

ТЕПЛОВОЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СТОЛБЕ ГАЗА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

Ю. В. Саночкин

(Москва)

Изучение взаимодействия потока с областью газа, где происходит выделение энергии, представляет практический и теоретический интерес. Речь идет о задачах, когда натекающий газ проходит сквозь объем тепловыделения. Указанная ситуация может возникать в метеорологии, при нагреве потока в электрической дуге или другом виде электрического разряда, при обдуве стабилизированных газовых твэлов в реакторах, при распространении мощных пучков электронов или иных видов проникающей радиации в газовой среде и т. д. Однако систематические расчеты картины течения и теплообмена проводились лишь применительно к условиям продольно обдуваемых стабилизированных дуг. Их результаты наиболее полно отражены в работах [1—4]. Применялись полуэмпирические, численные [2, 4] и интегральные [4, 3] методы. Имеется также ряд теоретических работ общего характера по течениям с распределенным теплоподводом (см. [5] и ссылки в ней) и цикл исследований, посвященных распространению лазерных лучей и разрядов по веществу (см. [6]), которые в теоретической части носят преимущественно оценочный характер.

Цель данной работы — расчет теплового пограничного слоя, образующегося при обдуве безграничным потоком цилиндрического столба газа с произвольными объемными источниками тепла. Рассматривается стационарная задача в предположении, что основным механизмом теплообвода является теплопроводность. Ограничимся случаем продольного обдува столба тепловыделяющего газа. В системе отсчета, связанной со свободным потоком, задача формулируется иначе: определить возмущение состояния газа движущимися распределенными источниками тепла.

1. Введем цилиндрическую систему координат с осью z , направленной вдоль потока, и началом, расположенным в центре начального сечения обдуваемого столба газа радиуса a (фиг. 1). В свободном потоке параметры течения являются постоянными величинами. В случае безграничного потока в отсутствие закрутки газа возможно упрощение задачи, поскольку уравнение импульсов допускает интеграл [1, 2]

$$(1.1) \quad u = u_\infty = \text{const}, \quad p = \text{const},$$

где u — осевая скорость; p — давление. Оставшиеся уравнения неразрывности и энергии можно решать с помощью аппарата теории пограничного слоя:

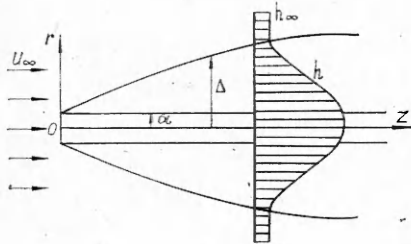
$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial r}(r\rho v) + ru_\infty \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0;$$

$$(1.3) \quad \rho v \frac{\partial h}{\partial r} + \rho u_\infty \frac{\partial h}{\partial z} = q + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial r} \right);$$

$$(1.4) \quad \rho h = \rho_\infty h_\infty.$$

Здесь v — радиальная скорость; h — удельная энтальпия; ρ — плотность; λ — коэффициент теплопроводности; c_p — теплоемкость газа. Плотность источников q отлична от нуля при $r \leq a$ и в общем случае может быть представлена в виде

$$(1.5) \quad q = b_\alpha \rho^\alpha, \quad b_\alpha = \begin{cases} b_\alpha = \text{const} & (r \leq a), \\ 0 & (r > a), \end{cases}$$



Ф и г. 1

где b_α — коэффициент, зависящий от сторонних для газодинамики параметров. При $\alpha=1$ имеем закон энергосодержания, обусловленного, например, ионизационными потерями энергии при прохождении заряженных частиц через вещество [7]. Иначе говоря, этот случай соответствует модели стабилизированного электронного пучка радиуса a , обдуваемого газом. Если вместо (1.5) взять вы-

ражение для джоулева нагрева и добавить к (1.2)–(1.4) закон Ома, то придем к уравнениям дуги [1–4]. Систему уравнений (1.2), (1.3) следует дополнить граничными условиями

$$(1.6) \quad v|_{r=0} = 0, \quad \dot{h}|_{z=0} = h_\infty, \quad h|_{r \rightarrow \infty} = h_\infty, \\ \partial h / \partial r|_{r=0} = 0, \quad v|_{z=0} = 0, \quad \partial h / \partial r|_{r \rightarrow \infty} = 0.$$

