

УДК 539.375

РАЗРУШЕНИЕ ГОРЯЩЕГО ТВЕРДОГО ТОПЛИВА, ОСЛАБЛЕННОГО ТРЕЩИНОВИДНОЙ ПОЛОСТЬЮ

В. М. Мирсалимов, Б. Э. Рустамов

Азербайджанский технический университет, AZ1129 Баку, Азербайджан
E-mail: irakon63@hotmail.com

Рассматривается плоская стационарная задача механики разрушения для горящего деформируемого твердого топлива, ослабленного трещиновидной полостью, поверхность которой горит. Считается, что у трещиновидной полости имеются концевые зоны со связями между берегами, а на границе топливного заряда заданы смешанные граничные условия. Задача о равновесии топливного заряда, в котором имеется трещиновидная полость, сводится к решению системы нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядром типа ядра Коши. Из полученного решения найдены нормальные и касательные усилия в концевых зонах трещиновидной полости. Получены локальные условия, определяющие устойчивость (безопасность) режима горения твердого топлива.

Ключевые слова: топливный заряд, трещиновидная полость, концевые зоны полости, усилия в связях, разрушение.

1. Твердое топливо находит широкое применение в технике. При работе двигателей на твердом топливе иногда происходит выход на нерасчетный режим, что приводит к взрыву. Наиболее вероятная причина этого явления заключается в том, что в твердом топливе могут существовать недопустимо большие трещиноподобные полости, возникающие, как правило, при его изготовлении. В тот момент, когда фронт горения приближается к краю такой полости, вследствие высокого давления в камере сгорания горение быстро распространяется на всю трещиновидную полость. Вследствие затрудненного газоотвода (продуктов сгорания) локальное давление может резко возрастать, особенно в концевой зоне трещиновидной полости. Кроме того, вследствие специфичности структуры твердого топлива иногда возникает объемное горение, что в сочетании с аэроупругостью в концевой зоне полости может привести к прогарам или даже взрыву. Поэтому на стадии проектирования изделий из твердого топлива необходимо учитывать, что в нем могут возникнуть трещины, и проводить предельный анализ состояния горящего твердого топлива, чтобы установить, что предполагаемые исходные трещины, расположенные наиболее неблагоприятным образом, не будут расти до критических размеров и не вызовут разрушения в течение расчетного срока службы. Минимальный размер исходной трещины следует рассматривать в качестве проектной характеристики материала твердого топлива.

Исследуем напряженно-деформированное состояние твердого топлива, ослабленного трещиновидной полостью, поверхность которой горит. Считается, что все реагенты топлива равномерно распределены в твердой фазе, а продукты реакции сгорания газообразны. Если полость достаточно узкая и длинная, вследствие затрудненного газоотвода давление в ней может достигнуть очень большой величины, что обусловит выход системы на неустойчивый режим [1, 2]. Рассматриваются времена, малые по сравнению с характерным временем релаксации напряжений в твердом топливе и с характерным временем его нагревания вследствие теплопроводности. Исследуется квазистатический процесс деформирования изделия из твердого топлива, поперечное сечение которого в плоскости $x + iy$ представляет собой круг.

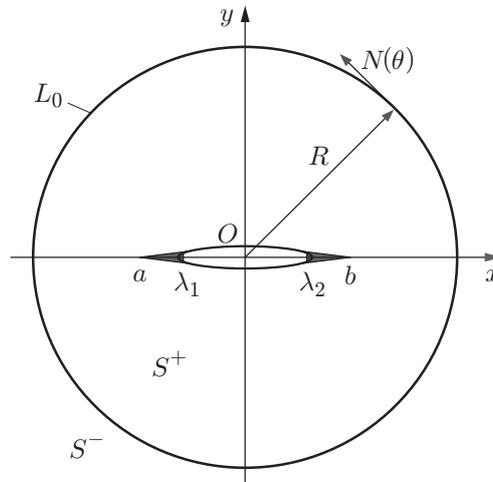


Рис. 1. Схема задачи механики разрушения горящего твердого топлива с трещиновидной полостью

Используется модель трещины со связями между берегами, получившая экспериментальное подтверждение [3–5] для композиционных материалов с полимерным связующим, когда адгезионная прочность меньше прочности полимеров. Обычно ракетное топливо состоит из кристаллических частиц, расположенных в полимерном связующем. Рассмотрим задачу механики разрушения для горящего твердого деформируемого топлива в случае, когда на его контуре заданы смешанные граничные условия. Отнесем сечение изделия из топлива к полярной системе координат (r, θ) , выбрав начало координат в центре окружности L_0 радиусом R .

