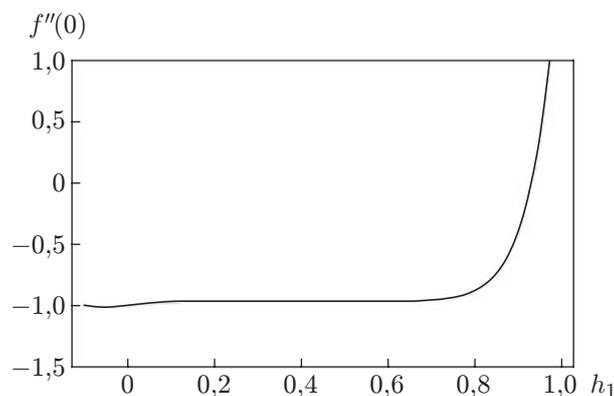


Рис. 1. Зависимость скорости  $f''(0)$  от параметра  $h_1$  при  $M = 0,5$ ,  $S = 0$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\text{Pr} = 0,5$ ,  $K = 0,5$

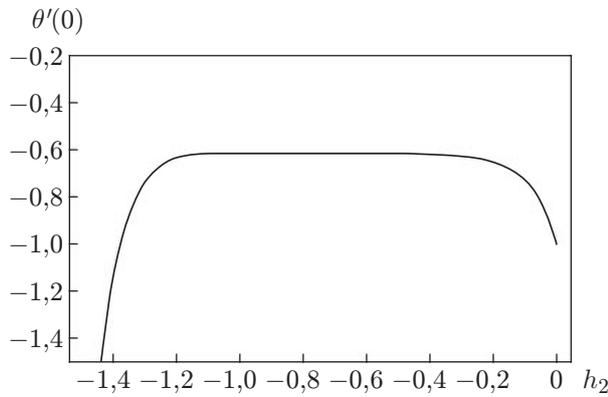


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость температуры  $\theta'(0)$  от параметра  $h_2$  при  $M = 0,5, S = 0, \beta = 0,5, Pr = 0,5, K = 0,5$

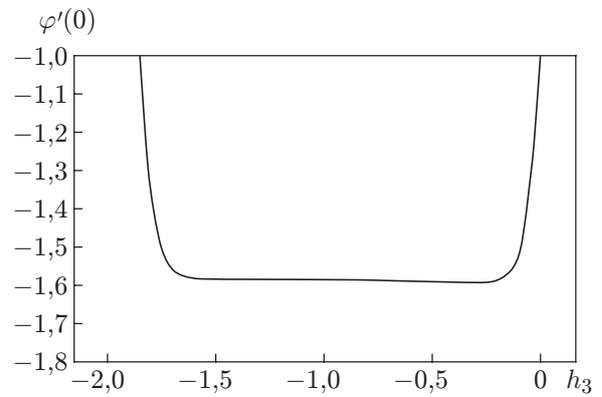


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость массовой концентрации  $\varphi'(0)$  от параметра  $h_3$  при  $M = 0,5, S = 0, Sc = 1,5, K = 0,5$

Таблица 1

Сходимость решения, полученного методом гомотопического анализа, для приближений различного порядка  $m$  при  $\beta = 0,5, M = 0,5, S = 0, Pr = 0,5, K = 0,5, Sc = 2,0, h_1 = 0,34, h_2 = -0,882, h_3 = -0,9165$

$m$	$f''(0)$	$\theta'(0)$	$\varphi'(0)$	$\delta_f$	$\delta_\theta$	$\delta_\varphi$
1	-0,9808	-0,5926	-1,9546	$1,2219 \cdot 10^{-2}$	$5,8717 \cdot 10^{-2}$	$3,5035 \cdot 10^{-2}$
5	-0,9622	-0,6196	-1,8952	$9,6390 \cdot 10^{-4}$	$1,8064 \cdot 10^{-3}$	$1,0436 \cdot 10^{-4}$
10	-0,9623	-0,6164	-1,8927	$9,8154 \cdot 10^{-5}$	$5,2720 \cdot 10^{-5}$	$2,2247 \cdot 10^{-5}$
15	-0,9625	-0,6159	-1,8915	$1,9933 \cdot 10^{-5}$	$7,8270 \cdot 10^{-6}$	$1,1746 \cdot 10^{-5}$
17	-0,9626	-0,6159	-1,8912	$1,0695 \cdot 10^{-5}$	$3,8784 \cdot 10^{-6}$	$9,6991 \cdot 10^{-6}$
18	-0,9626	-0,6159	-1,8910	$7,8148 \cdot 10^{-6}$	$2,7443 \cdot 10^{-6}$	$6,1770 \cdot 10^{-6}$
19	-0,9626	-0,6159	-1,8910	$5,7005 \cdot 10^{-6}$	$1,9465 \cdot 10^{-6}$	$3,3184 \cdot 10^{-6}$
20	-0,9626	-0,6159	-1,8910	$4,1523 \cdot 10^{-6}$	$1,3848 \cdot 10^{-6}$	$2,0067 \cdot 10^{-6}$

