РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
2005, том 41, № 5

УДК 681.2.08

Ю. В. Бондаренко
(Новосибирск)

ФИЛЬТРАЦИЯ ШУМА ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА ПО НЕРАВНОМЕРНЫМ ОТСЧЕТАМ В УСЛОВИЯХ ПЕРЕДИСКРЕТИЗАЦИИ *

На основе компьютерного моделирования дана оценка погрешности восстановления сигнала с конечным числом степеней свободы по его периодически неравномерным отсчетам в присутствии некоррелированных аддитивных амплитудных шумов. Приведены результаты сравнения коэффициентов усиления шума в зависимости от степени неравномерности отсчетов при восстановлении сигнала методом фильтрации и методом наименьших квадратов в условиях передискретизации.

Введение. Данная работа является продолжением исследований, связанных с вопросами точности восстановления периодического сигнала по неравномерным отсчетам [1, 2].

В работе [2] с помощью компьютерного моделирования показано, что передискретизация является мощным средством уменьшения шума для процедур восстановления сигнала с конечным числом степеней свободы по неравномерным отсчетам методом наименьших квадратов (МНК) и методом разбиения последовательности исходных неравномерных отсчетов на подпоследовательности с последующим восстановлением сигнала по этим подпоследовательностям и усреднением результатов. Были получены оценки коэффициента усиления шума для этих двух способов восстановления сигнала. Под коэффициентом усиления шума подразумевалось отношение средней дисперсии погрешности восстановленных отсчетов к дисперсии шума исходных отсчетов.

Возможен еще один метод использования передискретизации, который заключается в восстановлении сигнала по всей совокупности неравномерных отсчетов с применением весовых функций и его последующей фильтрации с помощью идеального фильтра нижних частот. В отличие от МНК такой метод не требует обращения матриц высокого порядка, что может оказаться существенным при работе с большими массивами данных. Изменение шума при такой процедуре восстановления сигнала и является предметом данного

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00913) и Президиума РАН (программа 2.13/2005).

исследования. Представляет интерес оценка эффективности этого метода и его сравнение с вышеупомянутыми. Моделирование проводилось с использованием системы MatLab.

Метод восстановления сигнала и исходные допущения. Суть этого метода заключается в том, что непрерывный сигнал $f(t)$ с конечным числом степеней свободы восстанавливается по всей совокупности M неравномерных отсчетов $f(t_r)$ при помощи весовых функций $w_r(t-t_r)$:

$$f(t)=\sum_{r=1}^{M} f(t_r)\,w_r(t-t_r), \tag{1}$$

где

$$w_r(t-t_r)=C_r\prod_{\substack{k=1\\ k\neq r}}^{M}\frac{\sin\frac{\pi}{M\Delta}(t-t_k)}{\sin\frac{\pi}{M\Delta}(t_r-t_k)}, \tag{2}$$

$$C_r=\begin{cases}1 & \text{для нечетных } M;\\ \cos\frac{\pi}{M\Delta}(t-t_r) & \text{для четных } M.\end{cases}$$

Обычно (для упрощения) восстанавливаются только отсчеты в равномерные моменты времени $t=m\Delta$ (здесь Δ – среднее значение интервала дискретизации; $m=1,\dots,M$). Далее сигнал $f(t)$ находится стандартным способом и его обработка осуществляется идеальным фильтром нижних частот.

Подчеркнем, что подобная процедура преобразования значений отсчетов $f(t_r)\rightarrow f(m\Delta)$ согласно формуле (1) является точной [3, 4]. Однако получение отсчетов сигнала всегда сопровождается наложением шума, обусловленного погрешностью задания исходных отсчетов. Как правило, шум каждого отсчета – случайная величина (независимая от шума других отсчетов). В результате при восстановлении непрерывного сигнала происходит и восстановление случайного процесса, отсчеты которого в моменты выборки являются значениями случайной величины шума.

