УПРУГИЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ТОКОМ

Н. И. Долбин, А. И. Морозов
(Москва)

В работе [1] было получено дисперсионное уравнение для колебаний упругого круглого стержня при протекании по его поверхности электрического тока. В этой же работе был подробно исследован частный случай аксиально симметричных колебаний — «перетяжек». В данной работе будут рассмотрены длинноволновые изгибные колебания упругих стержней при протекании по их поверхности электрического тока. Эти колебания представляют особый интерес, поскольку они имеют наименьшую частоту, а следовательно, и наименьшую устойчивость.

1. Исследование изгибных колебаний круглого стержня на основе общих уравнений теории упругости. Рассмотрим идеально проводящий сплошной стержень радиуса a со свободными концами и с постоянным током I, текущим по его поверхности. Пусть смещения точек стержня описываются вектором

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}(r) \exp i(-\omega t + m\theta + kz)$$

Случай аксиально симметричных колебаний с $m = 0$ был подробно рассмотрен в [1]. Здесь рассмотрим случай изгибных колебаний ($m = 1$). Дисперсионное уравнение таких колебаний для бесконечного стержня имеет вид

$$|d_{ij}| = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

со следующими элементами определителя:

$$d_{11} = 2h^2[1 + \psi_1(x)] + \frac{1}{1+\nu} + \left[x^2\left(y^2 - \frac{1}{1+\nu}\right) - \frac{1}{1+\nu}\right]\varphi_1(X)$$

$$d_{12} = \frac{Y^2-1}{1+\nu}\varphi_1(Y) - \left[x^2\left(y^2 - \frac{1}{1+\nu}\right) - \frac{1}{1+\nu}\right]\varphi_1(X)$$

$$d_{13} = -\frac{1}{(1+\nu)\varphi_1(Y)}\left[x^2\left(y^2 - \frac{1}{1+\nu}\right) - \frac{1}{1+\nu}\right]\varphi_1(X) \tag{1.2}$$

$$d_{21} = 1 - \varphi_1(X), \qquad d_{22} = \varphi_1(X) - \varphi_1(Y)$$

$$d_{23} = \varphi_1(X) - \frac{Y^2}{2} - \frac{1}{\varphi_1(Y)}, \qquad d_{31} = h^2 - \frac{1}{1+\nu}, \qquad d_{32} = y^2, \qquad d_{33} = \frac{1}{2(1+\nu)}$$

Здесь

$$X^2 = k^2a^2\left(\frac{\rho\omega^2}{k^2(\lambda+2\mu)} - 1\right) = x^2\left(y^2\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} - 1\right)$$

$$Y^2 = k^2a^2\left(\frac{\rho\omega^2}{k^2\mu} - 1\right) = x^2(2y^2(1+\nu) - 1), \qquad h^2 = \frac{H_0^2}{8\pi E} = \frac{I^2}{200\pi a^2 E}, \qquad H_0 = \frac{2I}{10a}$$

$$\varphi_1(\xi) = \frac{J_1(\xi)}{\xi J_1'(\xi)}, \qquad \psi_1(\xi) = \frac{K_1(\xi)}{\xi K_1'(\xi)}, \qquad x = ka, \qquad y^2 = \frac{\rho\omega^2}{Ek^2}$$

где E — модуль упругости, λ, μ — коэффициенты Ламе, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала, I — ток в a, H_0 — магнитное поле на поверхности проводника при $r = a$, $J_1(\xi)$, $K_1(\xi)$ — цилиндрические функции.

Разрешая (1.1) относительно h^2, после некоторых преобразований получим

$$h^2 = \frac{x^2}{1+\nu}\frac{|a_{ij}|}{|b_{ij}|} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1.3}$$

Элементы определителей в (1.3) имеют вид (1.4)

$$a_{11} = y^2(1+\nu) - 1, \qquad a_{12} = a_{13} = 2y^2(1+\nu) - 1, \qquad a_{21} = \varphi(X) - 2$$

$$a_{23} = -2[\varphi(Y) - 2] - x^2[2y^2(1+\nu) - 1], \qquad a_{22} = \varphi(Y) - 2, \qquad a_{33} = 1$$

$$a_{31} = \varphi(X) - 1, \qquad a_{32} = -[y^2(1+\nu) - 1][\varphi(Y) - 1], \qquad b_{11} = 2[1 + \psi_1(x)]$$