Таблица 2

Решения, полученные методом гомотопического анализа и численно, при  $M = 0,5, K = 0,5, S = 0, Sc = 2,0$

$\beta$	Pr	Решение методом гомотопического анализа			Численное решение		
		$f''(0)$	$\theta'(0)$	$\varphi'(0)$	$f''(0)$	$\theta'(0)$	$\varphi'(0)$
0,5	0,5	-0,9626	-0,6159	-1,8910	-0,9624	-0,6169	-1,8948
0,7	0,5	-0,9692	-0,5633	-1,8914	-0,9690	-0,5644	-1,8950
1,0	0,5	-0,9774	-0,5026	-1,8911	-0,9774	-0,5035	-1,8947
1,5	0,5	-0,9885	-0,4302	-1,8907	-0,9885	-0,4314	-1,8943
0,5	0,7	-0,9447	-0,7558	-1,8922	-0,9447	-0,7560	-1,8925
0,5	1,0	-0,9250	-0,9352	-1,8907	-0,9249	-0,9352	-1,8925
0,5	1,5	-0,9017	-1,1852	-1,8878	-0,9017	-1,1852	-1,8912
0,5	2,0	-0,8853	-1,3974	-1,8873	-0,8852	-1,3973	-1,8887

**3. Результаты исследования и их обсуждение.** На рис. 4–12 показано влияние различных параметров на скорость, температуру и массоперенос. На рис. 4 видно, что с увеличением температуропроводности толщина тепловых пограничных слоев увеличивается, вследствие чего в пограничном слое возрастает температура. На рис. 5 показано влияние числа Шмидта на профиль концентрации. Заметим, что с увеличением  $Sc$  значение концентрации уменьшается. Следовательно, при больших значениях  $Sc$  массоперенос является достаточно большим вблизи пластины. На рис. 6, 7 представлены зависимости касательного напряжения от параметров  $M$  и  $S$  соответственно при различных значениях параметра пористости  $K$ . Видно, что с увеличением параметра пористости касательное напряжение на растягивающейся пластине увеличивается. Это происходит вследствие того, что большие значения  $K$  соответствуют малой проницаемости, т. е. отверстиям пор небольшого диаметра, на стенках которых возникают большие касательные напряжения, увеличивающиеся при наличии отсоса на стенке. На рис. 6 также видно, что касательное напряжение на пластине увеличивается с увеличением значения  $M$ . Этот факт можно объяснить следующим образом: при фиксированном значении  $\alpha$  увеличение значения  $M$  соответствует уменьшению скорости растяжения, что указывает на наличие большого касательного напряжения (см. также рис. 7). На рис. 8–10 представлены зависимости локального числа Нуссельта от  $M$ ,  $S$ ,  $Pr$  соответственно при различных значениях параметра пористости  $K$ . Видно, что увеличение пористости среды приводит к уменьшению скорости теплообмена. Из рис. 8–10 следует, что с увеличением значений  $M$ ,  $S$ ,  $Pr$  скорость теплообмена на пластине увеличивается. Таким образом, наличие сильного отсоса и большие значения числа Прандтля жидкости способствуют ускорению процесса охлаждения. На рис. 11, 12 видно, что с увеличением параметра пористости среды  $K$  локальное число Шервуда  $\varphi'(0)$  уменьшается. Из рис. 11 следует, что с увеличением параметра нестационарности  $M$  число Шервуда увеличивается. Это обусловлено тем, что вблизи пластины пористость среды с течением времени увеличивается и как следствие скорость массопереноса уменьшается. Однако при наличии отсоса на пластине скорость массопереноса значительно увеличивается (см. рис. 12).