Если для восстановления использовать зашумленные отсчеты в равномерных точках, то дисперсия восстановленного непрерывного сигнала во всех точках (в том числе и в неравномерных) будет одной и той же. Следует подчеркнуть разницу в результатах восстановления сигнала при равномерной и неравномерной дискретизации. Характеристики непрерывных случайных процессов, восстановленных по равномерным и неравномерным зашумленным отсчетам, будут разными при одних и тех же параметрах шума. Таким образом, преобразование значений отсчетов сигнала из неравномерных позиций в равномерные, $f(t_r)\rightarrow f(m\Delta)$, и наоборот, $f(m\Delta)\rightarrow f(t_r)$, с точки зрения влияния шумов не инвариантно. Это можно увидеть и из формулы (2), так как весовые функции $w_r(t-t_r)$ при сближении точек отсчетов t_r и t_k становятся большими и незначительное изменение (шум) значений отсчетов $f(t_r)$ и $f(t_k)$ приводит к большим изменениям в восстановленном сигнале.

Далее анализ проводился при тех же допущениях, что и в работе [2]. Моменты неравномерных отсчетов задавались путем случайного равномерно распределенного некоррелированного смещения (миграции) отсчетов от равномерных позиций:

$$t_r \quad r \qquad {}_r, \quad r \quad 0,\ldots,M \quad 1. \tag{3}$$

Смещение отсчета t_r от равномерного положения описывалось выражением $_r$ (rand 0,5) , где rand – случайная величина в интервале [0; 1]; множитель характеризовал размах отклонения (параметр неравномерности) отсчетов. Так как получаемое значение смещения случайно, то осуществлялось усреднение по десяти реализациям случайного набора отсчетов при фиксированном .

Максимальное значение принималось равным 0,9, поскольку при 1 расстояние между некоторыми неравномерными отсчетами может стать бесконечно малым и погрешность восстановления при этом – бесконечно большой. При 1 возможно совпадение генерируемых моментов отсчета, но если контролировать минимальное расстояние между отсчетами и исключать подобные ситуации, то можно оценить ошибку восстановления и для больших неравномерностей.

Значения сигнала $f(t_r)$ заданы в M неравномерных точках в присутствии амплитудного шума (t_r). Этот шум предполагался аддитивным и некоррелированным, его среднее значение (по реализациям) в каждой точке $\overline{(t_r)}$ 0, дисперсия ^{2}, равная $\overline{(t_r)^2}$, постоянна и не зависит от r. Спектр входного сигнала неизвестен. Известно только, что сигнал имеет N степеней свободы ($M \quad N \quad p$, где $p \quad 1$ – коэффициент передискретизации).

Представим сигнал с шумом в виде $f(t) \quad f_0(t) \qquad (t)$. Восстановленные согласно (1) отсчеты сигнала с шумом будут иметь вид

$$f(t) \quad \overset{M}{\underset{r \quad 1}{}} (f_0(t_r) \qquad (t_r))\, w_r(t \quad t_r). \tag{4}$$

Фильтрацию восстановленного сигнала с шумом проведем с помощью идеального фильтра нижних частот, пропускающего полезный сигнал без искажений:

$$\tilde{f}(t) \quad \overset{M}{\underset{r \quad 1}{}} (f_0(t_r) \qquad (t_r))\, \tilde{w}_r(t \quad t_r). \tag{5}$$

(Символ «~» здесь и далее означает применение операции фильтрации.)

Таким образом, при восстановлении сигнала по передискретизированным отсчетам во временной области достаточно выполнить фильтрацию весовых функций $w_r(t \quad t_r)$, которые являются периодическими (период $T \quad M$).

Для оценки погрешности восстановления значений сигнала в равномерных точках рассмотрим процедуру фильтрации шума отдельно, так как линейность соотношения (5) позволяет сделать это:

$$\tilde{}(t) \quad \overset{M}{\underset{r \quad 1}{}} (t_r)\, \tilde{w}_r(t \quad t_r).$$

В равномерных точках

$$\tilde{}(k\ ) \quad {}_{r\ 1}^{M} \quad (t_r)\tilde{w}_r(k \qquad t_r), \qquad k \quad 1,\ldots,M. \tag{6}$$

Как показано в [1], в отсутствие передискретизации среднеквадратическая погрешность восстановления k-го равномерного отсчета, $\left\langle\ {}^{2}(k)\right\rangle$, определяется формулой

$$\left\langle\ {}^{2}(k)\right\rangle \qquad {}^{2} \quad {}_{r\ 1}^{M} (w_r(k \qquad t_r))^2,$$

где $\ ^2$ – дисперсия шума в исходных неравномерных точках. Для учета эффекта фильтрации достаточно в этой формуле заменить w_r на $\tilde{w}_r$:

$$\left\langle \tilde{}\,{}^{2}(k)\right\rangle \qquad {}^{2} \quad {}_{r\ 1}^{M} (\tilde{w}_r(k \qquad t_r))^2. \tag{7}$$

