

соответствует максимуму статического давления на преграде. При переходе через  $\Delta L_{\max}^0$  фаза колебаний меняется на  $180^\circ$ . Автоколебания являются симметричными, продольными относительно оси струйного потока.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Семилетенко Б. Г., Собколов Б. Н., Усков В. Н. Особенности неустойчивого взаимодействия сверхзвуковой струи с безграничной преградой // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1972.— № 13, вып. 3.
2. Семилетенко Б. Г., Усков В. Н. Экспериментальные зависимости, определяющие положение ударных волн в струе, натекающей на преграду, перпендикулярную ее оси // ИФЖ.— 1972.— Т. 23, № 3.
3. Соколов Е. И., Усков В. Н. Взаимодействие осесимметричной струи с преградой и встречным сверхзвуковым потоком // Струйные и отрывные течения. Ч. 3.— М.: Изд-во МГУ, 1985.
4. Альбазаров Б. Ш., Рудаков А. И., Фатов А. С. Численное моделирование автоколебаний при натекании сверхзвуковой струи на преграду // Тез. докл. XV Всесоюз. семина. по газовым струям.— Л.: ЛМИ, 1990.
5. Солотчин А. В. О неустойчивости недорасширенной струи, натекающей на преграду // Газодинамика и акустика струйных течений.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1979.
6. Глазнев В. Н. Автоколебания при истечении сверхзвуковых нерасчетных струй // Моделирование в механике: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ, ИТПМ.— 1987.— Т. 1(18), № 6.
7. Усков В. Н., Цымбалов В. В., Цымбалова Е. Н. Численное решение задачи о нестационарном взаимодействии сверхзвуковой струи с преградой // Там же.
8. Савин А. В., Соколов Е. И., Фаворский В. С., Шаталов И. В. Влияние разреженности на процесс нестационарного взаимодействия сверхзвуковой недорасширенной струи с перпендикулярной преградой // ПМТФ.— 1991.— № 6.
9. Горшков Г. Ф. Влияние когерентных структур на течение и теплообмен при дозвуковом струйном обтекании преграды в режиме автоколебаний // Пром. тепло-техника.— 1989.— № 2.
10. Горшков Г. Ф. Течение и теплообмен при взаимодействии сверхзвуковых недорасширенных струй с нормально расположенной плоской преградой // Газодинамика и акустика струйных течений.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1987.
11. Белов И. А., Гинзбург И. П., Зазимко В. А., Терпигорьев В. С. Влияние турбулентности струй на теплообмен ее с преградой // Тепло- и массообмен: Материалы дискуссии на III Всесоюз. совещ. по тепло- и массообмену.— Минск: ИТМО АН БССР, 1969.— Т. II.

г. Санкт-Петербург

Поступила 16/VI 1992 г.

УДК 532.526

А. П. Хохлов

#### К ТЕОРИИ РЕЗОНАНСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН ТОЛЛМИНА — ШЛИХТИНГА

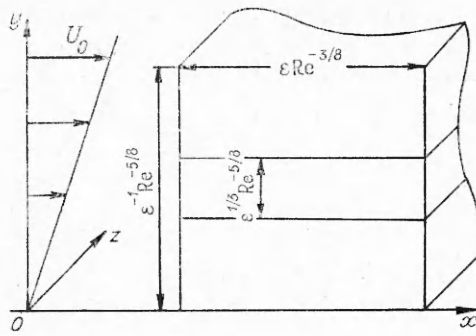
Рассматривается резонансное взаимодействие собственных колебаний пограничного слоя методом сращиваемых асимптотических разложений. Хорошо известно (см., например, [1]), что это наиболее слабый по амплитуде нелинейный эффект, который следует за линейной стадией развития возмущений и играет важную роль в переходе ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Теоретическое изучение явления началось с работ [2—4] и затем продолжалось многими авторами [5—8].

В данной работе слабонелинейные эволюционные уравнения выводятся в пределе больших чисел Рейнольдса, причем резонансное взаимодействие не предполагается заранее, а вытекает непосредственно из уравнений.

© А. П. Хохлов, 1993

5 ПМТФ № 4, 1993 г.