$$b_{12} = (Y^2 - 1)[\varphi(X) - 1] - \{x^2[y^2(1+\nu) - 1] - 1\}[\varphi(Y) - 1]$$

$$b_{13} = -2(Y^2 - 1)/[\varphi(Y) - 1] - 2[\varphi(Y) - 1], \qquad b_{21} = 0, \qquad b_{22} = \varphi(Y) - \varphi(X)$$

$$b_{23} = 2/[\varphi(Y) - 1] - Y^2 - 2[\varphi(Y) - 1], \qquad b_{33} = 1 - 2y^2(1+\nu)$$

$$b_{31} = 1, \qquad b_{32} = y^2(1+\nu)[\varphi(X) - 1][\varphi(Y) - 1], \qquad \varphi(\xi) = \xi J_0(\xi)/J_1(\xi)$$

В случае длинных волн ($ak \ll 1$) для функций $\varphi(\xi)$ и $\psi_1(\xi)$ имеем следующие приближенные выражения:

$$\varphi(\xi) \approx 2 - \xi^2 / 4, \qquad 2[1 + \psi_1(\xi)] = -2K_0(\xi) / K_1'(\xi) \approx 2\xi^2 \ln(2 / \gamma\xi)$$
$$K_1(\xi) \approx 1 / \xi, \qquad K_0(\xi) \approx -(\ln(\xi / 2) + C) \tag{1.5}$$

Здесь $\ln \gamma = C \approx 0.577$ — постоянная Эйлера. Используя эти разложения, из (1.3) получим дисперсионное уравнение для длинноволновых колебаний:

$$\frac{\omega^2 \rho}{k^2 E} = \frac{1}{4} a^2 k^2 + \frac{I^2}{100\pi a^2 E}\left(\ln\frac{ka}{2} + C + \frac{1}{2}\right) \tag{1.6}$$

2. Приближенная теория длинноволновых изгибных колебаний упругого стержня с током. а) *Общие соотношения.* Рассмотрим однородный цилиндрический стержень произвольного, но постоянного поперечного сечения и бесконечной длины. Будем предполагать, что электрический ток I течет по поверхности стержня. Если длина волны изгибных колебаний много больше диаметра стержня, а сами колебания являются плоскими, то уравнение колебаний можно записать в виде [2]

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -EJ\frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + f_y + \ldots \tag{2.1}$$

Здесь A — площадь поперечного сечения стержня; волна распространяется в направлении оси стержня z; w — смещение в направлении оси y, перпендикулярной оси стержня; J — момент инерции поперечного сечения стержня; f_y — внешняя сила, действующая на единицу длины стержня в направлении смещения w. Отброшенные члены в (2.1) в случае длинноволновых колебаний имеют более высокий порядок малости. В случае токонесущего стержня сила f_y своим появлением обязана магнитному полю. Если провести два сечения, перпендикулярные оси недеформированного стержня на расстоянии dl_0 одно от другого, то

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{8\pi dl_0}\int\limits_{(S)} H^2 \mathbf{n}\, dS \approx -\frac{1}{8\pi}\oint\limits_{(s)} H^2 \mathbf{n}\left(1 + \frac{y}{R}\right) ds \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля на поверхности деформированного проводника, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к боковой поверхности вырезанного элемента деформированного проводника, dS — элемент площади боковой поверхности, ds — элемент контура сечения, R — радиус кривизны оси стержня; интегралы берутся соответственно по боковой поверхности и по замкнутому контуру поперечного сечения.

В случае малых деформаций можно принять, что

$$\frac{1}{R} = -\frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial z^2} = -w'', \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 \tag{2.3}$$

где $\mathbf{H}_1$ — возмущение магнитного поля. Тогда выражение (2.2) для силы $\mathbf{f}$ можно линеаризовать по возмущениям поля [3]. Для f_y имеем

$$f_y = \frac{w''}{8\pi}\oint\limits_{(s)} H_0^2 n_y y\, ds - \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{(s)} \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_1 n_y\, ds \equiv f_1 + f_2 \tag{2.4}$$

Здесь учтено, что при отсутствии колебаний $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$, $\mathbf{f} = 0$, а через $\mathbf{H}_1$ обозначено значение возмущения магнитного поля на поверхности S. Из формулы (2.4) видно, что расчет силы f_2 требует определения возмущения поля $\mathbf{H}_1$.