При переходе от соотношения $\ (t) \qquad {}_{r\ 1}^{M} \quad (t_r)\,w_r(t \quad t_r)$, записанного во временной области, в частотную область соответствующие гармоники спектров левой и правой части будут определяться формулой

$$S\ \ (k) \qquad {}_{r\ 1}^{M} \quad (t_r)\,S_{wr}(k), \tag{8}$$

где $S\ \ (k)$ и $S_{wr}(k)$ – амплитуды k-х гармоник спектра восстановленного в равномерных точках случайного процесса $\ (t)$ и спектра r-й весовой функции соответственно. Можно показать, что для случайного некоррелированного шума с нулевым средним они связаны соотношением

$$\left|S\ \ (k)\right|^2 \qquad \overline{\ \ (t_r)^2} \quad {}_{r\ 1}^{M} \left|S_{wr}(k)\right|^2 \qquad {}^{2} \quad {}_{r\ 1}^{M} \left|S_{wr}(k)\right|^2. \tag{9}$$

Фильтрация восстановленного сигнала с помощью идеального фильтра нижних частот убирает высокочастотные составляющие восстановленного шума, не изменяя параметров сигнала и низкочастотных составляющих шума.

Полученное выражение показывает, что спектральная плотность погрешности восстановления сигнала однозначно определяется спектральными плотностями весовых восстанавливающих функций, т. е. характером и степенью неравномерности исходных отсчетов.

Обсуждение результатов моделирования. При моделировании шум $\ (t_r)$ в каждой из исходных точек отсчетов задавался в виде случайной величины, равномерно распределенной в интервале [–1; +1]. При малых отклонениях моментов отсчетов от равномерных положений (1) усредненная по множеству реализаций спектральная плотность восстановленного случайного

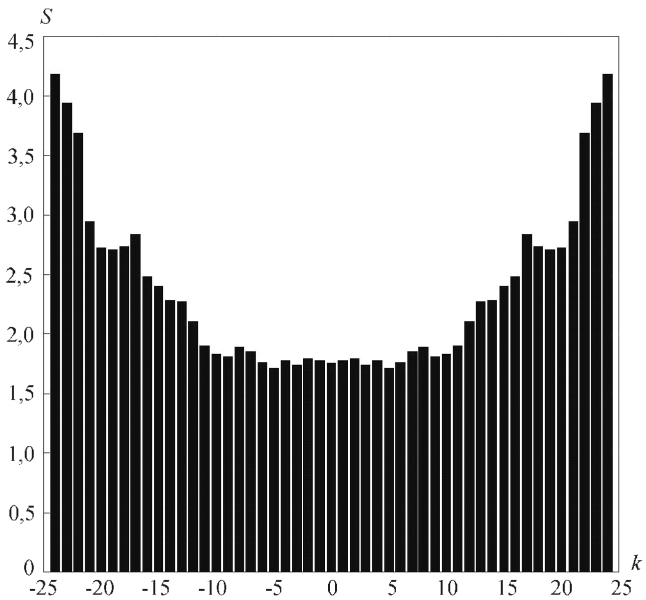

Рис. 1. Пример спектральной плотности восстановленного в равномерные моменты времени случайного процесса (для 0,9)

процесса (шума) равномерна. По мере увеличения случайным образом заданной неравномерности возрастают как высокочастотные, так и низкочастотные составляющие шума (хотя последние в меньшей степени). На рис. 1 показана усредненная по десяти случайным неравномерностям отсчетов спектральная плотность восстановленного в равномерные моменты времени случайного процесса при 0,9 (для каждого случая неравномерности проводилось также усреднение результатов по множеству реализаций (t_r)). Спектральная плотность шума в исходных неравномерных точках отсчетов предполагается постоянной и равной единице. Отметим, что, поскольку сигнал заранее неизвестен, для практических целей часто полезно хотя бы приблизительно оценить, как неравномерность отсчетов повлияет на погрешность восстановления, связанную с шумом исходных отсчетов. Такие результаты приведены в [2].

Рис. 2 иллюстрирует сравнение эффективности метода фильтрации и МНК при наличии передискретизации.