65



Развитие возмущений рассматривается в рамках теории свободного взаимодействия, т. е. формально в качестве исходных используются трехмерные нестационарные уравнения пограничного слоя с самоиндуцированным давлением, управляющие течением в пристенной области пограничного слоя. Трехволновой резонанс уже изучался в такой постановке в высокочастотном пределе [8], однако без учета влияния критического

слоя, которое, как будет показано, играет важную роль. Это связано с более сильной особенностью в трехмерном критическом слое, тогда как авторы [8], по-видимому, обосновывали свой вывод о «пассивности» критического слоя результатами исследований для двумерного случая.

Изложение разделено на две части: в первой методом сращиваемых асимптотических разложений выводятся эволюционные уравнения, во второй рассматриваются решения этих уравнений для задачи без начальных условий и коротко обсуждаются полученные результаты.

1. Исходными являются уравнения трехслойной схемы. Подробный вывод и характерные порядки величин приведены, например, в [9], поэтому на них останавливаться не будем. Выпишем основные уравнения:

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$(1.4) \quad u = w = 0 \text{ при } y = 0;$$

$$(1.5) \quad v = 0 \text{ при } y = 0;$$

$$(1.6) \quad u - y = F(x, z, t) + \dots \text{ при } y \rightarrow \infty;$$

$$(1.7) \quad p(x, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 F(\xi, \zeta, t)}{\partial \xi^2} \frac{d\xi d\zeta}{[(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2}}.$$

Здесь  $u, v, w, p$  — компоненты вектора скорости вдоль осей  $Ox, Oy, Oz$  и давление соответственно (см. рисунок). Согласно [10, 11], в линейной постановке эта система описывает волны Толлмина—Шлихтинга в окрестности нижней ветви нейтральной кривой. Так как нелинейные эффекты обычно обнаруживаются ниже по потоку от точки потери устойчивости (что эквивалентно увеличению частоты собственных колебаний в масштабе теории свободного взаимодействия), то достаточно рассмотреть высокочастотный предел задачи. При этом дисперсионное соотношение, связывающее компоненты волнового вектора  $(\alpha, \beta)$  и частоту  $\omega$  собственных колебаний, принимает простой вид

$$\alpha(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} = \omega + \dots$$

Прямой подстановкой можно проверить, что тройка волн с волновыми векторами

$$(\alpha, \beta), \quad \left( \frac{\alpha - \sqrt{3}\beta}{2}, \frac{\alpha + \sqrt{3}\beta}{2} \right), \quad \left( \frac{\alpha + \sqrt{3}\beta}{2}, \frac{\alpha - \sqrt{3}\beta}{2} \right)$$

составляет резонансную триаду при любых действительных  $\alpha, \beta$ , причем фазовые скорости всех трех волн совпадают. По этой причине удобно в

качестве малого параметра  $\varepsilon$  использовать обратную фазовую скорость  $c$  в триаде:

$$\varepsilon = c^{-1}.$$

Из дисперсионного соотношения следует, что пространственный масштаб возмущения имеет порядок  $O(\varepsilon)$ , характерный временной масштаб  $O(\varepsilon^2)$ . Подставляя эти оценки в систему (1.1)–(1.7), получим поперечный размер  $O(\varepsilon^{-1})$ . Так как фазовая скорость фиксирована, то появляется критический слой. Его толщина  $O(\varepsilon^{1/3})$  подбирается так, чтобы влияние вязкости оказывалось существенным в этом слое. Из аналогичных соображений оценивается толщина слоя Стокса  $O(\varepsilon)$ . В линейном приближении высокочастотные колебания в главном нейтральны, поэтому их рост может определяться нелинейными эффектами уже при малых амплитудах. В данной работе порядок «медленного» времени, на котором существен рост возмущения за счет нелинейного взаимодействия, определяется как  $O(\varepsilon^{2/3})$  из условия нестационарности уравнений движения в критическом слое. В этом случае ранее предложенная процедура вывода слабонелинейных эволюционных уравнений [3, 4], предполагающая равномерную малость нелинейных поправок во всей области течения, включая критический слой, не может быть применена непосредственно и требуется специальное исследование.