При вычислении возмущенного поля $\mathbf{H}$ естественно пользоваться скалярным потенциалом $\Phi : \mathbf{H} = \nabla\Phi$, где Φ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$. На поверхности проводника, в силу сделанного предположения, что весь ток течет по поверхности, поле должно удовлетворять граничному условию

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{2.5}$$

Пусть деформированная ось стержня описывается уравнением $y = w(z, t)$. Перейдем к новой системе координат X, Y, Z, связанной со старой x, y, z соотношениями

$$X = x, \qquad Y = y - w, \qquad Z = z$$

В новой системе координат уравнение $\Delta\Phi = 0$ имеет вид

$$\Delta_{X, Y, Z}\Phi = \frac{\partial^2 w}{\partial Z^2}\frac{\partial \Phi}{\partial Y} + 2\frac{\partial w}{\partial Z}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y \partial Z} - \left(\frac{\partial w}{\partial Z}\right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \tag{2.6}$$

Это уравнение будем решать методом возмущений. Положим $\Phi = \varphi_0 + \varphi_1$. Потенциал невозмущенного поля φ_0 удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{X, Y}\varphi_0 = 0 \tag{2.7}$$

Считая, что изгиб проводника невелик, будем пренебрегать всюду членами второго порядка малости относительно w, φ_1 и их производных.

Тогда для φ_1 из (2.6) получим уравнение

$$\Delta_{X,Y,Z}\varphi_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial Z^2}\frac{\partial\varphi_0}{\partial Y} \tag{2.8}$$

Решение φ_1 уравнения (2.8) можно представить как сумму решений φ однородного уравнения и частного решения φ' неоднородного уравнения

$$\varphi_1 = \varphi + \varphi' \tag{2.9}$$

В связи с разложением (2.9) возмущения поля на две части, естественно и силу f_2 в (2.4) разбить на два слагаемых

$$f_2 = f' + f'' \tag{2.10}$$

Неоднородное уравнение имеет частное решение

$$\varphi' = w\frac{\partial\varphi_0}{\partial Y} \tag{2.11}$$

Решение однородного уравнения

$$\left(\Delta_{X,Y} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right)\varphi = 0 \tag{2.12}$$

однозначно определяется граничным условием (2.5). Полагая

$$\varphi = w\Psi(X, Y), \qquad w = w_0 \exp ikZ \qquad (w_0 = w_0(t)) \tag{2.13}$$

можно переписать (2.12) в виде

$$(\Delta_{X,Y} - k^2)\,\Psi = 0 \tag{2.14}$$

В связи с тем что при выводе (2.1) предполагается, что $k \to 0$, уравнение (2.14) для нашей цели можно решать приближенно, учитывая лишь члены, содержащие низшие степени k^2. Однако в простых случаях удобнее исходить из точных решений (2.14) и производить разложение по степеням k^2 уже в окончательных формулах. Этот метод используется ниже.

б) *Изгибные колебания круглого стержня.* Используя цилиндрическую систему координат R, ϑ, Z ($X = R\cos\vartheta$, $Y = R\sin\vartheta$), можно записать скалярный потенциал невозмущенного магнитного поля круглого стержня φ_0, являющийся решением уравнения (2.7),

$$\varphi_0 = {}^2/_{10}\, I\vartheta \qquad (H_0 = 2I\,/\,10a) \tag{2.15}$$

Здесь I — ток, протекающий по поверхности проводника, выражается в a, H_0 — напряженность невозмущенного магнитного поля на поверхности проводника, a — радиус проводника. При помощи (2.15) находим частное решение (2.11) для возмущения магнитного поля

$$\varphi' = w\frac{\partial\varphi_0}{\partial Y} = w\frac{2I}{10R}\cos\vartheta \tag{2.16}$$

Соответствующее ему решение однородного уравнения (2.14) будет

$$\varphi = BwK_1(kR)\cos\vartheta \qquad (B = 2I\,/\,10akaK_1'(ka)) \tag{2.17}$$

Постоянная B определялась из условия (2.5), штрих означает производную по полному аргументу. Подставляя в (2.4) и (2.10) выражения (2.15), (2.16), (2.17), а также учитывая, что $n_Y = \sin\vartheta$, $Y = a\sin\vartheta$, $ds = ad\vartheta$, получим

$$f_1 = {}^1/_{200}I^2w'', \qquad f' = {}^1/_{100}I^2w\,/\,a^2, \qquad f'' = {}^1/_{100}I^2wK_1(ka)\,/\,a^2kaK_1'(ka) \tag{2.18}$$

