УДК 539.384

СТРЕЛА ПРОГИБА И СБЛИЖЕНИЕ КОНЦОВ СТЕРЖНЯ В ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ

А. В. Анфилофьев

Томский политехнический университет, 634034 Томск

Рассматривается проблема представления в элементарных функциях зависимостей стрелы прогиба и сближения концов стержня в продольном изгибе от нагрузки. Приводится упрощенное решение задачи эластики с видоизмененными выражениями кривизны. В приближенном определении эллиптических интегралов получены уравнения упругой кривой.

При изучении продольного изгиба стержня представляет интерес зависимость стрелы прогиба от нагрузки. В [1] приводится приближенная зависимость

$$\frac{f}{L} \approx \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{1-\frac{P_э}{P}},$$

где f — стрела прогиба; L — длина стержня; $P_э$ — эйлерова нагрузка; P — нагрузка удерживающая стержень в состоянии продольного изгиба. В [2] указано, что вопрос о зависимости между нагрузкой и вызываемым ею за пределом устойчивости прогибом решен до конца. Там же эта зависимость представлена в виде степенного ряда, из которого получены выражения

$$\frac{f}{L} \approx \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\frac{P}{P_э}-1}, \qquad \frac{f}{L} \approx \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\frac{P}{P_э}-1}\Big[1-\frac{19}{16}\Big(\frac{P}{P_э}-1\Big)\Big]$$

с двумя и тремя членами разложения соответственно. Менее изучен вопрос о сближении концов стержня. В [3] Мизес, представляя приближенно искривление стержня первой и третьей гармониками тригонометрического ряда, получил обе зависимости:

$$\frac{f}{L} \approx \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\frac{P}{P_э}-1}\Big[1-\frac{1}{8}\Big(\frac{P}{p_э}-1\Big)\Big], \qquad \frac{\Delta}{L} \approx \frac{2(P-P_э)}{2P-P_э},$$

где Δ — сближение концов стержня. Эти формулы не определяют всего диапазона искривлений стержня, показывая лишь, насколько быстро растут перемещения при незначительном превышении эйлеровой нагрузки.

В настоящее время получена формула с четырьмя членами степенного ряда, позволяющая вычислять прогибы с относительной погрешностью не более 3 % до нагрузок, превышающих критическую в 3,5 раза [4], а также приближенные формулы, позволяющие вычислять координаты упругой линии стержня с погрешностью не более 1 % длины стержня до нагрузок, превышающих критическую нагрузку Эйлера на 30 % [5]. Для более точного определения больших искривлений стержня нужно удерживать все большее число членов разложения, что приводит к усложнению функциональных зависимостей. Поэтому необходимо показать возможность решения этой задачи при любом искривлении стержня.

Уравнения эластики стержня постоянного сечения ($EJ = \text{const}$) с шарнирными опорами в состоянии продольного изгиба при нагрузке $p = P/(EJ)$ обычно формулируются с использованием одного из традиционных выражений кривизны плоской кривой:

$$\frac{d\theta}{dL} = -py, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} \Big/ \Big[1 + \Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2\Big]^{3/2} = -py.$$

Здесь θ — угол наклона касательной к кривой $y(x)$ по ее длине L. Приведенные уравнения нелинейны, решения имеют особенности [6–8], за независимую переменную принимается длина дуги L_x, отсчитываемая от начала координат.

Для упрощения решения задачи используем выражения кривизны [9], в которых она представлена как скорость изменения тригонометрических функций угла наклона касательной по длине проекций кривой. Задача формулируется системой дифференциальных соотношений, где независимой переменной является угол наклона касательной к кривой:

$$\frac{d\cos\theta}{dy} = py, \qquad -\frac{d\sin\theta}{dx} = py, \quad dL = \frac{dy}{\sin\theta}. \tag{1}$$

При начальных условиях $\theta = \theta_0$ при $x = 0$, $y = 0$ из первого уравнения системы (1) следует уравнение

$$y\sqrt{p} = \sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}. \tag{2}$$

Из второго и третьего уравнений (1) при подстановке (2) получим

$$dx\,\sqrt{p} = -\frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}, \qquad dL\,\sqrt{p} = -\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}.$$