Данные соображения приводят к следующей структуре масштабов независимых переменных:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} t &= (\varepsilon^2 t_0, \varepsilon^{2/3} t_1), \quad x - ct = \varepsilon X, \quad z = \varepsilon Z, \\ y &= (\varepsilon Y_0, \varepsilon^{-1} Y_1, \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{1/3} Y_2). \end{aligned}$$

Порядок медленного времени и требование нелинейного взаимодействия определяют характерную амплитуду давления как  $O(\varepsilon^{10/3})$ . Для обоснования этой оценки необходимо знать вид решения в окрестности критического слоя, которое будет определено ниже. Решение представляется в виде асимптотического степенного ряда по двум малым параметрам:  $\varepsilon^{4/3}$  и  $\varepsilon^2$ , соответствующим вкладом критического и пристенного слоев. Для давления имеем

$$p(X, Z, t_1) = \varepsilon^{10/3} \frac{\partial}{\partial X} (R_1 + \varepsilon^{4/3} R_2 + \varepsilon^2 R_3 + \varepsilon^{8/3} R_4 + \dots).$$

Здесь учтено, что в главном фазовая скорость постоянна. Поэтому возмущение зависит от «быстрого» времени только через  $X$ . Разложения для остальных величин зависят от того, в каком слое их рассматривать.

Исследуем сначала область  $Y_1 = O(1)$ , ограничившись первыми тремя приближениями:

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon^{-1} Y_1 + \varepsilon^{13/3} (u_1 + \varepsilon^{4/3} u_2 + \varepsilon^2 u_3 + \dots), \\ v &= \varepsilon^{7/3} (v_1 + \varepsilon^{4/3} v_2 + \varepsilon^2 v_3 + \dots), \\ w &= \varepsilon^{13/3} (w_1 + \varepsilon^{4/3} w_2 + \varepsilon^2 w_3 + \dots). \end{aligned}$$

Уравнения, описывающие течение в этой области, оказываются линейными. Вязкие силы асимптотически малы. При  $Y_1 = 0$  для первого и второго приближений выполняется условие непротекания, а значение вертикальной компоненты вектора скорости в третьем приближении должно определяться из условия срачивания с решением в вязком подслое  $Y_0 = O(1)$ . Выражения для первых двух приближений выпишем в явном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial X} - \frac{1}{(Y_1 - 1)} \frac{\partial^2 R_1}{\partial Z^2} + \frac{\partial U_0^\pm(X, Z, t_1)}{\partial X}, \quad w_1 - \frac{1}{(Y_1 - 1)} \frac{\partial R_1}{\partial Z}, \\ v_1 = -\Delta R_1 - (Y_1 - 1) \frac{\partial U_0^\pm}{\partial X}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} = -\frac{1}{(Y_1 - 1)^2} \frac{\partial^2 \bar{R}_1}{\partial Z^2 \partial t_1} + \frac{1}{(Y_1 - 1)} \frac{\partial^2 \bar{R}_2}{\partial Z^2 \partial X} + \frac{\partial^2 U_1^\pm(X, Z, t_1)}{\partial X^2},$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial X} = \frac{1}{(Y_1 - 1)^2} \frac{\partial^2 R_1}{\partial Z \partial t_1} - \frac{1}{(Y_1 - 1)} \frac{\partial R_2}{\partial Z}, \quad v_2 = -\Delta R_2 - \frac{\partial U_0^\pm}{\partial t_1} - (Y_1 - 1) \frac{\partial U_1^\pm}{\partial X},$$

где  $\Delta = \partial_X^2 + \partial_Y^2$ , а индексы  $+$ ,  $-$  соответствуют  $Y_1 > 1$ ,  $Y_1 < 1$ . Эти решения справедливы при произвольных функциях  $U_0^\pm(X, Z, t_1)$ ,  $U_1^\pm(X, Z, t_1)$ . Из условий на стенке (1.5) и на внешней границе (1.7) следует

$$(1.9) \quad \frac{\partial U_0^-}{\partial X} = \Delta R_1, \quad R_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial U_0^+(\xi, \zeta, t_1)}{\partial \xi} \frac{d\xi d\zeta}{[(X-\xi)^2 + (Z-\zeta)^2]^{1/2}};$$

$$(1.10) \quad \frac{\partial U_1^-}{\partial X} = \Delta R_2 + \frac{\partial U_0^-}{\partial t_1}, \quad R_2 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial U_1^+(\xi, \zeta, t_1)}{\partial \xi} \frac{d\xi d\zeta}{[(X-\xi)^2 + (Z-\zeta)^2]^{1/2}}.$$