Пусть на контуре твердого топлива, занимающего область в виде круга радиусом R , заданы только нормальное перемещение $u_r(\theta)$ и касательная составляющая поверхностной силы $N_\theta(\theta)$, а нормальное давление $N_r(\theta)$ должно быть определено в ходе решения задачи (рис. 1).

В плоском стационарном случае в пренебрежении эрозией уравнения течения газа в трещиновидной полости имеют вид [6]

$$p = C_0 \rho^\chi, \quad \frac{V_x^2}{2} + \frac{\chi}{\chi - 1} \frac{p}{\rho} = C_1, \quad \frac{d}{dx} (h \rho V_x) = \rho_s f(p),$$

$$h = h_0(x) + \int f(p) dp + v, \quad C_0 = p_0 \rho_0^{-\chi}, \quad C_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_s}{\rho_1} \right)^2 f^2(p_1) + \frac{\chi}{\chi - 1} \frac{p_1}{\rho_1}. \quad (1.1)$$

Здесь p_0, ρ_0 и p_1, ρ_1 — давление и плотность газа в камере сгорания при $x = 0$ и в концевой зоне трещиновидной полости соответственно; $h_0(x)$ — заданная начальная ширина полости; χ — показатель адиабаты; ρ_s — плотность твердой фазы; $f(p)$ — некоторая функция; V_x — скорость газа.

Рассматривается модель трещины с силами сцепления (связями), непрерывно распределенными в узкой концевой зоне и имеющими заданную диаграмму деформирования. Считается, что процесс разрушения локализован в концевой зоне, размер которой может быть сопоставим с размером полости, а связи образованы частицами в композиционном материале топлива. В исследуемом случае зону, в которой происходит процесс разрушения, можно рассматривать как некоторый слой (концевую зону), примыкающий к трещиновидной полости и содержащий материал с частично нарушенными связями между его структурными элементами.

Выделим участки трещины d_1 и d_2 (концевые зоны), на которых ее берега взаимодействуют. Такое взаимодействие моделируется путем введения между берегами трещины связей (сил сцепления) с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размеры концевых зон зависят от свойств материала. Концевые зоны малы по сравнению с остальной частью заряда твердого топлива, поэтому их можно мысленно удалить, заменив разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. По мере нагружения твердого топлива в связях, соединяющих берега трещины, будут возникать нормальные $q_y(x)$ и касательные $q_{xy}(x)$ усилия. Эти напряжения заранее неизвестны и должны быть определены в процессе решения задачи.

Граничные условия задачи на берегах трещиновидной полости с концевыми зонами имеют вид

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \begin{cases} -p, & y = 0, \quad \lambda_1 < x < \lambda_2, \\ q_y - iq_{xy}, & y = 0, \quad a \leq x \leq \lambda_1, \quad \lambda_2 \leq x \leq b. \end{cases}$$

Рассматриваемую область, заключенную между окружностью L_0 радиусом R и одним прямолинейным разрезом $L_1 = [a, b]$, обозначим через S^+ , а область, дополняющую область S^+ до полной комплексной плоскости, — через S^- .