2. Для решения (1.2)–(1.4), следуя [1, 3], применим приближенный метод, аналогичный интегральному методу Кармана — Польгаузена. Определим конечную толщину теплового слоя $\Delta(z)$ как величину области, где существенно тепловое воздействие на поток (см. фиг. 1). На границе теплового слоя $r = \Delta$ энтальпия газа на некоторую малую величину отличается от энтальпии невозмущенного потока h_∞ . Проинтегрировав (1.2), (1.3) по r в пределах теплового слоя, учитывая (1.6) и исключая $v(\Delta, z)$, получим

$$(2.1) \quad \frac{z}{\Delta^2} \Delta_h^2 = \frac{b_\alpha \rho_m^\alpha u^2}{u_\infty \rho_\infty h_\infty},$$

где

$$(2.2) \quad \Delta_h^2 = \int_0^\Delta 2r \frac{\rho}{\rho_\infty} \left(\frac{h}{h_\infty} - 1 \right) dr = \Delta^2 \int_0^1 2\eta \left(1 - \frac{\rho}{\rho_\infty} \right) d\eta = k_1 \left(1 - \frac{\rho_m}{\rho_\infty} \right) \Delta^2.$$

Здесь $\eta = r/\Delta$, индекс m указывает значения переменных на оси. Величина Δ_h представляет толщину слоя приобретения энтальпии. Средняя плотность газа внутри теплового слоя с ростом z становится малой, и, согласно (2.2), $\Delta_h \rightarrow \Delta$. Для решения задачи достаточно использовать однопараметрическую аппроксимацию профиля энтальпии в пределах теплового слоя

$$(2.3) \quad h = h_\infty + (h_m - h_\infty)f(\eta)$$

с граничными условиями для f

$$(2.4) \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f'(1) = 0, \quad f''(1) = 0, \dots$$

Условием (2.4) удовлетворяет полином $f(\eta) = (1 - \eta)^N(1 + N\eta)$, где $N = 2$, если сглаживание профиля энтальпии на границе слоя проводить по первой производной; $N = 3$, если — по первой и второй, и т. д. Обычно при численных расчетах используются полиномы 3-, 4-й степени. Коэффициент k_1 в (2.2) является, вообще говоря, функцией ρ_m/ρ_∞ :

$$(2.5) \quad k_1 = \int_0^1 \frac{2\eta f(\eta) d\eta}{\frac{\rho_m}{\rho_\infty} + \left(1 - \frac{\rho_m}{\rho_\infty} \right) f(\eta)}.$$

Согласно (2.5), $k_1 \simeq 1$ при $\rho_m \ll \rho_\infty$ и $k_1 < 1$ при $\rho_m \sim \rho_\infty$. Допустимо положить его константой ($k_1 \simeq 1$), ибо можно ожидать, что влияние допущенной на начальном участке неточности будет исчезать с удалением от начала слоя. Аналогичное замечание можно сделать о коэффициенте, получающемся при интегрировании выражения (1.5), который в правой части (2.1) положен равным единице. В качестве второго дифференциального уравнения используется (1.3) на оси. Подставляя в (1.3) (2.3) и учитывая (1.6), находим

$$(2.6) \quad \rho_m u_\infty \frac{dh_m}{dz} = b_\alpha \rho_m^\alpha - \frac{2N(N+1)}{\Delta^2} \frac{\dot{h}_m}{c_{pm}} (h_m - h_\infty).$$

Уравнения (1.4), (2.1), (2.2) и (2.6) образуют полную систему для определения ρ_m , h_m , Δ_h , Δ . Вводя безразмерные переменные

$$\psi = \Delta_h^2/a^2, \quad g = h_m/h_\infty, \quad x = b_\alpha \rho_\infty^{\alpha-1} z / u_\infty h_\infty$$