Связей (1.9), (1.10) недостаточно для однозначного определения функций  $U_0^\pm$ ,  $U_1^\pm$ . Условием непрерывности при  $Y_1 = 1$  пользоваться нельзя, так как решение сингулярно в критическом слое. Установить однозначную связь между решениями выше и ниже критического слоя можно только после детального рассмотрения последнего. В третьем приближении достаточно ограничиться слагаемыми с низшей степенью по  $(Y_1 - 1)$ :

$$\frac{\partial u_3}{\partial X} = \frac{1}{(Y_1 - 1)} \frac{\partial^2 R_2}{\partial Z^2} + \dots, \quad w_3 = -\frac{1}{(Y_1 - 1)} \frac{\partial R_2}{\partial Z} + \dots, \quad v_2 = -\Delta R_3 + \dots$$

Кроме появления особенности в критическом слое построенные решения не удовлетворяют условию прилипания (1.4). Чтобы выполнить условие прилипания, необходимо построить решение в слое Стокса  $Y_0 = O(1)$ , однако он не влияет на распределение давления в главном и поэтому не рассматривается. В линейном приближении присутствие слоя Стокса приводит к отклонению от нейтральности рассматриваемых волн Толлмина—Шлихтинга, причем временной инкремент роста имеет порядок  $O(1)$  (см., например, [8]). Так как в данной работе принято, что время нелинейного взаимодействия имеет порядок  $O(\varepsilon^{2/3})$  (соответствующий инкремент  $O(\varepsilon^{-2/3})$ ), влиянием слоя Стокса действительно можно пренебречь.

Исходя из вида решения при  $Y_1 = O(1)$ , можно выписать асимптотическое разложение скорости в критическом слое:

$$u = \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{1/3} Y_2 + \varepsilon^3 (\widehat{u}_1 + \varepsilon^{4/3} \widehat{u}_2 + \varepsilon^2 \widehat{u}_3 + \varepsilon^{8/3} \widehat{u}_4 + \dots),$$

$$v = \varepsilon^{7/3} (-\Delta R_1 + \varepsilon^{4/3} \widehat{v}_2 + \varepsilon^2 (-\Delta R_3) + \varepsilon^{8/3} \widehat{v}_4 + \dots),$$

$$w = \varepsilon^3 (\widehat{w}_1 + \varepsilon^{4/3} \widehat{w}_2 + \varepsilon^2 \widehat{w}_3 + \varepsilon^{8/3} \widehat{w}_4 + \dots).$$

Подставляя эти выражения в (1.1)–(1.7), получим для первого приближения следующую систему уравнений:

$$(1.11) \quad \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial t_1} + Y_2 \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial X} - \frac{\partial^2 R_1}{\partial Z^2} = \frac{\partial^2 \widehat{u}_1}{\partial Y_2^2}, \quad \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial t_1} + Y_2 \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial X} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial Z \partial X} = \frac{\partial^2 \widehat{w}_1}{\partial Y_2^2},$$

$$\frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial X} + \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial Z} = 0, \quad (\widehat{u}_1, \widehat{w}_1) \rightarrow 0 \text{ при } Y_2 \rightarrow \infty.$$

Задача (1.11) имеет решение для любого распределения давления  $R_1$ . Если ввести новую функцию  $\Psi$  так, что

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Z} = -\widehat{u}_1, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X} = \widehat{w}_1,$$

то задачу (1.11) можно записать в компактной форме

$$(1.12) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t_1} + Y_2 \frac{\partial \Psi}{\partial X} + \frac{\partial R_1}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y_2^2}, \quad \Psi \rightarrow 0 \text{ при } Y_2 \rightarrow \infty.$$

Для второго приближения уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}_2}{\partial t_1} + Y_2 \frac{\partial \widehat{u}_2}{\partial X} + \widehat{v}_2 + \frac{\partial^2 R_2}{\partial X^2} &= \frac{\partial^2 \widehat{u}_2}{\partial Y_2^2}, \\ \frac{\partial \widehat{w}_2}{\partial t_1} + Y_2 \frac{\partial \widehat{w}_2}{\partial X} + \frac{\partial^2 R_2}{\partial Z \partial X} &= \frac{\partial^2 \widehat{w}_2}{\partial Y_2^2}, \\ \frac{\partial \widehat{u}_2}{\partial X} + \frac{\partial \widehat{w}_2}{\partial Z} + \frac{\partial \widehat{v}_2}{\partial Y_2} &= 0, \quad \widehat{u}_2 \rightarrow \widehat{U}_0^\pm, \quad \widehat{w}_2 \rightarrow 0 \text{ при } Y_2 \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Данная система разрешима при следующем условии:

$$U_0^+ = U_0^-,$$

что с учетом (1.9) замыкает задачу для давления в главном приближении

$$(1.13) \quad R_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta R_1(\xi, \zeta, t_1) \frac{d\xi d\zeta}{[(X-\xi)^2 + (Z-\zeta)^2]^{1/2}}.$$