Интегрированием от начала координат до произвольной точки кривой (x, y, θ) находим уравнение абсцисс точек кривой и длину дуги:

$$x\sqrt{p} = -\int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}, \qquad L_x\sqrt{p} = -\int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}. \tag{3}$$

Интегралы в выражениях (3) не являются элементарными функциями. Введем переменную k:

$$k = \sin(\theta_0/2), \qquad \sin\varphi = \sin(\theta/2)/k. \tag{4}$$

Тогда с учетом (4) и соотношения $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ интегралы в выражениях (3) преобразуются в нормальные эллиптические интегралы, значения которых находятся в таблицах в зависимости от модуля k (или угла $\alpha = \arcsin k$) и аргумента (или амплитуды) φ. Уравнения эластики стержня в параметрах эллиптических интегралов имеют вид

$$y\sqrt{p} = 2k\cos\varphi; \tag{5}$$

$$x\sqrt{p} = \int\limits_{\pi/2}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (k\sin\varphi)^2}} - 2\int\limits_{\pi/2}^{\varphi} \sqrt{1 - (k\sin\varphi)^2}\,d\varphi =$$
$$= F(\varphi, k) - F(\pi/2, k) - 2[E(\varphi, k) - E(\pi/2, k)]; \tag{6}$$

$$L_x\sqrt{p} = -\int\limits_{\pi/2}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (k\sin\varphi)^2}} = F(\pi/2, k) - F(\varphi, k), \tag{7}$$

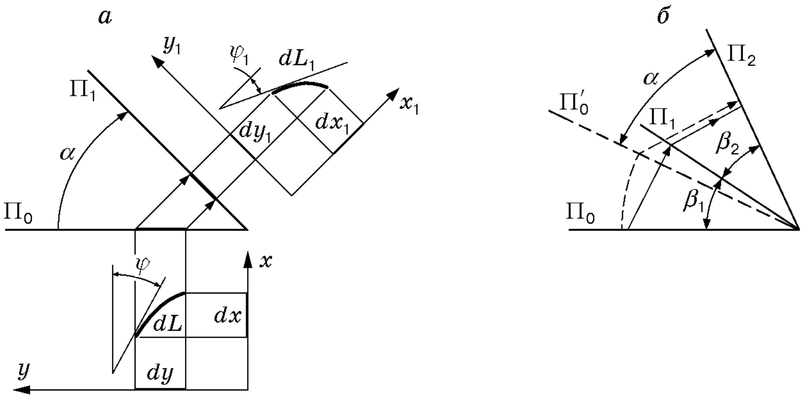

Рис. 1. Отображение линии с плоскости Π_0 на наклонную плоскость Π_1 (a), двойное отображение $\Pi_0 \to \Pi_1 \to \Pi_2$ и эквивалентное ему $\Pi_0' \to \Pi_2$ (*б*)

где $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$ — неполные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. При $\varphi = \pi/2$ они называются полными.

Из уравнений (4)–(7) при подстановке $x = l/2$, $y = f$, $\theta = 0$ получаем стрелу прогиба, хорду и длину стержня: $f\sqrt{p} = 2k$, $l\sqrt{p} = 2[2E(\pi/2, k) - F(\pi/2,)]$, $L\sqrt{p} = 2F(\pi/2, k)$. Относительные значения перемещений

$$\frac{f}{L} = \frac{k}{F(\pi/2,k)}, \qquad \frac{\Delta}{L} = 1 - \frac{l}{L} = 2\Big[1 - \frac{E(\pi/2,k)}{F(\pi/2,k)}\Big], \tag{8}$$

относительное значение нагрузки

$$P/P_э = [2F(\pi/2,k)/\pi]^2. \tag{9}$$

При подстановке (9) в (8) получим соотношения

$$\frac{f}{L} = \frac{2}{\pi}k\sqrt{\frac{P_э}{P}}, \qquad \frac{\Delta}{L} = 2\Big[1 - \sqrt{\frac{P_э}{P}}\,\frac{2E(\pi/2,k)}{\pi}\Big]. \tag{10}$$

Из формул (10) следует, что элементарных связей между нагрузкой и перемещениями не существует, поскольку не существует их между эллиптическими интегралами и их модулем k. Необходимые связи могут быть только приближенными, и их можно получать, приближенно представляя исходные интегралы в (3) или соответствующие им эллиптические в виде элементарных функций. Формальное представление их ограниченным числом членов степенного или тригонометрического ряда [1, 3] неэффективно: ряды медленно сходятся. Необходимы другие подходы, одним из которых является поиск приближенного выражения для одного из эллиптических интегралов и использование связей между этими интегралами для определения другого.

