УДК 539.3

НАПРЯЖЕНИЯ В КОНИЧЕСКОЙ ТРУБЕ ПРИ ВНЕЗАПНОМ ПРИЛОЖЕНИИ НАГРУЗКИ

М. А. Задоян

Институт механики НАН Армении, 375019 Ереван, Армения

Рассматривается толстостенная длинная коническая труба из идеально пластического материала, на внутренней поверхности которой внезапно приложено равномерно распределенное давление, остающееся постоянным во времени, или которой сообщается скорость. С внутренней конической поверхности распространяется зона идеальной пластичности. Материал трубы как в пластической, так и в упругой зонах считается несжимаемым. В пластической зоне принимается условие пластичности Губера — Мизеса.

Для цилиндрической трубы упругопластическая задача исследована в работах [1, 2]. Статическая задача о предельном состоянии конической трубы исследована в [3], а упругопластическое состояние этой трубы — в [4].

1. Движение трубы под действием внезапно приложенного давления на ее внутреннюю поверхность. Рассмотрим предельное состояние цилиндрической трубы из идеально пластического несжимаемого материала при внезапном воздействии внутреннего давления, остающегося неизменным во времени. Соответствующая упругопластическая задача сводится к дифференциальному уравнению [2]

$$Cx'' + \ln x - x/\delta - p/k + 1 = 0, \tag{1}$$

где $C = a^2\rho\ln\delta/(2G)$; $\delta = b/a$; $x = r_*^2(t)/a^2$; $r = r_*(t)$ — уравнение граничной цилиндрической поверхности между упругой и пластической зонами; a, b — радиусы внутренней и внешней цилиндрических поверхностей. Начальные условия можно представить в следующем виде:

$$x(t_0) = 1, \qquad x'(t_0) = \sqrt{2/(Ck)}\sqrt{p - p_0}, \qquad p_0 = (k/2)(1 - a^2/b^2),$$

где p_0 — минимальное значение p, при котором на поверхности $r = a$ возникают пластические деформации; t_0 — момент начала распространения пластических деформаций.

Вводя новую функцию $x' = \Phi(x)$, уравнение (1) сведем к дифференциальному уравнению первого порядка

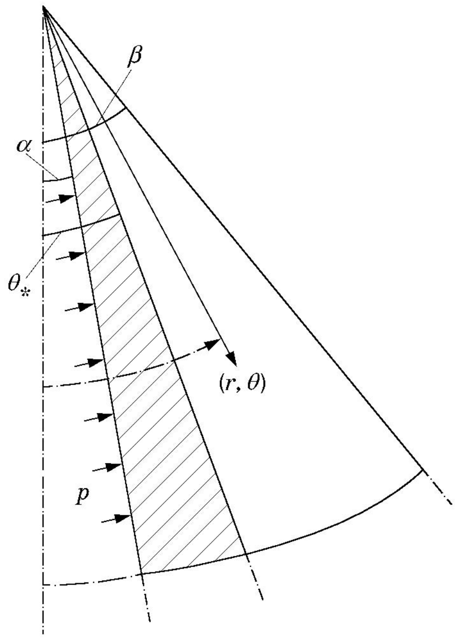
$$C(x'^2(t) - x'^2(t_0)) + 2x\ln x - (x-1)(2p/k + (x+1)/\delta^2) = 0. \tag{2}$$

Определим предельное значение $p = p_*$, при котором труба при $t = t_*$ полностью переходит в пластическое состояние. Полагая в (2) $x'(t_*) = 0$ и $x(t_*) = \delta^2$, находим

$$p_* = 2k\ln(b/a) - (k/2)(1 - a^2/b^2). \tag{3}$$

Здесь первое слагаемое — предельное пластическое давление, второе — половина предельного упругого давления в статической задаче [5].