С учетом сделанных предположений решение задачи сводится к определению двух функций комплексной переменной $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, аналитических в области S^+ и удовлетворяющих граничным условиям [7]

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\varkappa_0 \Phi(t) - \overline{\Phi(t)} + \frac{R^2}{t^2} [t \overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)}] \right) &= 2\mu u'_r(t) \quad \text{на } L_0, \\ \operatorname{Im} \left(\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} - \frac{t^2}{R^2} [t \overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)}] \right) &= -N_\theta(t) \quad \text{на } L_0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + x \overline{\Phi'(x)} + \overline{\Psi(x)} &= f(x), \\ f(x) &= \begin{cases} -p(x), & \lambda_1 < x < \lambda_2, \\ q_y - iq_{xy}, & a \leq x \leq \lambda_1, \quad \lambda_2 \leq x \leq b, \end{cases} \end{aligned}$$

$\varkappa_0 = 3 - 4\nu$; ν — коэффициент Пуассона материала топлива; μ — модуль сдвига.

Основные соотношения поставленной задачи должны быть дополнены уравнением, связывающим перемещения берегов в концевой зоне предразрушения и усилия в связях. Без потери общности это уравнение можно представить в виде [8, 9]

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) - i(u^+(x, 0) - u^-(x, 0)) = C(x, \sigma)(q_y - iq_{xy}), \tag{1.3}$$

где $C(x, \sigma)$ — эффективная податливость связей, зависящая от их натяжения; $\sigma = \sqrt{q_y^2 + q_{xy}^2}$ — модуль вектора усилий в связях.

В общем случае функции $u_r(t)$ и $N_\theta(t)$ на окружности L_0 представим в виде рядов Фурье

$$u_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_k \left(\frac{t}{R} \right)^k, \quad iN_\theta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_k \left(\frac{t}{R} \right)^k, \tag{1.4}$$

где V_k, T_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — известные комплексные коэффициенты.

2. Переходя в соотношениях (1.2) к сопряженным функциям, после некоторых преобразований получим граничные условия на контуре L_0 в виде

$$\begin{aligned} (\varkappa_0 - 1)[\Phi(t) + \overline{\Phi(t)}] + \frac{R^2}{t^2} [t \overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)}] + \frac{t^2}{R^2} \left(\frac{R^2}{t} \Phi'(t) + \Psi(t) \right) &= 4\mu u'_r(t) \quad \text{на } L_0, \\ -\frac{R^2}{t^2} [t \overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)}] + \frac{t^2}{R^2} \left(\frac{R^2}{t} \Phi'(t) + \Psi(t) \right) &= 2iN_\theta(t) \quad \text{на } L_0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

С учетом (2.1) на окружности L_0 выполняется соотношение

$$(\varkappa_0 - 1)[\Phi(t) + \overline{\Phi(t)}] + \frac{2t^2}{R^2} \left(\frac{R^2}{t} \Phi'(t) + \Psi(t) \right) = 2[2\mu u'_r(t) + iN_\theta(t)].$$

Подставляя в это соотношение функции $u_r(t)$ и $N_\theta(t)$ в виде рядов Фурье (1.4), получаем

$$\begin{aligned} (\varkappa_0 - 1)[\Phi(t) + \overline{\Phi(t)}] + 2 \frac{t^2}{R^2} \left(\frac{R^2}{t} \Phi'(t) + \Psi(t) \right) &= \\ = 2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(T_k + \frac{2\mu(k+1)}{R} V_{k+1} \right) \left(\frac{t}{R} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(T_{-k} - \frac{2\mu(k-1)}{R} V_{-k+1} \right) \left(\frac{R}{t} \right)^k \right] &\quad \text{на } L_0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Следуя [10], введем неизвестную вспомогательную функцию $\omega(t) \in H$ в виде

$$2\omega(t) = (\varkappa_0 - 1)[\Phi(t) - \overline{\Phi(t)}] - \frac{2t^2}{R^2} \left(\frac{R^2}{t} \Phi'(t) + \Psi(t) \right) \quad \text{на } L_0. \quad (2.3)$$