и полагая

$$\lambda_m/c_{pm} = (\lambda_\infty/c_{p\infty})s(g),$$

приведем систему уравнений к виду

$$(2.7) \quad d\psi/dx = g^{-\alpha}, \quad dg/dx = g^{1-\alpha} - \Lambda s(g)(g-1)^2/\psi,$$

где

$$\Lambda = \frac{2N(N+1)k_1}{a^2} \frac{\lambda_\infty k_\infty}{c_{p\infty} b_\alpha \rho_\infty^\alpha}$$

Задача содержит, таким образом, единственный критерий подобия Λ , его физический смысл очевиден из (2.6). Граничные условия $g(0) = 1$, $\psi(0) = 0$.

3. Решение (2.7) вблизи начального сечения можно записать в рядах

$$(3.1) \quad \psi, g = x(1 - (\alpha/2)x + \dots), \quad g = 1 + x + \dots$$

Коэффициенты при последующих членах разложения громоздки, зависят от Λ и не приводятся. Особенность в правой части второго уравнения (2.7) при $x = 0$, таким образом, является кажущейся.

Наибольший интерес представляет случай малых Λ , когда приток тепла от источников превалирует над теплоотводом (случай $\Lambda > 1$ соответствует задаче о малых возмущениях свойств потока источниками энергии [5]). При $\Lambda = 0$ справедливо следующее простое решение (2.7):

$$(3.2) \quad g = (1 + \alpha x)^{1/\alpha}, \quad \psi = \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha x) = \ln g,$$

$$f_1 = \frac{\Delta^2}{a^2} = \frac{1}{k_1 \alpha} \frac{(1 + \alpha x)^{1/\alpha} \ln(1 + \alpha x)}{(1 + \alpha x)^{1/\alpha} - 1}.$$

Решение (3.2) дает максимальное значение энтальпии (прорежения), которое может быть достигнуто на оси теплового слоя. Наличие теплоотвода приведет, естественно, к меньшим величинам. Согласно (3.2), толщина слоя приобретения энтальпии растет значительно медленнее самой энтальпии.

Нетрудно найти также асимптотику решения задачи для $x \gg 1$. При $x \rightarrow \infty$ имеем $g \rightarrow \infty$, $\psi \rightarrow \infty$, $\psi' \rightarrow 0$, $g' \rightarrow 0$. Полагая $s(g) = g^\beta$, находим из (2.7)

$$(3.3) \quad \psi = \Lambda g^{1+\alpha+\beta}.$$

Отсюда следует

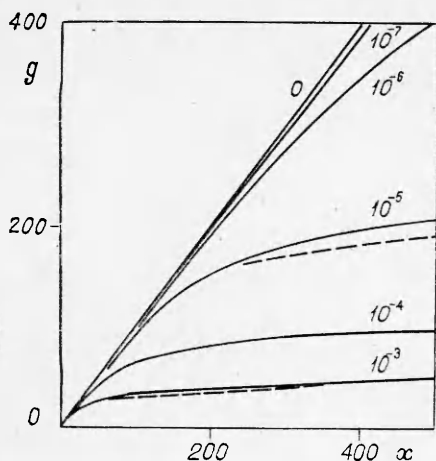
$$(3.4) \quad g(x)^{1+2\alpha+\beta} - g(x_1)^{1+2\alpha+\beta} = \frac{1+2\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} \frac{x-x_1}{\Lambda},$$

$$\psi(x)^{\frac{1+2\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}} - \psi(x_2)^{\frac{1+2\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}} = \frac{1+2\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} \Lambda^{\frac{\alpha}{1+\alpha+\beta}} (x-x_2).$$