Так как $f_y \equiv f_1 + f_2 = f_1 + f' + f''$, то, складывая составляющие силы (2.18), используя разложения (1.5) и считая, что

$$w \sim \exp i(-\omega t + kZ) \tag{2.19}$$

найдем силу, действующую на единицу длины стержня,

$$f_y = -{}^1/_{100}I^2wk^2(\ln {}^1/_2\, ka + C + {}^1/_2) + O(k^2) \tag{2.20}$$

Подставляя (2.20) в (2.1), получим дисперсионное уравнение изгибных колебаний круглого стержня

$$\rho A\omega^2 = EJk^4 + {}^1/_{100}I^2k^2(\ln {}^1/_2\, ka + C + {}^1/_2) \tag{2.21}$$

Если учесть, что момент инерции круга $J = {}^1/_4\pi a^4$, то уравнение (2.21) совпадает с уравнением (1.6).

в) *Изгибные колебания тонкого проводника эллиптического сечения.* 1. Пусть уравнение контура поперечного сечения проводника описывается в системе координат X, Y уравнением

$$X^2 / a^2 + Y^2 / b^2 = 1 \qquad (2.22)$$

Введем эллиптические координаты ξ, η при помощи соотношения

$$\zeta = X + iY = h \operatorname{ch} (\xi + i\eta) \qquad (2.23)$$

$$\begin{pmatrix} h^2 = a^2 - b^2, & a = h \operatorname{ch} \xi_0, & b = h \operatorname{sh} \xi_0 \\ 0 \leqslant \xi < \infty, & -\pi \leqslant \eta < \pi, & \xi_0 = \ln [(a+b)/h] \end{pmatrix}$$

Функция, которая осуществляет конформное отображение внешности эллипса (2.22) на внешность единичного круга, имеет вид

$$W = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - h^2}}{a + b} \qquad (2.24)$$

Магнитное поле невозмущенного цилиндра может быть описано как скалярным потенциалом φ_0, так и z — компонентой векторного потенциала A_z

$$\mathbf{H}_0 = \nabla\varphi_0, \qquad \mathbf{H}_0 = \operatorname{rot} (\mathbf{z}_0 A_z) \qquad (2.25)$$

Комплексный потенциал F магнитного поля прямого проводника равен

$$F = A_z + i\varphi_0 = 0.2\, I \ln W \qquad (2.26)$$

Подставляя в (2.26) выражения (2.23) и (2.24), получим

$$\varphi_0 = 0.2\, I\eta \qquad (2.27)$$

Отсюда находим напряженность магнитного поля на поверхности невозмущенного эллиптического проводника

$$H_0 = \frac{2I}{10h (\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \cos^2 \eta)} \qquad (2.28)$$

и частное решение (2.11)

$$\varphi' = \frac{2Iw}{10h} \frac{\operatorname{sh} \xi \cos \eta}{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta} \qquad (2.29)$$

2. Уравнение (2.14) в эллиптических координатах записывается в виде

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - k^2h^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)\right] \Psi = 0 \qquad (2.30)$$

Решение уравнения (2.30) представим как $\Psi = \chi(\xi) \psi(\eta)$. Тогда [4,5]

$$\chi''(\xi) + (a + 16q \operatorname{ch} 2\xi) \chi(\xi) = 0 \qquad (2.31)$$

$$\psi''(\eta) - (a + 16q \cos 2\eta) \psi(\eta) = 0 \qquad (2.32)$$

$$\left(q \equiv \frac{k^2h^2}{32}\right)$$

Из требования периодичности $\psi(\eta)$ находятся дискретные собственные значения $a_p(q)$ и соответствующие им функции Матье. В нашем случае это будут четные функции нечетного индекса

$$\psi_p = ce_{2n+1}(\eta, q), \qquad p \equiv 2n + 1 \qquad (2.33)$$

В качестве $\chi_p(\xi)$ должно быть взято решение, которое удовлетворяет условию

$$\chi_p(\xi) \to 0 \quad \text{при } \xi \to \infty$$

Таким свойством обладают так называемые функции $Fek_{2n+1}(\xi, -q)$, которые обозначим через $Q_{2n+1}(\xi, q)$. Общее решение уравнения (2.30) можно записать так:

$$\varphi = w\Psi = w \sum_{p \equiv 2n+1 = 1}^{\infty} b_p Q_p(\xi, q)\, ce_p(\eta, q) \qquad (2.34)$$

В связи с тем, что по смыслу приближения (2.1) величина

$$q \equiv {}^1/_{32} k^2h^2 \ll 1 \qquad (2.35)$$

в фурье-разложениях функций Матье (2.33) достаточно ограничиться членами разложения, содержащими q в нулевой и первой степенях [4].