Складывая (2.2) и (2.3), находим

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \frac{\omega(t)}{\varkappa_0 - 1} + \frac{1}{\varkappa_0 - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2\mu(k+1)}{R} V_{k+1} + T_k \right) \left(\frac{t}{R} \right)^k + \\ + \frac{1}{\varkappa_0 - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(T_{-k} - \frac{2\mu(k-1)}{R} V_{-k+1} \right) \left(\frac{R}{t} \right)^k \quad \text{на } L_0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.3), имеем

$$\Psi(t) = Q(t) + R_1(t) + R_2(t) \quad \text{на } L_0. \quad (2.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q(t) &= -\frac{R^2}{2t^2} [\omega(t) + \overline{\omega(t)}] - \frac{R^2}{(\varkappa_0 - 1)t} \omega'(t), \\ R_1(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{k-2}{\varkappa_0 - 1} \right) T_{k+2} - \frac{1}{2} \bar{T}_{-k-2} + \frac{\mu(k+1)}{R} V_{-k-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu(k+3)}{R} \left(1 - \frac{k-2}{\varkappa_0 - 1} \right) V_{k+3} \right] \left(\frac{t}{R} \right)^k, \\ R_2(t) &= -\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\mu(k-1)}{R} \bar{V}_{k-1} + \frac{1}{2} \bar{T}_{k-2} \right) \left(\frac{R}{t} \right)^k + \\ &\quad + \sum_{k=3}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{k-2}{\varkappa_0 - 1} \right) T_{-k+2} - \frac{\mu(k-3)}{R} \left(1 + \frac{k-2}{\varkappa_0 - 1} \right) V_{-k+3} \right] \left(\frac{R}{t} \right)^k + \\ &\quad + \left(\frac{\mu}{R} V_1 + \frac{1}{2} T_0 \right) \frac{R^2}{t^2} + \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\varkappa_0 - 1} \right) T_1 - \frac{1}{2} \bar{T}_{-1} - \frac{\mu}{(\varkappa_0 - 1)R} V_1 + \frac{2\mu}{R} V_2 \right] \frac{R}{t}. \end{aligned}$$

Из соотношений (2.4), (2.5) на основании теоремы об аналитическом продолжении и с учетом свойств интеграла типа интеграла Коши получаем

$$\Phi_*(z) = \begin{cases} \Phi(z) - \frac{1}{z_0 - 1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\omega(t)}{t - z} dt + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2\mu(k+1)}{R} V_{k+1} + T_k \right) \left(\frac{z}{R} \right)^k \right], & z \in S^+, \\ -\frac{1}{z_0 - 1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\omega(t)}{t - z} dt - \sum_{k=1}^{\infty} \left(T_{-k} - \frac{2\mu(k-1)}{R} V_{-k+1} \right) \left(\frac{R}{z} \right)^k \right], & z \in S^-, \end{cases}$$

$$\Psi_*(z) = \begin{cases} \Psi(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{Q(t)}{t - z} dt - R_1(z), & z \in S^+, \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{Q(t)}{t - z} dt + R_2(z), & z \in S^-. \end{cases} \quad (2.6)$$

В соотношениях (2.6) функции $\Phi_*(z)$ и $\Psi_*(z)$ являются аналитическими в разрезанной вдоль прямолинейного отрезка $L_1 = [a, b]$ (трещиновидная полость с концевыми зонами) полной комплексной плоскости и исчезают на бесконечности.

Вспомогательную функцию $\omega(t) \in H$ на L_0 будем искать в виде ряда Фурье

$$\omega(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha_k \left(\frac{t}{R} \right)^k + \alpha_{-k} \left(\frac{R}{t} \right)^k \right], \quad (2.7)$$

где α_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — неизвестные комплексные коэффициенты.

Подставляя (2.7) в первые формулы систем (2.6) и используя интегральную теорему Коши, для искомым функций получаем следующие формулы:

$$\Phi(z) = \Phi_*(z) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \left(\frac{z}{R} \right)^k, \quad z \in S^+,$$

$$\Psi(z) = \Psi_*(z) + \sum_{k=0}^{\infty} D_k \left(\frac{z}{R} \right)^k, \quad z \in S^+. \quad (2.8)$$