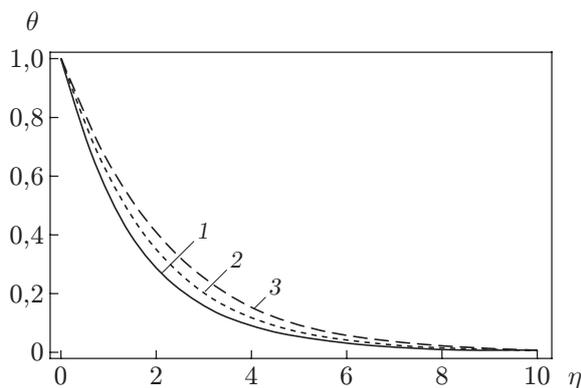


Рис. 4

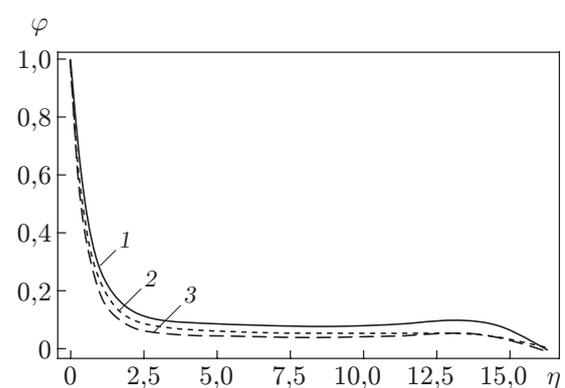


Рис. 5

Рис. 4. Влияние параметра температуропроводности  $\beta$  на профиль температуры  $\theta(\eta)$  ( $S = 0$ ,  $\Theta = 2$ ,  $M = 0,5$ ,  $K = 0,5$ ,  $Pr = 0,5$ ):

1 —  $\beta = 0,5$ ; 2 —  $\beta = 1,0$ ; 3 —  $\beta = 1,5$

Рис. 5. Влияние числа Шмидта  $Sc$  на функцию концентрации  $\varphi(\eta)$  ( $S = 0$ ,  $\Theta = 2$ ,  $M = 0,5$ ,  $K = 0,5$ ):

1 —  $Sc = 1,5$ ; 2 —  $Sc = 1,7$ ; 3 —  $Sc = 2,0$

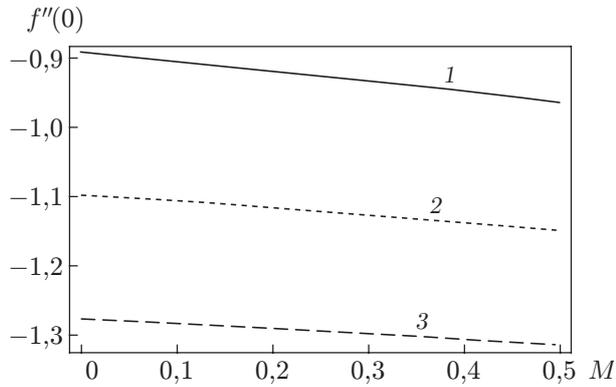


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость  $f''(0)$  от  $M$  при  $S = 0$ ,  $\Theta = 2$ ,  $\beta = 0,5$  и различных значениях  $K$ :

1 —  $K = 0,5$ ; 2 —  $K = 1,0$ ; 3 —  $K = 1,5$

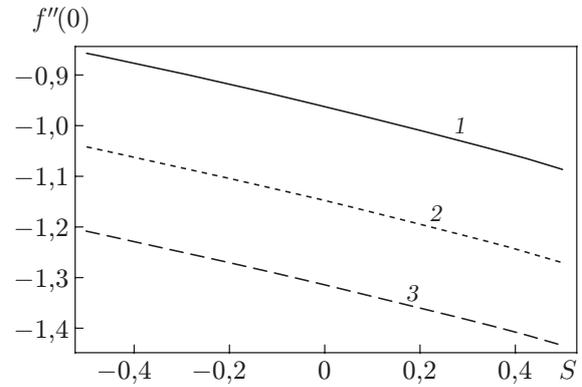


Рис. 7

Рис. 7. Зависимость  $f''(0)$  от  $S$  при  $M = 0,5$ ,  $\Theta = 2$ ,  $\beta = 0,5$  и различных значениях  $K$ :