Интеграл первого рода определяет длину дуг лемнискаты Бернулли, интеграл второго рода определяет длину дуги эллипса и имеет более простую геометрическую интерпретацию. Эллипс можно получить, проецируя окружность с одной плоскости на другую, расположенную под углом к первой. Следовательно, длину дуги эллипса несложно определить через параметры дуги окружности.

Рассмотрим отображение линии $y = f(x)$ с плоскости Π_0 на плоскость Π_1 (α — угол между плоскостями) (рис. 1,a). На плоскости Π_0 проекции дифференциала дуги dL на координатные оси равны $dy = dL\sin\varphi$, $dx = dL\cos\varphi$. На плоскости Π_1 получаем линию $y_1 = f(x_1)$, дифференциал длины дуги которой $dL_1 = \sqrt{dy_1^2 + dx_1^2}$. С учетом соотношений $dy_1 = dy\cos\alpha = dL\sin\varphi\cos\alpha$ и $dx_1 = dx$

$$dL_1 = dL\sqrt{1 - \sin^2\!\alpha\sin\varphi}. \tag{11}$$

Из (11) следует, что если на плоскости Π_0 находится дуга окружности радиусом R с центральным углом φ, то длина ее проекции на плоскости Π_1 определяется эллиптическим интегралом второго рода:

$$L_1 = R\int\limits_0^{\varphi} \sqrt{1 - (\sin\alpha\sin\varphi)^2}\, d\varphi = RE(\varphi, k). \qquad (12)$$

Согласно (11) $E(\varphi, k)$ есть угловая мера дуги сжатого эллипса с центральным углом φ. Здесь угол α, модуль k и аргумент φ имеют конкретное геометрическое представление. При $\alpha = 0$ длина дуги окружности также определяется эллиптическим интегралом: $E(\varphi, 0) = \varphi$. При вращении плоскости Π_1 от 0 до $\pi/2$ и далее от $\pi/2$ до π или в обратном направлении длина дуги эллипса легко определяется: интеграл $E(\varphi, k)$ является периодической функцией угла α.

Для получения приближенного выражения интеграла (12) осуществим последовательно два преобразования по схеме, представленной на рис. 1,*б*. После отображения с плоскости Π_0 на плоскость Π_1 согласно (11) получим $dL_1 = dL\sqrt{1 - \sin^2\beta_1\sin^2\varphi}$. После второго отображения с плоскости Π_1 на плоскость Π_2 имеем $dL_2 = dL_1\sqrt{1 - \sin^2\beta_2\sin^2\varphi_1} = dL\sqrt{1 - \sin^2\beta_1\sin\varphi}\sqrt{1 - \sin^2\beta_2\sin\varphi_1}$. В результате при $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ в предположении $\sin^2\varphi = \sin^2\varphi_1$ получим

$$dL_2 \approx dL(1 - \sin^2\beta\sin^2\varphi). \qquad (13)$$

Из указанного предположения следует равенство $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi(1/\cos^2\beta) \approx 1$.

Одно отображение с плоскости Π_0' (повернутая плоскость Π_0) на плоскость Π_2 с углом между ними α эквивалентно двум последовательным:

$$dL_2 = dL\sqrt{1 - \sin^2\alpha\sin^2\varphi}. \qquad (14)$$

Согласно рис. 1,*б* $\cos\alpha = \cos\beta_1\cos\beta_2 = \cos^2\beta$, соответственно из равенств (13) и (14) следует соотношение

$$\sqrt{1 - \sin^2\alpha\sin^2\varphi} \approx 1 - (1 - \cos^2\beta)\sin^2\varphi = \cos^2\varphi + \cos\alpha\sin^2\varphi. \qquad (15)$$