Пусть на внутренней поверхности $\theta = \alpha$ (см. рисунок) толстостенной конической трубы в момент $t = 0$ приложено давление $p(t) = \mathrm{const}$. Из условия осевой симметрии имеем $w = 0$. В решении аналогичной статической упругопластической задачи В. Соколовского [4] принимается $u = \tau_{r\theta} = 0$. Эти компоненты отсутствуют в аналогичной динамической



задаче для цилиндрической трубы, рассмотренной в [1, 2]. По-видимому, такое допущение оправдано для малых значений конусности трубы. Тогда уравнение движения примет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\sigma_\theta - \sigma_\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad \sigma_r = \frac{\sigma_\theta + \sigma_\varphi}{2}.$$

Компоненты деформаций выражаются через перемещения по формулам $\varepsilon_\theta = (1/r)(\partial v/\partial\theta)$, $\varepsilon_\varphi = (v/r)\operatorname{ctg}\theta$.

Из условия несжимаемости $\varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi = 0$ находим $v = \psi(r,t)/\sin\theta$, где $\psi(r,t)$ — произвольная функция r и t.

1.1. *Линейно-упругое состояние.* Когда приложенное давление p недостаточно высокое, труба находится в чисто упругом состоянии. Согласно закону Гука имеем

$$\sigma_\varphi - \sigma_\theta = \frac{4G}{r}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\psi(r,t). \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнение движения, находим

$$\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} = \frac{4G}{r}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\psi(r,t) + \frac{\rho r}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

Интегрируя последнее уравнение и используя граничное условие на внешней конической поверхности ($\sigma_\theta = 0$ при $\theta = \beta$), получим

$$\sigma_\theta = \frac{2G}{r}\psi(r,t)\Big(\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \ln\frac{\operatorname{tg}(\beta/2)}{\operatorname{tg}(\theta/2)}\Big) - \rho r\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\ln\frac{\operatorname{tg}(\beta/2)}{\operatorname{tg}(\theta/2)}. \tag{5}$$

Далее, используя (5) с учетом условия на внутренней поверхности ($\sigma_\theta = -p$ при $\theta = \alpha$), находим

$$r\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{\omega^2}{r}\psi(r,t) = Q, \tag{6}$$

где

$$\omega^2 = 2G\omega_0^2(\alpha)/(\rho g(\alpha)), \qquad Q = p/(\rho g(\alpha)) \tag{7}$$

и $\omega_0^2(\theta) = \cos\theta/\sin^2\theta - \cos\beta/\sin^2\beta - g(\theta)$, $g(\theta) = \ln(\operatorname{tg}(\beta/2)/\operatorname{tg}(\theta/2))$.

Вводя новую функцию $\psi(r,t) = rF(\xi)$, $\xi = t/r$, $0 \leqslant \xi < \infty$, для деформации сдвига имеем $2\gamma_{r\theta} = \partial v/\partial r - v/r = -\xi F'(\xi)/\sin\theta$. При $\xi = \xi_1$ условие отсутствия касательного напряжения

$$F'(\xi_1) = 0 \tag{8}$$

позволяет получить точное решение рассматриваемой задачи в указанной окрестности значения ξ_1. Для значений ξ, отличных от ξ_1, при $\tau_{r\theta} \neq 0$ решение можно рассматривать как приближенное. Из (6) следует уравнение

$$F'' + \omega^2 F = Q, \tag{9}$$

решение которого, удовлетворяющее однородным начальным условиям $F(0) = F'(0) = 0$, записывается в виде

$$F(\xi) = Q(1 - \cos\omega\xi)/\omega^2. \tag{10}$$

Компоненты напряжений вычисляются по формуле

$$\sigma_\theta = -2G\omega_0^2(\theta)F(\xi) - \rho g(\theta)F''(\xi). \tag{11}$$

Из (4), (9)–(11) находим

$$\sigma_{\theta,\varphi} = -p\,\frac{g(\theta)}{g(\alpha)} + p\Big[\frac{g(\theta)}{g(\alpha)} \mp \frac{1}{\omega_0^2(\alpha)}\Big(\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \mp \frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} \mp \ln\frac{\operatorname{tg}(\beta/2)}{\operatorname{tg}(\theta/2)}\Big)\Big](1 - \cos\omega\xi). \tag{12}$$

В (12) верхний знак соответствует σ_θ, нижний — σ_φ.