Поэтому можно считать

$$ce_{2n+1}(\eta, q) \approx A_{2n+1}^{(2n+1)} \cos(2n+1)\eta + A_{2n+3}^{(2n+1)} \cos(2n+3)\eta + A_{2n-1}^{(2n+1)} \cos(2n-1)\eta$$

$$(A_p^{(p)} \approx 1, \quad A_{p\pm 2}^{(p)} \approx q) \tag{2.36}$$

3. Коэффициенты b_p в разложении (2.34) определяются из граничного условия $\mathbf{H}\cdot\mathbf{n} = 0$, т. е.

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\varphi + \varphi') = 0 \quad \text{при } \xi = \xi_0 = \ln[(a+b)/h] \tag{2.37}$$

Учитывая (2.29) и полагая при $\xi = \xi_0$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\operatorname{sh}\xi \cos\eta}{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta} \equiv -\sum_{p=1}^{\infty} \beta_p ce_p(\eta, q) \tag{2.38}$$

находим

$$\varphi_1 = \frac{2I}{10h} w \sum_{p=2n+1=1}^{\infty} \beta_p \frac{Q_p(\xi, q)}{(\partial Q_p/\partial \xi)_{\xi=\xi_0}} ce_p(\eta, q) \tag{2.39}$$

Отметим, что если $ce_p(\eta, q)$ могут быть записаны в виде (2.36), то коэффициенты β_p, входящие в (2.38), (2.39), выражаются через коэффициенты фурье-разложения α_p

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\operatorname{sh}\xi \cos\eta}{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta} = -\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p \cos pn \qquad (\xi = \xi_0) \tag{2.40}$$

формулами

$$\beta_p = \alpha_p + \alpha_{p-2} A_{p+2}^{(p-2)} + \alpha_{p+2} A_{p-2}^{(p+2)} \tag{2.41}$$

Величины α_p ряда (2.40) находятся элементарно, но получающиеся выражения громоздки и здесь не приводятся.

4. Зная выражения для полей, перейдем к вычислению сил f_1 и $f_2 = f' + f''$. Эти вычисления также удобно проводить в эллиптических координатах. При этом

$$ds = h\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi_0 - \cos^2\eta}\, d\eta, \qquad n_Y = \frac{\operatorname{ch}\xi_0 \sin\eta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi_0 - \cos^2\eta}} \tag{2.42}$$

$$Y = h \operatorname{sh}\xi_0 \sin\eta, \qquad H_1 = \frac{1}{h\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi_0 - \cos^2\eta}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}$$

Подставляя (2.42) в формулу для f_1, получаем при помощи (2.23), (2.28) выражение

$$f_1 = {}^1/_{100} I^2 w'' b / (a+b) \tag{2.43}$$

Формулу (2.4) для $f_2 = f' + f''$ интегрированием по частям приведем к виду

$$f_2 = \frac{I}{2\pi 10h} \int_0^{2\pi} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\operatorname{ch}\xi_0 \sin\eta}{\operatorname{ch}^2\xi_0 - \cos^2\eta} d\eta \tag{2.44}$$

Вычисление f_2 заметно упрощает то обстоятельство, что

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\operatorname{ch}\xi \sin\eta}{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta} \equiv -\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\operatorname{sh}\xi \cos\eta}{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta} \tag{2.45}$$

В результате после весьма простых выкладок, используя (2.39), находим

$$f' = {}^1/_{200} I^2 w (1/a^2 + 1/b^2) \tag{2.46}$$

$$f'' = \frac{I^2}{100} \frac{w}{h^2} \sum_{p=1}^{\infty} \beta_p^2(q) \frac{Q_p(\xi_0, q)}{(\partial Q_p/\partial \xi)_{\xi=\xi_0}} \tag{2.47}$$

5. Из (2.1) и (2.43), (2.46), (2.47) при условии (2.19) получаем дисперсионное уравнение

$$\rho A\omega^2 = EJk^4 + \frac{I^2}{100}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - k^2 \frac{b}{a+b} + \frac{1}{h^2} \sum_{p=1}^{\infty} \beta_p^2(\xi_0, q) \frac{Q_p(\xi_0, q)}{(\partial Q_p/\partial \xi)_{\xi=\xi_0}}\right] \tag{2.48}$$