С использованием подынтегральной функции (15) получим приближенное выражение эллиптического интеграла второго рода

$$E(\varphi, k) \approx \int\limits_0^{\varphi} (\cos^2\varphi + \cos\alpha\sin^2\varphi)\, d\varphi = \varphi\Big(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}\sin^2\frac{\alpha}{2}\Big). \qquad (16)$$

Из формулы [10] $\partial E(\varphi, k)/\partial k = [E(\varphi, k) - F(\varphi, k)]/k$ с учетом $k = \sin\alpha$ получим уравнение

$$F(\varphi, k) = E(\varphi, k) - \operatorname{tg}\alpha\,\frac{dE(\varphi, k)}{d\alpha}. \qquad (17)$$

При подстановке (16) в (17) получим выражение интеграла первого рода

$$F(\varphi, k) \approx \frac{\varphi}{\cos\alpha}\Big(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}\sin^2\frac{\alpha}{2}\Big). \qquad (18)$$

Из (16) и (18) при $\varphi = \pi/2$ находим полные интегралы

$$E(\pi/2, k) \approx \frac{\pi}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}, \qquad F(\pi/2, k) \approx \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}. \qquad (19)$$

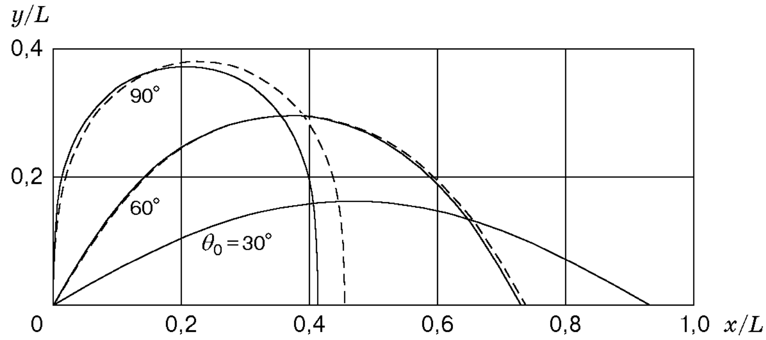

Рис. 2. Эластика стержня в продольном изгибе:
штриховые кривые — точное решение в эллиптических интегралах, сплошные — приближенное решение

С использованием приближенных выражений интегралов (16), (18), (19) при $\alpha = \theta_0/2$ уравнения упругой кривой (5), (6) принимают вид

$$\frac{y}{L} \approx \frac{\sin\theta_0}{\pi\cos^2(\theta_0/4)}\cos\varphi, \quad \frac{x}{L} \approx \Big(\frac{2\varphi}{\pi} - 1\Big)\Big(1 - 2\cos\frac{\theta_0}{2}\Big) - \frac{\sin 2\varphi}{\pi}\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\theta_0}{4}\Big(1 + 2\cos\frac{\theta_0}{2}\Big),$$

где согласно (4) $\varphi = \arcsin[\sin(\theta/2)/\sin(\theta_0/2)]$. По этим уравнениям строится упругая кривая для заданного угла поворота сечения стержня в начале координат θ_0. Координаты точек вычисляются по значениям угла θ. Нагрузка, соответствующая кривой, находится по формуле (9), которая с учетом (19) принимает вид

$$\frac{P}{P_э} \approx \frac{1}{[1 - \mathrm{tg}^2(\theta_0/4)]^2}. \tag{20}$$

На рис. 2 представлены упругие кривые стержня, угол θ которого меняется в диапазоне $-\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$. Следует отметить, что ординаты кривых вычисляются более точно, чем