1 —  $K = 0,5$ ; 2 —  $K = 1,0$ ; 3 —  $K = 1,5$

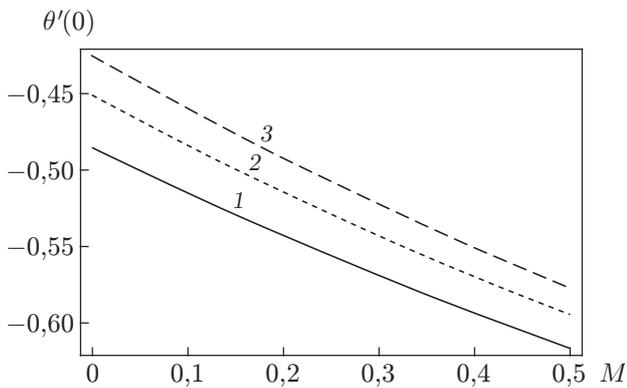


Рис. 8

Рис. 8. Зависимость  $\theta'(0)$  от  $M$  при  $S = 0$ ,  $\Theta = 2$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $Pr = 0,5$  и различных значениях  $K$ :

1 —  $K = 0,5$ ; 2 —  $K = 1,0$ ; 3 —  $K = 1,5$

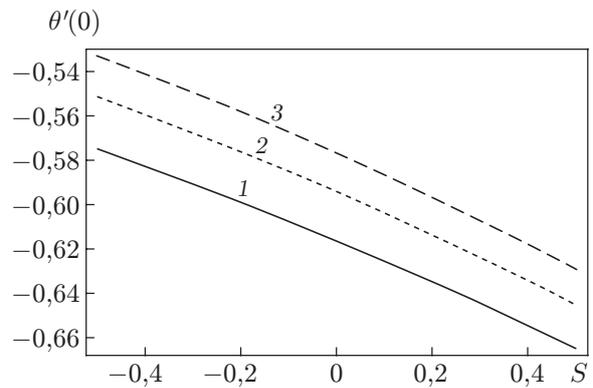


Рис. 9

Рис. 9. Зависимость  $\theta'(0)$  от  $S$  при  $M = 0,5$ ,  $\Theta = 2$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $Pr = 0,5$  и различных значениях  $K$ :

1 —  $K = 0,5$ ; 2 —  $K = 1,0$ ; 3 —  $K = 1,5$

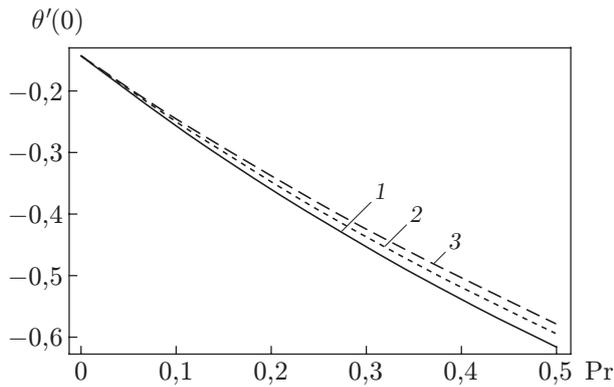


Рис. 10

Рис. 10. Зависимость  $\theta'(0)$  от  $Pr$  при  $S = 0$ ,  $\Theta = 2$ ,  $M = 0,5$  и различных значениях  $K$ :

1 —  $K = 0,5$ ; 2 —  $K = 1,0$ ; 3 —  $K = 1,5$

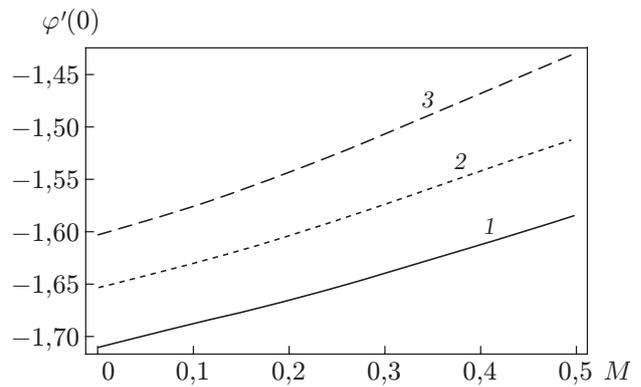


Рис. 11

Рис. 11. Зависимость  $\varphi'(0)$  от  $M$  при  $S = 0$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\Theta = 2$ ,  $Sc = 1,5$  и различных значениях  $K$ :