Здесь

$$B_k = \frac{1}{z_0 - 1} \left(\alpha_k + T_k + \frac{2\mu(k+1)}{R} V_{k+1} \right),$$

$$D_k = -\left(\frac{1}{2} + \frac{k+2}{z_0 - 1} \right) \alpha_{k+2} - \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{-k-2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k+2}{z_0 - 1} \right) T_{k+2} -$$

$$- \frac{1}{2} \bar{T}_{-k-2} + \frac{\mu(k+3)}{R} \left(1 - \frac{k+2}{z_0 - 1} \right) V_{k+3} + \frac{\mu(k+1)}{R} \bar{V}_{-k-1}.$$

Для определения комплексных потенциалов $\Phi_*(z)$ и $\Psi_*(z)$, следуя [7], введем функции

$$\Omega_*(z) = \bar{\Phi}_*(z) + z\bar{\Phi}'_*(z) + \bar{\Psi}_*(z), \quad \Omega(z) = \bar{\Phi}(z) + z\bar{\Phi}'(z) + \bar{\Psi}(z).$$

Из комплексного представления компонент тензора напряжений находим

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}. \quad (2.9)$$

Учитывая, что по условию задачи на верхнем и нижнем берегах трещиновидной полости с концевыми зонами имеют место одни и те же граничные условия, из формулы (2.9) при $z \rightarrow t$ (t — аффикс точек берегов полости с концевыми зонами) получаем

$$\begin{aligned}\Phi^+(t) + \bar{\Phi}^-(t) + t\bar{\Phi}'^-(t) + \bar{\Psi}^-(t) &= f(t), \\ \Phi^-(t) + \bar{\Phi}^+(t) + t\bar{\Phi}'^+(t) + \bar{\Psi}^+(t) &= f(t).\end{aligned}$$

Подставляя в эти соотношения (2.8), находим

$$\begin{aligned}\Phi_*^+(t) + \bar{\Phi}_*^-(t) + t\bar{\Phi}_*'^-(t) + \bar{\Psi}_*^-(t) &= f_*(t), \\ \Phi_*^-(t) + \bar{\Phi}_*^+(t) + t\bar{\Phi}_*'^+(t) + \bar{\Psi}_*^+(t) &= f_*(t).\end{aligned}\tag{2.10}$$

Для функции $\Psi_*(z)$ имеет место следующее выражение: $\Psi_*(z) = \bar{\Omega}_*(z) - \Phi_*(z) - z\Phi_*'(z)$. Подставляя это выражение в граничные условия (2.10), находим

$$\Phi_*^+(t) + \Omega_*^-(t) = f_*(t), \quad \Phi_*^-(t) + \Omega_*^+(t) = f_*(t).$$

Для определения аналитических функций $\Phi_*(z)$ и $\Psi_*(z)$ имеем задачу линейного сопряжения граничных значений [7]

$$\begin{aligned}[\Phi_*(x) + \Omega_*(x)]^+ + [\Phi_*(x) + \Omega_*(x)]^- &= 2f_*(x), \\ [\Phi_*(x) - \Omega_*(x)]^+ - [\Phi_*(x) - \Omega_*(x)]^- &= 0,\end{aligned}\tag{2.11}$$

где $f_*(x) = f_1(x) + f(x)$; $f_1(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} [B_k + (k+1)\bar{B}_k + \bar{D}_k] \left(\frac{x}{R}\right)^k$; $f(x) = -p(x)$ на берегах трещиновидной полости и $f(x) = q_y - iq_{xy}$ на берегах концевых зон.

Так как напряжения в твердом топливе ограничены, то решение краевой задачи (2.11) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Искомое решение задачи (2.11) записывается в виде

$$\Phi_*(z) = \Omega_*(z) = \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2\pi i} \int_a^b \frac{f_*(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)}(t-z)} dt.\tag{2.12}$$

С учетом поведения функции $\Phi_*(z)$ на бесконечности условие разрешимости краевой задачи имеет вид

$$\int_a^b \frac{f_*(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} dt = 0, \quad \int_a^b \frac{tf_*(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} dt = 0.\tag{2.13}$$

Из соотношений (2.13) вычисляются неизвестные параметры a и b , определяющие размеры концевых зон трещиновидной полости.