Данное интегродифференциальное уравнение имеет нетривиальное решение

$$(1.14) \quad R_1 = \sum_{\varphi \in \{\varphi_j\}} A(t_1, \varphi) \exp[i(X \cos \varphi + Z \sin \varphi)], \quad |\{\varphi_j\}| < \infty,$$

которое представляется в виде суперпозиции собственных функций

$$\exp[i(X \cos \varphi + Z \sin \varphi)],$$

соответствующих волнам Толлмипа—Шлихтинга, распространяющимся под различными углами к направлению основного течения. Закон эволюции амплитуды  $A$  определяется из условия разрешимости высших приближений. Задача для третьего приближения аналогична (1.11) и разрешима при любом распределении амплитуды  $A$ . Взаимодействие волн проявляется в четвертом приближении, в котором впервые появляются поправки, обусловленные нелинейностью течения. Уравнения, управляющие функциями четвертого приближения, имеют вид

$$\begin{aligned} (1.15) \quad \frac{\partial \widehat{u}_4}{\partial t_1} + Y_2 \frac{\partial \widehat{u}_4}{\partial X} + \widehat{v}_4 + \frac{\partial^2 R_4}{\partial X^2} &= \\ &= \frac{\partial^2 \widehat{u}_4}{\partial Y_2^2} - \widehat{u}_1 \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial X} + \Delta R_1 \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial Y_2} - \widehat{w}_1 \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial Z}, \\ \frac{\partial \widehat{w}_4}{\partial t_1} + Y_2 \frac{\partial \widehat{w}_4}{\partial X} + \frac{\partial^2 R_4}{\partial Z \partial X} &= \frac{\partial^2 \widehat{w}_4}{\partial Y_2^2} - \widehat{u}_1 \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial X} + \Delta R_1 \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial Y_2} - \widehat{w}_1 \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial Z}, \\ \frac{\partial \widehat{u}_4}{\partial X} + \frac{\partial \widehat{w}_4}{\partial Z} + \frac{\partial \widehat{v}_4}{\partial Y_2} &= 0, \quad \widehat{u}_4 \rightarrow U_1^\pm, \quad \widehat{w}_4 \rightarrow 0 \text{ при } Y_2 \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Введем новую функцию  $Q$ , связанную с завихренностью в критическом слое:

$$Q(X, Z, t_1, Y_2) = \frac{\partial^2 \widehat{v}_4}{\partial Y_2^2}.$$

Продифференцируем первое уравнение по  $X$ ,  $Y_2$ , второе по  $Z$ ,  $Y_2$ , сложим их и с учетом уравнения неразрывности приведем систему (1.15)

к задаче для функции  $Q$

$$(1.16) \quad \frac{\partial Q}{\partial t_1} + Y_2 \frac{\partial Q}{\partial X} + q(X, Z, t_1, Y_2) = \frac{\partial^2 Q}{\partial Y_2^2}, \quad Q \rightarrow 0 \text{ при } Y_2 \rightarrow \infty,$$

$$q = 2 \frac{\partial}{\partial Y_2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} - \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z \partial X} \right)^2 \right] - \left( \frac{\partial}{\partial Y_2} \right)^2 \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \Delta \frac{\partial R_1}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \Delta \frac{\partial R_1}{\partial Z} \right];$$

$$(1.17) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} Q dY_2 = \frac{\partial}{\partial X} (U_1^+ - U_1^-).$$

Из (1.9), (1.10) и (1.17) получим задачу для второго приближения функции давления:

$$(1.18) \quad R_2 = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi d\zeta}{[(X-\xi)^2 + (Z-\zeta)^2]^{1/2}} \left[ \Delta R_2 + \left( \frac{\partial}{\partial X} \right)^{-1} \Delta \frac{\partial R_1}{\partial t_1} + \int_{-\infty}^{+\infty} Q dY_2 \right].$$

Уравнение (1.18) аналогично уравнению (1.13) для главного приближения, но содержит правую часть, следовательно, оно разрешимо при условии ортогональности правой части всем собственным функциям задачи (1.13):

$$(1.19) \quad \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial X} \right)^{-1} \Delta \frac{\partial R_1}{\partial t_1} + \int_{-\infty}^{+\infty} Q dY_2 \right] \exp [i(X \cos \varphi + Z \sin \varphi)] dX dZ = 0.$$

Совокупность (1.12), (1.16), (1.19) позволяет определить временную эволюцию амплитуды  $A(t_1, \varphi)$  из (1.14). Рассмотрим данную систему подробнее.