1 —  $K = 0,5$ ; 2 —  $K = 1,0$ ; 3 —  $K = 1,5$

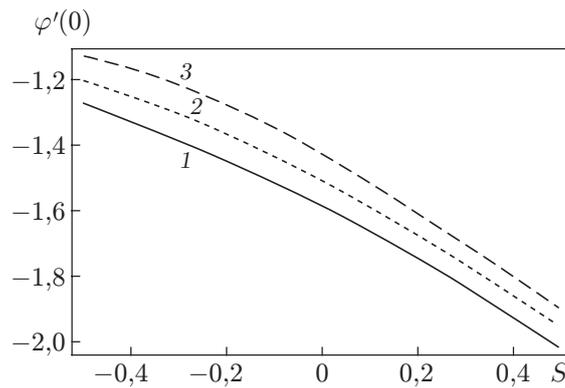


Рис. 12. Зависимость  $\varphi'(0)$  от  $S$  при  $M = 0,5$ ,  $\Theta = 2$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $Sc = 1,5$  и различных значениях  $K$ :

1 —  $K = 0,5$ ; 2 —  $K = 1,0$ ; 3 —  $K = 1,5$

**Заключение.** В работе изучены процессы теплопереноса течения несжимаемой вязкой жидкости в пограничном слое. С использованием метода гомотопического анализа [29] и метода Рунге — Кутты совместно с методом стрельбы получены аналитические и численные решения соответственно. Сравнение этих решений показывает, что они хорошо согласуются. Исследовано влияние различных параметров, таких как параметр нестационарности, параметр, характеризующий зависимость вязкости жидкости от температуры, температуропроводность, параметр отсоса, параметр пористости, числа Прандтля и Шмидта, на характеристики переноса импульса, тепла и массы в пограничном слое. Анализ результатов решения задачи показывает, что наличие теплопроводности приводит к уменьшению скорости охлаждения пластины. Отмечено, что с увеличением параметров  $M$  и  $S$  касательное напряжение на пластине увеличивается. Увеличение значений параметров  $M$ ,  $S$ ,  $Pr$  приводит также к ускорению процесса охлаждения растягивающейся пластины. В пористой среде скорость теплопереноса уменьшается, однако при наличии отсоса на пластине она увеличивается.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Herwig H., Wickern G.** The effect of variable properties on laminar boundary layer flow // *Wärme- und Stoffübertrag.* 1986. Bd 20. S. 47–57.
2. **Saouli S., Aiboud-Saouli S.** Second law analysis of laminar falling liquid film along an inclined heated plate // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer.* 2004. V. 31. P. 879–886.
3. **Makinde O. D.** Heat and mass transfer in a pipe with moving surface effect of viscosity variation and energy dissipation // *Quaestiones Math.* 2001. V. 24. P. 93–104.
4. **Szeri A. Z., Rajagopal K. R.** Flow of a non-Newtonian fluid between heated parallel plates // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 1985. V. 20. P. 91–101.
5. **Pop I., Gorla R. S. R., Rashidi M.** The effect of variable viscosity on flow and heat transfer to a continuous moving flat plate // *Intern. J. Engng Sci.* 1992. V. 30. P. 1–6.
6. **Mukhopadhyay S., Layek G. C., Samad Sk. A.** Study of MHD boundary layer flow over a heated stretching sheet with variable viscosity // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2005. V. 48. P. 4460–4466.
7. **Ali M. E.** The effect of variable viscosity on mixed convection heat transfer along a vertical moving surface // *Intern. J. Thermal Sci.* 2006. V. 45. P. 60–69.
8. **Yurusoy M., Pakdemirli M.** Approximate analytical solutions for the flow of a third-grade fluid in a pipe // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2002. V. 37. P. 187–195.
9. **Elbashbeshy E. M. A., Bazid M. A. A.** The effect of temperature dependent viscosity on heat transfer over a continuous moving surface with variable internal heat generation // *J. Phys. D. Appl. Phys.* 2004. V. 153. P. 721–731.
10. **Makinde O. D.** Laminar falling liquid film with variable viscosity along an inclined heated plate // *Appl. Math. Comput.* 2006. V. 175. P. 80–88.
11. **Rahman M. M., Salahuddin K. M.** Study of hydromagnetic heat and mass transfer flow over an inclined heated surface with variable viscosity and electric conductivity // *Comm. Non-Linear Sci. Numer. Simulat.* 2010. V. 15, N 5. P. 2073–2085.
12. **Seddeek M. A., Darwish A. A., Abdelmeguid M. S.** Effects of chemical reaction and variable viscosity on hydromagnetic mixed convection heat and mass transfer for Hiemenz flow through porous media with radiation // *Comm. Non-Linear Sci. Numer. Simulat.* 2007. V. 12. P. 195–213.
13. **Ghaly A. Y., Seddeek M. A.** Chebyshev finite difference method for the effects of chemical reaction, heat and mass transfer on laminar flow along a semi infinite horizontal plate with temperature dependent viscosity // *Chaos Solitons Fractals.* 2004. V. 19. P. 61–70.