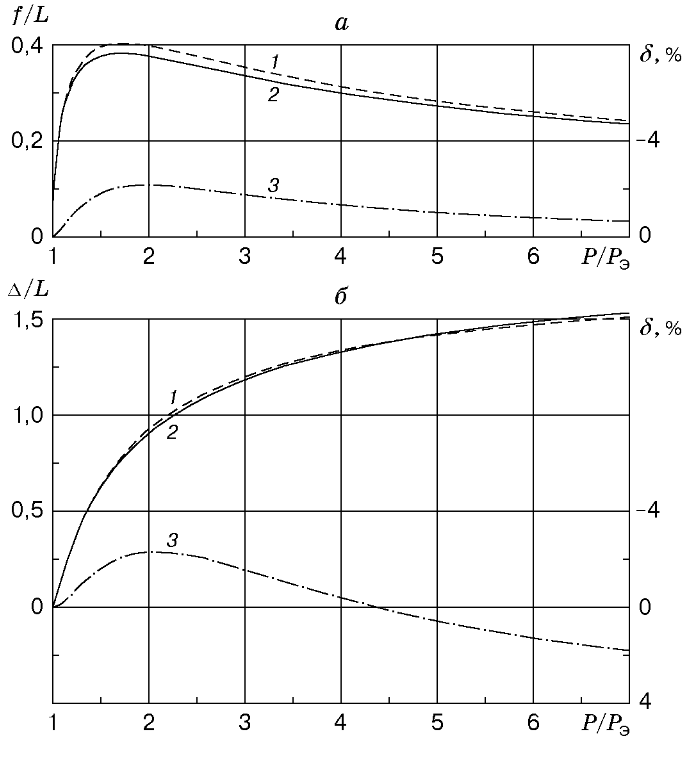

Рис. 3. Зависимости стрелы прогиба (*а*) и сближения концов стержня (*б*) от нагрузки:
1 — точное решение, *2* — приближенное, *3* — погрешность δ

абсциссы. Так, при $\theta_0 = 90°$, когда погрешность вычисления полного интеграла первого рода достигает $+2{,}3\,\%$ и второго рода — $-0{,}72\,\%$, погрешности приближенного вычисления стрелы прогиба и хорды составляют соответственно $-0{,}85\,\%$ и $-4{,}3\,\%$. Расчетное значение нагрузки занижено на $4{,}5\,\%$ относительно точного.

Для построения упругой кривой по заданной нагрузке вначале из соотношения (20) находится угол $\theta_0 \approx 4 \operatorname{arctg} \sqrt{1 - \sqrt{P_э/P}}$, затем координаты точек этой кривой. Например, для нагрузки $P/P_э = 1{,}393$ вместо точного значения $\theta_0 = 90°$ получим $\theta_0 \approx 85{,}4°$ (погрешность $5{,}1\,\%$). В этом случае погрешность вычисления стрелы прогиба составляет $-1{,}6\,\%$, хорды — $+1{,}3\,\%$.

Из соотношений (10) с использованием приближенных выражений полных эллиптических интегралов (19) следуют зависимости стрелы прогиба и сближения концов стержня от нагрузки

$$\frac{f}{L} \approx \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{P_э}{P}\Big[1 - \frac{P_э/P}{(2 - \sqrt{P_э/P})^2}\Big]}; \qquad \frac{\Delta}{L} \approx 2\Big(1 - \frac{\sqrt{P_э/P}}{2 - \sqrt{P_э/P}}\Big). \tag{21}$$

Из сравнения результатов расчетов по формулам (21) и формулам (8), (9) приведенных на рис. 3, следует, что полученные приближенные формулы позволяют вычислять перемещения по нагрузке с удовлетворительной точностью во всем диапазоне искривления стержня в состоянии продольного изгиба.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б.** Расчет на прочность деталей машин: Справ. М.: Машиностроение, 1979. С. 399.
2. **Николаи Е. Л.** О работах Эйлера по теории продольного изгиба // Труды по механике. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. С. 436–453.
3. **Динник А. Н.** Справочник по технической механике. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. С. 626–637.
4. **Астапов Н. С.** Приближенные формулы для прогибов сжатых гибких стержней // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 4. С. 135–138.
5. **Астапов Н. С.** Приближенное представление формы сжатого гибкого стержня // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 3. С. 200–203.
6. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. С. 26–30.
7. **Филин А. П.** Прикладная механика твердого деформируемого тела. М.: Наука, 1981. Т. 3. С. 360–366.
8. **Киселев В. А.** Строительная механика: Спец. курс. Динамика и устойчивость сооружений. М.: Стройиздат, 1980. С. 446–456.
9. **Анфилофьев А. В.** Новые формулы кривизны плоской линии / Том. политехн. ун-т. Томск, 1994. Деп. в ВИНИТИ 24.05.94, № 1263-В94.
10. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. С. 921.

Поступила в редакцию 22/III 2000 г.,
в окончательном варианте — 21/VII 2000 г.