Перемещение (2) вычисляется по формуле

$$v = pr(1 - \cos\omega\xi)/(2G\omega_0^2(\alpha)\sin\theta). \tag{13}$$

Таким образом, под действием внезапно приложенного внутреннего давления p, постоянного во времени, коническая труба совершает колебания с переменной по длине частотой ω/r около состояния статического равновесия.

Предположим, что в момент $t = t_0$ труба, начиная с внутренней поверхности, переходит в пластическое состояние. Тогда из (10), (12) получим

$$\sin^2(\omega\xi_0/2) = (k/(2p))(\sin^2\alpha/\cos\alpha)\omega_0^2(\alpha). \tag{14}$$

Отсюда для предельного упругого движения, при котором на внутренней поверхности $\theta = \alpha$ возникают пластические деформации, имеем $\xi_0 = \pi/\omega$. Из (14) находим

$$p_0 = \frac{k}{2}\Big(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}\,\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\,\ln\frac{\operatorname{tg}(\beta/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)}\Big). \tag{15}$$

Следует отметить, что p_0 составляет половину внутреннего давления в статической задаче [4].

Полагая в (14) $p = p_0$, находим

$$t_0 = \pi r\sqrt{\rho g(\alpha)/(2G)}/\omega_0(\alpha).$$

Отметим, что при $\xi = \xi_0$ в силу (15) $\tau_{r\theta} = 0$.

Выражения для напряжений σ_x, σ_φ, σ_z и радиального перемещения v в цилиндрической трубе можно получить, сделав в (11)–(13), (15) предельный переход $\theta \to 0$, $r \to \infty$ при $r\theta = \mathrm{const}$:

$$\sigma_{x,\varphi} = -p\,\frac{\ln(b/x)}{\ln(b/a)} + p\Big(\frac{\ln(b/x)}{\ln(b/a)} \mp \frac{b^2 - x^2}{b^2 - a^2}\,\frac{a^2}{x^2}\Big)(1 - \cos\gamma t), \tag{16}$$

$$u = \frac{pa^2b^2}{2G(b^2-a^2)x}(1-\cos\gamma t), \qquad p_0 = \frac{k}{2}\Big(1-\frac{a^2}{b^2}\Big).$$

Здесь верхний знак соответствует σ_x, нижний — σ_φ; $\gamma^2 = 2G(b^2-a^2)/(\rho a^2 b^2 \ln(b/a))$.

Выражения (16) совпадают с формулами в [2] для цилиндрической трубы. В этом случае значение p_0 равно половине внутреннего давления в статической задаче [5].

1.2. *Упругопластическое состояние.* При $t > t_0$ в конической трубе распространяется пластическая зона. Учитывая, что функция перемещения удовлетворяет условию несжимаемости, а также условию непрерывности перемещения на граничной поверхности между упругой и пластической зонами, функцию перемещения для обеих зон примем в виде

$$v = \psi(r,t)/\sin\theta.$$

В пластической зоне выполняется условие

$$\sigma_\varphi - \sigma_\theta = 2k, \qquad \alpha \leqslant \theta \leqslant \theta_*(r,t), \tag{17}$$

на границе упругой и пластической зон — условие

$$(2G/r)(\cos\theta_*/\sin^2\theta_*)\psi(r,t) = k, \tag{18}$$

где $\psi(r,t)$ — новая неизвестная функция r и t; $\theta = \theta_*(r,t)$ — граничная поверхность между пластической и упругой зонами.