14. **Gupta P. S., Gupta A. S.** Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing // *Canad. J. Chem. Engng.* 1977. V. 55. P. 744–746.
15. **Liu I. C.** A note on heat and mass transfer for a hydromagnetic flow over a stretching sheet // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer.* 2005. V. 32. P. 1075–1084.
16. **Kandaswamy R., Penaswamy K., Prabhu K. K. S.** Chemical reaction, heat and mass transfer on MHD flow over a vertical stretching surface with heat source and thermal stratification effects // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2005. V. 48. P. 4557–4561.
17. **Erickson L. E., Fan L. T., Fox V. G.** Heat and mass transfer on a moving continuous flat plate with suction or injection // *Industr. Engng Chem.* 1966. V. 5. P. 19–25.
18. **Chamkha A. J., Khaled A. A.** Similarity solutions for hydromagnetic mixed convection heat and mass transfer for Hiemenz flow through porous media // *Intern. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow.* 2000. V. 10. P. 94–115.
19. **Tasi R., Huang J. S.** Numerical study of Soret and Dufour effects on heat and mass transfer from natural convection flow over a vertical porous medium with variable wall heat fluxes // *Comput. Materials Sci.* 2009. V. 47. P. 23–30.
20. **Kandasamy R., Muhaimin, Hashim I., Ruhaila.** Thermophoresis and chemical reaction effects on non-Darcy mixed convection heat and mass transfer past a porous wedge with variable viscosity in the presence of suction or injection // *Nuclear Engng Design.* 2008. V. 238. P. 2699–2705.
21. **Hassanien I. A., Essawy A. H., Moursy N. M.** Variable viscosity and thermal conductivity effects on combined heat and mass transfer in mixed convection over a UHF/UMF wedge in porous media: the entire regime // *Appl. Math. Comput.* 2003. V. 145. P. 667–682.
22. **Mbeledogu I. U., Ogulu A.** Heat and mass transfer of an unsteady MHD natural convection flow of a rotating fluid past a vertical porous flat plate in the presence of radiative heat transfer // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2007. V. 50. P. 1902–1908.
23. **Chamkha Ali J., Ali Al-Mudhaf.** Unsteady heat and mass transfer from a rotating vertical cone with a magnetic field and heat generation or absorption effects // *Intern. J. Thermal Sci.* 2005. V. 44. P. 267–276.
24. **Kamel M. H.** Unsteady MHD convection through porous medium with combined heat and mass transfer with heat source/sink // *Energy Conversion Management.* 2001. V. 42. P. 393–405.
25. **Elbashbeshy E. M. A., Bazid M. A. A.** Heat transfer over an unsteady stretching surface // *Heat Mass Transfer.* 2004. V. 41. P. 1–4.
26. **Moraga N. O., Corvalan F., Escudey M., et al.** Unsteady 2D coupled heat and mass transfer in porous media with biological and chemical heat generations // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2009. V. 52. P. 5841–5848.
27. **Ling J. X., Dybbs A.** Forced convection over a flat plate submersed in a porous medium: variable viscosity case // *ASME winter annual meeting.* Boston: S. n., 1987. P. 13–18.
28. **Lai F. C., Kulacki F. A.** The effect of variable viscosity on convective heat transfer along a vertical surface in a saturated porous medium // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1990. V. 33. P. 1028–1033.
29. **Liao S. J.** *Beyond perturbation, introduction to homotopy analysis method.* Boca Raton: Chapman and Hall/CRC press, 2003.
30. **Liao S. J.** On the analytic solution of magnetohydrodynamic flows of non-Newtonian fluid over a stretching sheet // *J. Fluid. Mech.* 2003. V. 488. P. 189–212.
31. **Abbasbandy S.** The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer // *Phys. Lett. A.* 2006. V. 360. P. 109–113.