6. В том случае, когда эксцентриситет мал, т. е. $h / a \ll 1$, выражение (2.47) для f'' можно вычислить явно. Действительно, разложив левую часть (2.38) в ряд Фурье и пренебрегая членами более высокого порядка малости, чем

$$e^{-2\xi} \approx h^2 / a^2 \tag{2.49}$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial\xi} \frac{\operatorname{sh}\xi\cos\eta}{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta} \approx 2e^{-\xi_0}\{\cos\eta + 3e^{-2\xi_0}\cos 3\eta\} \tag{2.50}$$

Разложения функций ce_p имеют вид

$$ce_1(\eta) = \cos\eta + q\cos 3\eta + \ldots, \quad ce_3(\eta) = \cos 3\eta + \ldots \tag{2.51}$$

и, следовательно,

$$\beta_1 = -\frac{2h}{a+b}, \qquad \beta_3 = -\frac{2h}{a+b}\left(-q + 3\frac{h^2}{(a+b)^2}\right) \tag{2.52}$$

Здесь учтено, что $e^{\xi_0} = (a+b) / h$. Теперь видно, что с принятой точностью в (2.47) остается только первый член

$$f'' \approx \frac{I^2}{100} w \frac{4}{(a+b)^2} \frac{Q_1}{(\partial Q_1/\partial\xi)_{\xi=\xi_0}} \tag{2.53}$$

Используя приближенное равенство

$$\frac{4}{(a+b)^2} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \tag{2.54}$$

получаем (см. (2.46) и (2.53))

$$f_2 = f' + f'' = 4\frac{wI^2}{100(a+b)^2}\left(1 + \frac{Q_1}{(\partial Q_1/\partial\xi)_{\xi=\xi_0}}\right) \tag{2.55}$$

7. Выражение для Q_1 можно найти следующим образом: подставляя в уравнение (2.31) для $\chi(\xi)$ значение $a_1 \approx 1 - 8q$ и учитывая, что с принятой точностью

$$\operatorname{ch} 2\xi \approx {}^1/_2 e^{2\xi} \tag{2.56}$$

находим приближенное уравнение для $Q_1(\xi)$

$$Q_1''(\xi) - (1 - 8q + 8qe^{2\xi})\,Q_1(\xi) = 0 \tag{2.57}$$

Это уравнение Бесселя с нецелым индексом имеет следующее решение с нужным поведением при $\xi \to \infty$:

$$Q_1(\xi) \approx K_{\sqrt{1-8q}}(\sqrt{8q}\,e^{\xi}) \approx K_{1-4q}(\sqrt{8q}\,e^{\xi}) \tag{2.58}$$

Исходя из определения

$$K_n = \frac{\pi}{2\sin\pi n}[I_{-n} - I_n], \qquad I_n = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r}\frac{1}{r!\,\Gamma(n+r+1)} \tag{2.59}$$

можно получить

$$Q_1(\xi) = K_{1-4q}(\xi) \approx K_1(\xi) + 4q\left[\frac{1}{\xi}\ln\frac{\xi}{2} + \frac{C}{2}\right] \tag{2.60}$$

Отсюда при помощи (2.23) и (2.35) находим

$$1 + \frac{Q_1(\xi)}{(\partial Q_1/\partial\xi)_{\xi=\xi_0}} = -\frac{k^2(a+b)}{4}2b\left[\ln\frac{k(a+b)}{4} + \frac{a+b}{2b}C + \frac{a-b}{2b}\right] \tag{2.61}$$

и, следовательно (см. (2.55)) (2.62)

$$f_1 = -\frac{wk^2}{100}I^2\frac{b}{a+b}, \; f_2 = -w\frac{I^2}{100}\frac{2b}{a+b}k^2\left[\ln\frac{k(a+b)}{4} + C\frac{a+b}{2b} + \frac{a-b}{2b}\right]$$

Таким образом, окончательное выражение для суммарной силы будет

$$f_y = -w\frac{I^2}{100}\frac{2b}{a+b}k^2\left[\ln\frac{k(a+b)}{4} + C\frac{a+b}{2b} + \frac{a}{2b}\right] \tag{2.63}$$