Вводя функцию $F(\xi) = \psi(r,t)/r$, из (18) получим

$$\cos\theta_* = \sqrt{1+\mu^2F^2} - \mu F, \qquad \mu = G/k. \tag{19}$$

В упругой зоне аналогично (5) находим

$$\sigma_\theta = -2G\omega_0^2(\theta)F(\xi) - \rho g(\theta)F''(\xi), \qquad \theta_* \leqslant \theta \leqslant \beta, \tag{20}$$

для пластической зоны имеем

$$\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} = 2k\operatorname{ctg}\theta + \rho\,\frac{r}{\sin\theta}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

Интегрируя последнее уравнение и используя граничное условие на внутренней поверхности, получим

$$\sigma_\theta = -p + 2k\ln\frac{\sin\theta}{\sin\alpha} + \rho\ln\frac{\operatorname{tg}(\theta/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)}\,F''(\xi). \tag{21}$$

Удовлетворяя условию непрерывности напряжений σ_θ на поверхности $\theta = \theta_*(\xi)$, приходим к уравнению

$$F'' + \nu\Omega(F) = \nu p/(2k), \qquad \nu = 2k/(\rho g(\alpha)), \tag{22}$$

где

$$\Omega(F) = \ln\frac{\sin\theta_*(F)}{\sin\alpha} + \mu F\Big(\frac{\cos\theta_*(F)}{\sin^2\theta_*(F)} - \frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} - \ln\frac{\operatorname{tg}(\beta/2)}{\operatorname{tg}(\theta_*(F)/2)}\Big).$$

С учетом (19) получим

$$\Omega(F) = 1/2 - \mu F\cos\beta/\sin^2\beta + \ln\big(\sqrt{2\mu F}\,(\sqrt{1+\mu^2F^2} - \mu F)^{1/2}/\sin\alpha\big) -$$
$$- \mu F\ln\big(\operatorname{tg}(\beta/2)(1-\mu F+\sqrt{1+\mu^2F^2})(\sqrt{1+\mu^2F^2}+\mu F)^{1/2}/(2\mu F)^{1/2}\big). \tag{23}$$

Вводя функцию ϕ:

$$\frac{dF}{d\xi} = \phi(F), \tag{24}$$

можно (22) свести к уравнению первого порядка

$$\phi'\phi + \nu\Omega(F) = \nu p/(2k). \tag{25}$$

Отсюда находим

$$\phi^2(F) = \phi^2(F_0) + 2\nu \int\limits_{F_0}^{F} \Big(\frac{p}{2k} - \Omega(x)\Big)\,dx, \tag{26}$$

где F_0 — значение функции F в момент возникновения пластических деформаций.

Из (24) находим

$$\frac{t-t_0}{r} = \int\limits_{F_0}^{F} \Big[\phi^2(F_0) + 2\nu \int\limits_{F_0}^{x} \Big(\frac{p}{2k} - \Omega(x)\Big)\,dx\Big]^{-1/2} dx. \tag{27}$$

Значение $\phi^2(F_0)$ находится согласно определению (10), из которого следует, что $F(\xi_0) = (1/(2\mu))\sin^2\alpha/\cos\alpha$:

$$\phi^2(F_0) = F'^2(\xi_0) = 2F_0(p-p_0)/(\rho g(\alpha)). \tag{28}$$

Квадратура (27) дает зависимость F от $\xi - \xi_0$ при $p \geqslant p_0$.

Исключая $F''(\xi)$ в (20) и (21) и используя (22), в пластической зоне получим

$$\begin{gathered} \sigma_\theta = -p + 2k\ln\frac{\sin\theta}{\sin\alpha} + \frac{1}{g(\alpha)}\ln\frac{\operatorname{tg}(\theta/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)}(p - 2k\Omega(F)), \\ \sigma_\varphi = \sigma_\theta + 2k, \qquad \alpha \leqslant \theta \leqslant \theta_*, \end{gathered} \tag{29}$$

в упругой —

$$\begin{gathered} \sigma_\theta = -2G\omega_0(\theta)F(\xi) - (g(\theta)/g(\alpha))(p - 2k\Omega(F)), \\ \sigma_\varphi = \sigma_\theta + 4G(\cos\theta/\sin^2\theta)F(\xi), \qquad \theta_* \leqslant \theta \leqslant \beta. \end{gathered} \tag{30}$$

1.3. *Предельное пластическое состояние.* Определим минимальное значение давления p_* и соответствующее значение t_*, при которых исчезает упругая зона, т. е. наступает чисто пластическое состояние.