2. Для начала заметим, что, вообще говоря, эту систему нужно дополнить начальными условиями  $\Psi_0, Q_0, A_0$  в некоторый начальный момент времени  $t_1^0$ . Будем интересоваться поведением решения на больших временах, когда начальные условия уже «забылись». Формально это достигается тем, что  $t_1^0 \rightarrow -\infty$ . Тогда решения для функций  $\Psi, Q$  можно искать в виде разложения по собственным колебаниям

$$(2.1) \quad \Psi = \sum_{\varphi \in \{\varphi_j\}} B(t_1, Y_2, \varphi) \exp [i(X \cos \varphi + Z \sin \varphi)];$$

$$(2.2) \quad Q = \sum_{\varphi \in \{\varphi_j\}} C(t_1, Y_2, \varphi) \exp [i(X \cos \varphi + Z \sin \varphi)] + Q_1.$$

Функция  $C$  в представлении (2.2) подобрана так, чтобы остаток  $Q_1$  тождественно удовлетворял условию ортогональности (1.19). Переходя от системы (1.12), (1.16), (1.19) к уравнениям для амплитуд  $A, B, C$ , получаем (все индексы опущены)

$$(2.3) \quad \frac{\partial B}{\partial t} + iY \cos \varphi B + i \sin \varphi A = \frac{\partial^2 B}{\partial Y^2};$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + iY \cos \varphi C + \frac{3}{2} \frac{\partial (B_+ B_-)}{\partial Y} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 (A_+ B_- - B_+ A_-)}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2};$$

$$(2.5) \quad -\frac{\partial A}{\partial t} + i \cos \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} C dY = 0, \quad C, B \rightarrow 0 \text{ при } Y \rightarrow \infty,$$

где  $A_{\pm} = A(t, \varphi \pm \frac{\pi}{3})$ ;  $B_{\pm} = B(t, Y, \varphi \pm \frac{\pi}{3})$ . В результате  $A(t, \varphi)$  зависит только от  $A(t, \varphi \pm \pi/3)$ , следовательно, взаимозависимыми (для

любого фиксированного  $\varphi$ ) оказываются шесть волн:

$$A\left(t, \varphi + \frac{k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, \dots, 5.$$

Если еще учесть, что давление — действительная функция, т. е.  $A(\varphi + \pi) = A^*(\varphi)$ , то число связанных компонент равно трем. И общее решение задачи (2.3) — (2.5) распадается на отдельные триады, которые не взаимодействуют друг с другом.

Рассмотрим отдельную триаду

$$A(t, \varphi_0), A\left(t, \varphi_0 \pm \frac{\pi}{3}\right).$$

Без ограничения общности можно положить  $|\varphi_0| < \frac{\pi}{6}$ . Заметим, что решение задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + iY \cos \varphi u = \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}, \quad u|_{t=0} = \delta(Y - Y')$$

есть

$$u = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left[-\frac{(Y - Y')^2}{4t} - \frac{i}{2} \cos \varphi t (Y + Y') - \frac{t^3 \cos^2 \varphi}{12}\right].$$

С его помощью можно найти решение уравнений (2.3), (2.4):

$$B = -i \sin \varphi \int_{-\infty}^t A(t', \varphi) \exp\left[-\frac{1}{3} \cos^2 \varphi (t - t')^3 - i \cos \varphi (t - t') Y\right] dt',$$

$$C = - \int_{-\infty}^t \frac{dt'}{\sqrt{4\pi(t-t')}} \exp\left[-\frac{1}{3} \cos^2 \varphi (t - t')^3\right] \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(Y - Y')^2}{4t} - \frac{i}{2} \cos \varphi t (Y + Y')\right] q(t', Y', \varphi) dY'.$$

Явное выражение для

$$q = \frac{3}{2} \frac{\partial(B_+ B_-)}{\partial Y} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2(A_+ B_- - B_+ A_-)}{\partial Y^2}$$