При $a = b$ эта формула переходит в (2.20). Дисперсионное уравнение (2.48) при подстановке (2.63) принимает вид

$$\rho A\omega^2 = EJk^4 + \frac{I^2}{100}k^2\frac{2b}{a+b}\left[\ln\frac{k(a+b)}{4} + C\frac{a+b}{2b} + \frac{a}{2b}\right] \tag{2.64}$$

3. Условия устойчивости стержней с током. При некоторых значениях тока I частота ω^2, связанная с током и длиной волны уравнением (2.21) для круглых стержней и уравнением (2.64) для стержней эллиптического сечения, становится отрицательной. Это значит, что имеется решение для ω, приводящее к экспоненциальному нарастанию случайных возмущений. Отсюда следует, что, начиная с этих значений тока, прямой проводник с током будет неустойчив.

а) Для сплошного круглого проводника из дисперсионного уравнения (1.5) или из (2.21), положив в нем момент инерции круга $J = {}^1/_4\pi a^4$, получим следующее выражение для значения тока, при котором проводник теряет устойчивость:

$$I_* > \frac{10a^2k\sqrt{\pi E}}{2\sqrt{\ln(2/ka) - C - {}^1/_2}} \tag{3.1}$$

б) Для проводника эллиптического сечения из дисперсионного уравнения (2.64) получим следующее выражение для значения тока, при котором проводник теряет устойчивость:

$$I_* > \frac{10k\sqrt{a+b}\sqrt{EJ}}{\sqrt{2b}\sqrt{\ln[4/k(a+b)] - {}^1/_2\,a/b - {}^1/_2 C(a+b)/b}} \tag{3.2}$$

При колебаниях сплошного проводника эллиптического сечения вокруг большой оси эллипса $J = {}^1/_4\pi ab^3$, при колебаниях вокруг малой оси $J = {}^1/_4\pi a^3 b$.

Пример. Рассмотрим круглый проводник радиуса $a = 0.1$ *см*. Пусть по нему распространяется изгибное возмущение с длиною волны $L = 10$ *см*. В другом случае пусть $a = 1$ *см* и $L = 100$ *см*. Пусть $E = 10^6$ *кг* / *см*^{2}. Тогда для первого случая из (3.1) получим, что $I_* > 39$ *ка*, для второго случая $I_* > 386$ *ка*.

Поступила 22 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Долбин Н. И. Распространение упругих волн в токопроводящем стержне. ПМТФ, 1962, № 2, стр. 104.
2. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. Изд. иностр. лит., 1955.
3. Леонтович М. А., Шафранов В. Д. Об устойчивости гибкого провода в продольном магнитном поле. Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», Изд-во АН СССР, 1958, т. 1.
4. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. Изд. иностр. лит., 1953.
5. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, т. 2, Физматгиз, 1963.

К ОПИСАНИЮ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ДРОБНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ЯДЕР

С. И. Мешков, Г. Н. Пачевская, Т. Д. Шермергор

(Воронеж)

Учет наследственных свойств твердых тел при сдвиговых деформациях может быть проведен при помощи одной из следующих эквивалентных записей интегрального оператора модуля сдвига (1)

$$\mu^*\varepsilon = \mu_0\varepsilon + \Delta\mu\int_{-\infty}^{t}\varphi(t-t')\,\varepsilon^{\cdot}(t')\,dt', \qquad \mu^*\varepsilon = \mu_\infty\varepsilon - \Delta\mu\int_{-\infty}^{t} f(t-t')\,\varepsilon(t')\,dt'$$

$$(\Delta\mu = \mu_\infty - \mu_0) \tag{2}$$

Здесь ε — деформация сдвига, μ_0 — релаксированное, μ_∞ — нерелаксированное значение модуля сдвига, φ и f — функции памяти. Выбор явного вида этих функций, являющихся ядрами интегральных операторов, определяет поведение линейной вязко-упругой среды. Функция φ обладает следующими асимптотическими свойствами: $\varphi(\infty) = 0$ и $\varphi(0) = 1$, первое из которых отражает требование конечности времен релаксаций. В справедливости второго условия легко убедиться, приняв скорость деформации импульсной: $\varepsilon^{\cdot}(t) = \varepsilon_0\delta(t)$. Относительно функции $f(t)$ необходимо потребовать $f(\infty) = 0$, однако непосредственно уравнение (2) не накладывает условия конечности $f(t)$ при $t \to 0$. Многочисленные исследования релаксации напряжений и