Полагая в (26) $F'(\xi_*) = \phi(F_*) = 0$, где $\xi_* = t_*/r$, находим

$$p_* = \frac{k}{F_*}\Big(\mu F_0^2\omega_0^2(\alpha) + 2\int\limits_{F_0}^{F_*}\Omega(x)\,dx\Big), \qquad F_* = F(\xi_*) = \frac{1}{2\mu}\,\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta},$$

т. е.

$$p_* = \frac{k}{2}\,\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta}\Big\{\Big[1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\Big(\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} + \ln\frac{\operatorname{tg}(\beta/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)}\Big)\Big]\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + 8\mu\int\limits_{F_0}^{F_*}\Omega(x)\,dx\Big\}. \tag{31}$$

Предельное значение давления в соответствующей статической задаче для конической трубы определяется формулой $p_{s*} = 2k\ln(\sin\beta/\sin\alpha)$, впервые полученной Д. Ивлевым в [3], а затем В. Соколовским в [4] как предельный случай упругопластической задачи.

Если совершить предельный переход $\theta \to 0$, $r \to \infty$ при фиксированном $y = r\theta$, принимая $2\mu F_* = \beta^2$, $2\mu F_0 = \alpha^2$, из (23) получим $\Omega(F) = 1/2 - \mu F/\delta^2 - \ln\alpha + \ln\sqrt{2\mu F}$. Вычисляя интеграл в (31), а затем принимая $\alpha r \to a$, $\beta r \to b$, находим выражение для предельного значения давления для цилиндрической трубы $p_* = 2k\ln(b/a) - (k/2)(1 - a^2/b^2)$, совпадающее с формулой (3).

Если $p > p_*$, то происходит чисто пластическое расширение конической трубы.

2. Движение трубы при сообщении ее внутренней поверхности скорости. Рассмотрим случай, когда в момент времени $t = 0$ внутренней поверхности трубы при отсутствии давления ($p = 0$) сообщена скорость

$$v\big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = J \quad \text{при} \quad \theta = \alpha.$$

Здесь J — заданная постоянная. Тогда

$$\psi(r,0) = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|_{t=0} = I, \qquad I = J\sin\alpha.$$

2.1. *Линейно-упругое состояние.* Если при $t > 0$ ввести функцию $F(\xi)$ в виде $\psi(r,t) = rF(\xi)$, $\xi = t/r$, $0 \leqslant \xi < \infty$, то начальные условия примут вид $F(0) = 0$, $F'(0) = I$.

Дифференциальное уравнение (6) при $p = 0$ имеет вид

$$r\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{\omega^2}{r}\,\psi(r,t) = 0$$

или $F''(\xi) + \omega^2 F(\xi) = 0$. Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$F(\xi) = (I/\omega)\sin\omega\xi. \tag{32}$$

Если скорость недостаточно высока, то труба находится в упругом состоянии.

Пусть в момент $t = t_0$ на внутренней поверхности трубы появляются пластические деформации. Соответствующее минимальное значение I обозначим через I_0. Тогда

$$F_0 = F(\xi_0) = \sin^2\alpha/(2\mu\cos\alpha), \tag{33}$$

следовательно,

$$\sin\omega\xi_0 = \omega\sin^2\alpha/(2\mu I\cos\alpha).$$

Принимая $\sin\omega\xi_0 = 1$, находим

$$I_0 = \frac{k\omega_0(\alpha)}{\sqrt{2G\rho g(\alpha)}}\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}, \qquad t_0 = \frac{\pi r}{2}\sqrt{\frac{\rho g(\alpha)}{2G}}\,\frac{1}{\omega_0(\alpha)}.$$

Для этих значений I_0 и t_0 имеем $F'(\xi_*) = 0$ и $\tau_{r\theta} = 0$.