получается подстановкой решения для  $B$ . Тогда, интегрируя выражение для  $C$  поперек критического слоя, находим искомый интеграл из (2.5), необходимый для построения эволюционных уравнений:

$$(2.6) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} C dY = \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} \int_{-\infty}^{t''} dt'' dt''' A\left(t'', \varphi + \frac{\pi}{3}\right) A\left(t''', \varphi - \frac{\pi}{3}\right) \times \\ \times K_0(\varphi, t, t', t'', t''') 2\pi\delta\left(t \cos \varphi - t'' \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) - t''' \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\right) + \\ + \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' A\left(t', \varphi + \frac{\pi}{3}\right) A\left(t'', \varphi - \frac{\pi}{3}\right) K_1(\varphi, t, t', t'') 2\pi\delta\left(t \cos \varphi - \right. \\ \left. - t' \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) - t'' \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\right) + \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' A\left(t', \varphi - \frac{\pi}{3}\right) \times \\ \times A\left(t'', \varphi + \frac{\pi}{3}\right) K_2(\varphi, t, t', t'') 2\pi\delta\left(t \cos \varphi - \right. \\ \left. - t' \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) - t'' \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Выражения для гладких ядер  $K_0, K_1, K_2$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 K_0 &= -\frac{3}{2} i \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) \left(\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)(t' - t'') + \right. \\
 &\quad \left. + \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)(t' - t''')\right) \exp\left[-\frac{1}{3} \cos^2\varphi (t - t')^3 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{3} \cos^2\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)(t' - t'')^3 - \frac{1}{3} \cos^2\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)(t' - t''')^3\right], \\
 K_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} i \cos^2\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) (t' - t'')^2 \exp\left[-\frac{1}{3} \cos^2\varphi \times \right. \\
 &\quad \left. \times (t - t')^3 - \frac{1}{3} \cos^2\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)(t' - t'')^3\right], \\
 K_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} i \cos^2\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) (t' - t'')^2 \exp\left[-\frac{1}{3} \cos^2\varphi \times \right. \\
 &\quad \left. \times (t - t')^3 - \frac{1}{3} \cos^2\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)(t' - t'')^3\right].
 \end{aligned}$$

При  $\varphi = \varphi_0$  ( $|\varphi_0| < \frac{\pi}{6}$  по условию)  $\delta$ -функции в выражении (2.6) равны нулю почти всюду и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C dY = 0.$$

Тогда из уравнения (2.5) немедленно следует

$$A(t, \varphi_0) = A_0 = \text{const},$$

т. е. на  $\varphi_0$ -компоненту триады отсутствует влияние других волн. В результате уравнения для двух оставшихся компонент линеаризуются и, так как в исходных уравнениях нет явной зависимости от  $t$ , их амплитуды запишем как

$$(2.7) \quad A\left(t, \varphi_0 + \frac{\pi}{3}\right) = a_+ \exp(\lambda t), \quad A\left(t, \varphi_0 - \frac{\pi}{3}\right) = a_- \exp(\lambda^* t).$$

В принципе подстановкой в систему (2.5), (2.6) можно получить дисперсионное соотношение для  $\lambda$  и собственный вектор  $(a_+, a_-)$  при любом  $\varphi_0$  из диапазона  $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ . Однако для целей качественного анализа можно ограничиться наиболее важным и простым случаем  $\varphi_0 = 0$ , т. е. возбуждением субгармоник плоской волной Толлмина — Шлихтинга. Для такой триады подстановка решения в виде (2.7) в уравнения (2.5), (2.6) дает

$$(2.8) \quad \lambda a_+ = \frac{3\pi i}{8} A_0 I(\lambda) a_-^*, \quad \lambda^* a_- = -\frac{3\pi i}{8} A_0 I(\lambda^*) a_+^*,$$

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} x^2 \exp\left(-2\lambda x - \frac{1}{6} x^3\right) dx.$$

Из условия разрешимости системы (2.8) относительно вектора  $(a_+, a_-)$  получается соотношение для скорости роста  $\lambda$  в зависимости от амплитуды двумерной волны  $A_0$ :

$$(2.9) \quad \lambda^2 + \left[\frac{3\pi}{8}\right]^2 |A_0|^2 I^2(\lambda) = 0.$$

Данное соотношение позволяет определять усиление субгармонических возмущений при заданной амплитуде двумерной волны. Исследуем поведение скорости роста  $\lambda$  в предельных случаях больших и малых амплитуд. Для корней с положительной реальной частью имеем

$$\text{при } |A_0| \rightarrow 0 \quad \lambda = \pm i(3\pi/2) |A_0| + \pi^2 (3/4)^{4/3} \Gamma(1/3) |A_0|^2 + \dots,$$

$$\text{при } |A_0| \rightarrow \infty \quad \lambda = \exp(ik\pi/8) (3\pi/32)^{1/4} |A_0|^{1/4} + \dots, \quad k = \pm 1, \pm 3.$$



Что касается корней с отрицательной реальной частью, то, так как решение для них затухает, они неинтересны для анализа.