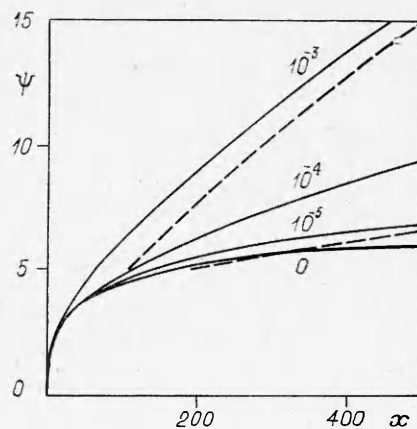
Формулы (3.4) справедливы для $x > x_1(\Lambda) \gg 1$ и $x > x_2(\Lambda) \gg 1$ соответственно. Если $x \gg x_1$, $g(x) \gg g(x_1)$ и $x \gg x_2$, $\psi(x) \gg \psi(x_2)$, то для g и ψ соответственно получаются следующие простые выражения:

$$(3.5) \quad g = \left(\frac{1+2\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} \right)^{\frac{1}{1+2\alpha+\beta}} \left(\frac{x}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{1+2\alpha+\beta}}, \quad \psi = \left(\frac{1+2\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} \right)^{\frac{1+\alpha+\beta}{1+2\alpha+\beta}} \Lambda \left(\frac{x}{\Lambda} \right)^{\frac{1+\alpha+\beta}{1+2\alpha+\beta}}.$$

В силу сказанного решения (3.5) обладают разной точностью при заданном x . Например, при $\Lambda = 10^{-3}$, $\alpha = 1$, $\beta = 0,5$, $x = 10^2$ ошибки в вычислении g и ψ составляют 12 и 32% соответственно. С увеличением x в 2 раза они уменьшаются до 7 и 19%. Интересно отметить также следующее свойство решений при $\Lambda \neq 0$. Согласно (3.5), при $x > \Lambda^{-(1+\alpha)/(\alpha+\beta)}$ толщина теплового слоя ψ становится больше теплосодержания g , тогда как при $\Lambda = 0$ всегда $\psi < g$. Однако следует помнить,



Ф и г. 2



Ф и г. 3

что при очень больших g решение задачи имеет формальный характер, если выходит за рамки допущений, принятых в исходной физической модели.

4. Решение в промежуточной области получено численным интегрированием (2.7). Интегральные кривые для случая $\alpha = 1$, $\beta = 0,5$ (воздух при нормальных условиях) приведены на фиг. 2, 3 (цифры на кривых — значения Λ). С ростом теплоотвода толщина слоя увеличивается, а максимальные значения энтальпии (прорежения) на оси слоя падают. Видно, что при малых x кривые сливаются в соответствии с (3.1). Штриховые кривые $\Lambda = 10^{-3}$ вычислены по асимптотическим формулам (3.5) и иллюстрируют точность указанных разложений. Для $\Lambda = 10^{-5}$ ошибка в вычислении ψ , согласно (3.5), при $200 < x < 500$ изменяется от 40 до 60%. Вычисление по (3.4) с $x_2 = 100$ дает точность на уровне нескольких процентов (штриховая линия $\Lambda = 10^{-5}$ на фиг. 3). Штриховая линия $\Lambda = 10^{-5}$ на фиг. 2 также вычислена, согласно (3.4), при $x_1 = 200$ (вычисление g по (3.5) дает в пределах 10% тот же результат).

В заключение следует отметить, что используемый в работе интегральный метод, видимо, наиболее точно дает значения величин энтальпии и плотности на оси, которые представляют интерес для практики.

Автор благодарен С. В. Никонову за проведение численных расчетов и М. А. Власову, С. И. Выборнову и А. В. Жаринову за обсуждение.

Поступила 6 V 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Урюков Б. А. Продольно обдуваемая электрическая дуга в цилиндрическом канале. — Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1968, № 3, вып. 1.
2. Ведерников Г. А., Урюков Б. А. Численный расчет электрической дуги в потоке воздуха. — В кн.: Вопросы физики низкотемпературной плазмы. Минск: Наука и техника, 1970.
3. Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск: Наука, 1975.
4. Десятнов Г. А., Жайнаков А. Ж. и др. Методы расчета и численный анализ течений проводящего газа в сильноточных электрических дугах. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 5.
5. Коган М. Н., Кучеров А. Н. и др. Плоские течения газа при слабом подводе энергии. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 5.
6. Райзер Ю. П. Лазерная искра и распространение разрядов. М.: Наука, 1974.
7. Широков Ю. М., Юдин Н. П. Ядерная физика. М.: Наука, 1972.