2.2. *Упругопластическое состояние.* Если приложенная скорость J больше $I_0/\sin\alpha$ (при $I > I_0$), то распространяется пластическая зона. Компоненты напряжений можно найти, используя (29) и (30), полагая в них $p = 0$: в пластической зоне

$$\sigma_\theta = 2k\ln\frac{\sin\theta}{\sin\alpha} - \frac{2k}{g(\alpha)}\,\ln\frac{\operatorname{tg}(\theta/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)}\,\Omega(F), \qquad \alpha \leqslant \theta \leqslant \theta_*, \tag{34}$$

в упругой

$$\sigma_\theta = -2G\omega_0(\theta)F(\xi) + 2k(g(\theta)/g(\alpha))\Omega(F), \qquad \theta_* \leqslant \theta \leqslant \beta. \tag{35}$$

Выражение для σ_φ то же, что и в п. **1**.

Функция $F(\xi)$ определяется из дифференциального уравнения $F'' + \nu\Omega(F) = 0$, следующего из (22) при $p = 0$, с начальными условиями (28) и (33).

Подставляя в (25) $p = 0$, находим

$$\phi^2(F) = \phi^2(F_0) - 2\nu \int\limits_{F_0}^{F} \Omega(x)\,dx. \tag{36}$$

Отсюда получим

$$\frac{t - t_0}{r} = \int\limits_{F_0}^{F} \Big(\phi^2(F_0) - 2\nu \int\limits_{F_0}^{x} \Omega(x)\,dx\Big)^{-1/2} dx.$$

Для определения минимального значения интенсивности импульса I_*, при котором труба переходит в чисто пластическое состояние, полагая $F'(\xi_*) = 0$, из (36) имеем

$$\phi^2(F_0) = \frac{4k}{\rho g(\alpha)} \int\limits_{F_0}^{F_*} \Omega(x)\,dx, \qquad F_* = \frac{1}{2\mu}\,\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}, \tag{37}$$

из (32) находим

$$F'(\xi_0) = I_* \cos\omega\xi_0. \tag{38}$$

Подставляя в (32) $\xi = \xi_0$ и исключая из полученного уравнения и (38) ξ_0, имеем $I_* = \sqrt{F_0'^2 + \omega^2 F_0^2}$. Подставляя значения F_0 из (33) и F_0' из (38), находим предельное значение I:

$$I_* = \frac{k}{\sqrt{2G\rho g(\alpha)}} \Big(\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}\,\omega_0^2(\alpha) + 8\mu \int\limits_{F_0}^{F_*} \Omega(x)\,dx\Big)^{1/2}.$$

Отметим, что I_* является точным предельным значением I, при котором $F'(\xi_*) = 0$, т. е. $\tau_{r\theta} = 0$.

2.3. *Инерционное расширение.* При $I > I_*$ труба совершает инерционное расширение. Принимая в (21) $p = 0$ и удовлетворяя граничному условию на внешней поверхности $\sigma_\theta = 0$ при $\theta = \beta$, находим закон пластического расширения

$$F''(\xi) = -2k \ln(\sin\beta/\sin\alpha)/(\rho g(\alpha)). \tag{39}$$

Подставляя (39) в формулу (21) при $p = 0$, имеем

$$\frac{\sigma_\theta}{2k} = \ln\frac{\sin\theta}{\sin\alpha} - \frac{1}{g(\alpha)}\,\ln\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\,\ln\frac{\operatorname{tg}(\theta/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)}, \qquad \sigma_\varphi = \sigma_\theta + 2k.$$

2.4. *Разгрузка.* Пусть в момент $t = t_{**}$ скорость расширения равна нулю и пластическая деформация сменяется упругой разгрузкой. Имеем

$$F'(\xi_{**}) = 0, \qquad \xi_{**} = t_{**}/r. \tag{40}$$

Интегрируя (39) и используя условие (40), получим

$$F(\xi) = F_{**} - \frac{k}{\rho}\,\frac{\ln(\sin\beta/\sin\alpha)}{g(\alpha)}\,(\xi - \xi_{**})^2.$$

Здесь F_{**} — значение F при $t = t_{**}$.