Подведем итоги нашего моделирования. Метод наименьших квадратов, как следует из его названия, оптимален в смысле восстановления низкочастотного сигнала, обеспечивающего минимум суммы квадратов отклонений от исходных передискретизированных отсчетов. Видно, что этот метод наиболее эффективно использует избыточные отсчеты для уменьшения влияния неравномерности дискретизации и случайного шума, наложенного на восстанавливаемый сигнал.

Сравнительно высокая эффективность рассмотренного в [2] метода разбиения последовательности исходных отсчетов на подпоследовательности объясняется уменьшением относительной неравномерности отсчетов при таком разбиении и усреднением результатов восстановления, поэтому средняя дисперсия шума значительно уменьшается. Однако его использование при нецелых значениях коэффициента передискретизации p затруднительно.

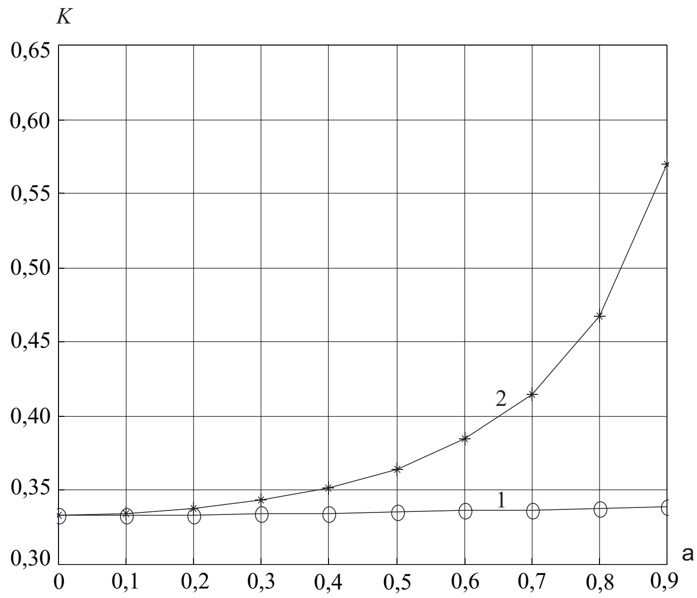

Рис. 2. Зависимость коэффициента усиления шума K от степени неравномерности при передискретизации (p 3): метод наименьших квадратов (кривая 1), метод фильтрации (кривая

Использование метода фильтрации при не очень большой степени неравномерности отсчетов 0,5) оправдано, так как средняя дисперсия погрешности восстановленных отсчетов, связанная с шумом исходных, уменьшается почти в p раз. Метод наименьших квадратов оказывается заметно эффективнее особенно при больших значениях . Однако метод фильтрации требует меньших вычислительных затрат, чем МНК, и может быть использован при обработке больших массивов данных.

ВЫВОДЫ

1. Для восстановления сигнала с конечным числом степеней свободы по его передискретизированным неравномерным отсчетам в присутствии аддитивного некоррелированного амплитудного шума возможен метод, основанный на восстановлении последовательности передискретизированных равномерных отсчетов посредством весовых функций и последующей фильтрации полученных отсчетов. Уступая МНК по эффективности, он требует меньших вычислительных затрат и может быть использован при обработке больших массивов данных.

2. Спектральная плотность погрешности восстановления равномерных отсчетов однозначно определяется спектральными плотностями весовых восстанавливающих функций, т. е. характером и степенью неравномерности отсчетов.

3. При восстановлении сигнала во временной области по его неравномерным отсчетам достаточно выполнять фильтрацию отсчетных весовых функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефимов В. М., Касперович А. Н., Резник А. Л. Восстановление сигнала с конечным числом степеней свободы при его неравномерной дискретизации // Автометрия. 2000. № 3. С. 26.
2. Bondarenko Yu. V., Efimov V. M., Kasperovich A. N., Reznik A. L. Signal reconstruction from a set of noisy nonuniform samples at oversampling (computer simulation) // Proc. of the IASTED Intern. Conf. “Automation, Control, and Information Technology”. Calgary: ACTA Press, 2002. P. 491.
3. Yen J. L. On nonuniform sampling of bandwidth-limited signal // IRE Trans. Circuit Theory. 1956. CT-3, N 4. P. 251.
4. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Методы теории целых функций в радиоразведке, связи и оптике. М.: ГИФМЛ, 1962.

Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: bjuv@iae.nsk.su

Поступила в редакцию
25 ноября 2004 г.