В заключение перечислим основные полученные результаты.

1. При достаточных малых амплитудах общее решение задачи о нелинейном взаимодействии собственных колебаний в постановке «без начальных условий» распадается на отдельные триады, развивающиеся независимо друг от друга.

2. Для компоненты триады, направление распространения которой ближе всего к направлению основного течения, влияние двух других компонент отсутствует в рассматриваемом приближении, и, следовательно, ее поведение слабо зависит от поведения оставшихся компонент. Этот вывод согласуется с экспериментами [1], в которых амплитуда двумерной волны Толлмина — Шлихтинга практически не изменялась, даже когда амплитуда субгармоник превышала ее более чем в 2 раза.

3. Уравнения, описывающие эволюцию волн, оказываются интегро-дифференциальными, так что локальная скорость роста определяется всей предысторией развития возмущений. Для примера выпишем задачу при  $\varphi_0 = 0$ :

$$\frac{dA_0}{dt} = 0,$$

$$\frac{dA_+}{dt} = \frac{3\pi i}{8} \int_{-\infty}^t A_0(t') A_-^*(2t' - t)(t - t')^2 \exp\left(-\frac{1}{6}(t - t')^3\right) dt',$$

$$\frac{dA_-}{dt} = -\frac{3\pi i}{8} \int_{-\infty}^t A_0(t') A_+^*(2t' - t)(t - t')^2 \exp\left(-\frac{1}{6}(t - t')^3\right) dt'.$$

Здесь  $A_0$  — амплитуда двумерной волны;  $A_{+,-}$  — амплитуды волн, распространяющихся под углами  $\pm\pi/3$  к основному потоку. Решение имеет вид (2.7) с показателем роста из (2.9).

Постановка задачи предложена профессором В. Н. Жигулевым. Автор признателен В. Н. Жигулеву, А. В. Федорову и рецензентам статьи за полезные замечания и дополнения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kachanov Yu. S., Lavchenko V. Ya. The resonant interaction of disturbances at laminar-turbulent transition in a boundary layer // J. Fluid Mech.— 1984.— V. 138.— P. 209.
2. Raetz G. S. A new theory of the cause of transition in fluid flows.— S. I., 1959.— (Rept/Norair; NOR—59—383).
3. Craik A. D. D. Non-linear resonant interaction instability in boundary layers // J. Fluid Mech.— 1971.— V. 50, pt 2.
4. Зельман М. Б. О нелинейном развитии возмущений в слабонеоднородных потоках несжимаемого вязкого газа // Газодинамика и физическая кинетика.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР. 1974.
5. Володин А. Г., Зельман М. Б. Трехволновое резонансное взаимодействие возмущений в пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1978.— № 5.
6. Herbert Th. Subharmonic three-dimensional disturbances in unstable shear flows.— N. Y., 1983.— (Pap./AIAA; N 83—1759).
7. Craik A. D. D. Resonant interaction in shear flows // Laminar-Turbulent Transition: IUTAM Sympos., Novosibirsk, 1984.— Berlin e. a.: Springer, 1985.
8. Smith F. T., Stewart P. A. The resonant-triad nonlinear interaction in boundary layer transition // J. Fluid Mech.— 1987.— V. 179.— P. 227.
9. Сычев В. В., Рубан А. И., Сычев Вик. В., Королев Г. Л. Асимптотическая теория отрывных течений.— М.: Наука, 1987.
10. Smith F. T. On the non-parallel flow stability of the Blasius boundary layer // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.— 1979.— V. 336, N 1724.
11. Жук В. И., Рыжов О. С. Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости // ДАН СССР.— 1980.— Т. 253, № 6.

г. Москва

Поступила 23/VII 1990 г.,  
в окончательном варианте —  
10/IV 1992 г.