Закон упругой разгрузки имеет вид

$$\sigma_\theta - \sigma_\varphi - (\sigma_\theta^{**} - \sigma_\varphi^{**}) = 2G[\varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi - (\varepsilon_\theta^{**} - \varepsilon_\varphi^{**})], \tag{41}$$

где двумя звездочками обозначены напряжения и деформации, соответствующие окончанию пластического расширения. Таким образом, в начале разгрузки имеем

$$\sigma_\theta^{**} - \sigma_\varphi^{**} = -2k, \qquad \varepsilon_\theta^{**} - \varepsilon_\varphi^{**} = -2F_{**}\cos\theta/\sin^2\theta.$$

Вводя функцию $\psi(r,t) = rF(\xi)$, находим

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi = -2F(\xi)\cos\theta/\sin^2\theta \qquad \text{при} \quad t > t_{**}.$$

Из (41) имеем

$$\sigma_\varphi - \sigma_\theta = 2k + 4G(F(\xi) - F_{**})\cos\theta/\sin^2\theta. \tag{42}$$

Тогда, интегрируя уравнение движения и используя условие на поверхности $\theta = \alpha$, получим

$$\sigma_\theta = 2k\ln\frac{\sin\theta}{\sin\alpha} + 2G\Big(\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \ln\frac{\operatorname{tg}(\theta/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)}\Big)(F(\xi) - F_{**}) + \rho\ln\frac{\operatorname{tg}(\theta/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)}\,F''(\xi). \tag{43}$$

Граничное условие на внешней поверхности $\sigma_\theta = 0$ при $\theta = \beta$ дает уравнение движения трубы при разгрузке

$$F''(\xi) + \omega^2(F(\xi) - F_{**}) + 2k\ln(\sin\beta/\sin\alpha)/(\rho g(\alpha)) = 0.$$

Отсюда следует

$$F(\xi) = F_{**} - 2k\ln(\sin\beta/\sin\alpha)(1 - \cos\omega(\xi - \xi_{**}))/(\rho g(\alpha)\omega^2). \tag{44}$$

Подставляя (44) в (42) и (43), находим

$$\frac{\sigma_\varphi}{2k} = \frac{\sigma_\theta}{2k} + 1 - \frac{2}{\omega_0^2(\alpha)}\,\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\ln\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\Big(1 - \cos\frac{\omega}{r}(t - t_{**})\Big), \tag{45}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_\theta}{2k} &= \ln\frac{\sin\theta}{\sin\alpha} - \frac{1}{g(\alpha)}\,\ln\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\,\ln\frac{\operatorname{tg}(\theta/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)} + \\ &+ \frac{1}{\omega_0^2(\alpha)}\,\ln\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\Big[\Big(1 + \frac{\omega_0^2(\alpha)}{g(\alpha)}\Big)\ln\frac{\operatorname{tg}(\theta/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)} - \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\Big]\Big(1 - \cos\frac{\omega}{r}\,(t - t_{**})\Big).\end{aligned} \tag{46}$$

Таким образом, при разгрузке при $t > t_{**}$ труба совершает гармонические колебания с переменной частотой ω/r при наличии остаточных напряжений и деформации. Этап разгрузки заканчивается в момент $t = t_{***}$, когда может возникнуть обратная пластическая деформация, при которой имеет место условие

$$\sigma_\theta - \sigma_\varphi = 2k. \tag{47}$$

Используя (47), из (42) и (44) легко определить время разгрузки

$$(t_{***} - t_{**})/r = (2/\omega)\arcsin\big(\omega_0\sin\alpha/\sqrt{2\cos\alpha\ln(\sin\beta/\sin\alpha)}\,\big).$$

Напряжения σ_θ и σ_φ во время разгрузки определяются согласно формулам (45), (46). Численным анализом можно обнаружить появление вторичной пластичности в конической трубе при заданных механических параметрах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А.** Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961.

2. **Агабабян Е. Х.** Напряжения в трубе при внезапном приложении нагрузки // Укр. мат. журн. 1953. Т. 5, № 3. С. 325–332.
3. **Ивлев Д. Д.** Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
4. **Соколовский В.В.** Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969.
5. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию 8/XII 2000 г.,
в окончательном варианте — 13/VII 2001 г.