32. **Wu Y., Wang C., Liao S. J.** Solving solitary waves with discontinuity by means of the homotopy analysis method // *Chaos Solitons Fractals*. 2005. V. 26. P. 177–194.
33. **Liao S. J., Cheung K. F.** Homotopy analysis of nonlinear progressive waves in deep water // *J. Engng Math*. 2003. V. 45. P. 105–116.
34. **Xu H., Liao S. J.** Series solutions of unsteady magnetohydrodynamic flows of non-Newtonian fluids caused by an impulsively stretching plate // *J. Non-Newtonian Fluid Mech*. 2005. V. 129. P. 46–55.
35. **Ali A., Mehmood A.** Homotopy analysis of unsteady boundary layer flow adjacent to permeable stretching surface in a porous medium // *Comm. Non-Linear Sci. Numer. Simulat*. 2008. V. 13. P. 340–349.
36. **Ziabakhsh Z., Domairy G., Mozaffari M., Mahbobifar M.** Analytical solution of heat transfer over an unsteady stretching permeable surface with prescribed wall temperature // *J. Taiwan Inst. Chem. Engng*. 2010. V. 41, N 2. P. 169–177.
37. **Xu H.** An explicit analytic solution for free convection about a vertical flat plate in a porous media by mean of homotopy analysis method // *Appl. Math. Comput*. 2004. V. 158. P. 433–443.
38. **Allan F. M., Syam M. I.** On analytic solution of the non-homogeneous Blasius problem // *J. Comput. Appl. Math*. 2005. V. 182. P. 355–365.
39. **Ziabakhsh Z., Domairy G.** Solution of the laminar viscous flow in a semi-porous channel in the presence of uniform magnetic field by using the homotopy analysis method // *Comm. Non-Linear Sci. Numer. Simulat*. 2009. V. 14. P. 1284–1294.
40. **Ziabakhsh Z., Domairy G., Bararnia H.** Analytical solution of non-Newtonian micropolar fluid flow with uniform suction/blowing and heat generation // *J. Taiwan Inst. Chem. Engng*. 2009. V. 40, N 4. P. 443–451.
41. **Bouremel Y.** Explicit series solution for the Glauert-jet problem by means of the homotopy analysis method // *Comm. Non-Linear Sci. Numer. Simulat*. 2007. V. 12, N 5. P. 714–724.
42. **Ziabakhsh Z., Domairy G., Ghazizadeh G.** Analytical solution of the stagnation-point flow in a porous medium by using the homotopy analysis method // *J. Taiwan Inst. Chem. Engng*. 2009. V. 40, N 1. P. 91–97.
43. **Mehmood A., Ali A.** Heat transfer analysis of three-dimensional flow in a channel of lower stretching wall // *J. Taiwan Inst. Chem. Engng*. 2010. V. 41, N 1. P. 29–34.
44. **Mehmood A., Ali A.** An explicit analytic solution of steady three-dimensional stagnation point flow of second grade fluid toward a heated plate // *Trans. ASME. J. Appl. Mech*. 2008. V. 75. P. 061003-1.
45. **Mehmood A., Ali A.** Analytic solution of three-dimensional viscous flow and heat transfer over a stretching flat surface by homotopy analysis method // *Trans. ASME. J. Heat Transfer*. 2008. V. 130. P. 121701-1.

*Поступила в редакцию 7/II 2011 г.*

---