В соотношения (2.13) входят неизвестные напряжения в концевых зонах трещиновидной полости. Построим интегральное уравнение для определения неизвестных напряжений $q_y - iq_{xy}$. Условием, определяющим неизвестные напряжения в связях между берегами в концевых зонах трещиновидной полости, является дополнительное соотношение (1.3). В рассматриваемой задаче это дополнительное условие целесообразно записать для производной раскрытия берегов в концевых зонах трещиновидной полости. С использованием соотношения

$$2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u + iv) = \varkappa_0 \Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}$$

и граничных значений функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ на отрезке $y = 0, a \leq x \leq b$ получаем равенство

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{2\mu}{1 + \varkappa_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} (u^+ - u^-) + i \frac{\partial}{\partial x} (v^+ - v^-) \right). \quad (2.14)$$

Используя формулы Сохоцкого — Племеля [11], с учетом формулы (2.12) находим

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = -\frac{i\sqrt{(x-a)(b-x)}}{\pi} \int_a^b \frac{f_*(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}(t-x)} dt. \quad (2.15)$$

Подставляя выражение (2.15) в левую часть (2.14) и учитывая соотношение (1.3), после ряда преобразований получаем систему нелинейных интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $q_y(x)$ и $q_{xy}(x)$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \sqrt{(x-a)(b-x)} \left(\int_a^b \frac{q_y(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}(t-x)} dt + \int_a^b \frac{f_y(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}(t-x)} dt \right) = \\ = \frac{2\mu}{1 + \varkappa_0} \frac{d}{dx} (C(x, \sigma)q_y(x)), \\ -\frac{1}{\pi} \sqrt{(x-a)(b-x)} \left(\int_a^b \frac{q_{xy}(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}(t-x)} dt + \int_a^b \frac{f_{xy}(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}(t-x)} dt \right) = \\ = \frac{2\mu}{1 + \varkappa_0} \frac{d}{dx} (C(x, \sigma)q_{xy}(x)). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь $f_y(t) = \operatorname{Re} f_1(t) - p(t); f_{xy}(t) = \operatorname{Im} f_1(t)$.

3. Каждое из уравнений (2.16) представляет собой нелинейное интегродифференциальное уравнение с ядром Коши и может быть решено только численно. Для решения уравнений (2.16) можно использовать коллокационную схему с аппроксимацией неизвестных функций.

С учетом формул (2.4), (2.5), (2.7) и уравнений (2.16), (2.13), (1.1) из соотношений (2.8) можно получить решение задачи, если известны коэффициенты α_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Для того чтобы получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных α_k , соотношения (2.8) подставим в условие (2.2) с учетом (2.12) и разложений

$$\sqrt{(t-a)(t-b)} = t \sum_{r=0}^{\infty} M_r \left(\frac{R}{t} \right)^r, \quad \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = \sum_{r=0}^{\infty} M_r^* \left(\frac{R}{t} \right)^{r+1}.$$

Здесь

$$M_r = \sum_{j=0}^r C_{1/2}^j C_{1/2}^{r-j} \left(\frac{a}{R} \right)^j \left(\frac{b}{R} \right)^{r-j}, \quad M_r^* = R^{-1} \sum_{j=0}^r C_{1/2}^j C_{1/2}^{r-j} \left(\frac{a}{R} \right)^j \left(\frac{b}{R} \right)^{r-j}.$$

После ряда преобразований условие (2.2) сводится к виду

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(\frac{t}{R} \right)^m + \sum_{m=0}^{\infty} A_m^* \left(\frac{R}{t} \right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} U_m \left(\frac{t}{R} \right)^m + \sum_{m=0}^{\infty} U_m^* \left(\frac{R}{t} \right)^m. \quad (3.1)$$

(Вследствие громоздкости выражения для A_m, A_m^*, U_m, U_m^* ($m = 0, 1, 2, \dots$) в данной работе не приводятся.)

Сравнивая в обеих частях соотношения (3.1) коэффициенты с одинаковыми степенями t/R и R/t , получаем следующие бесконечные системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} A_0 + A_0^* &= U_0 + U_0^* \quad (m = 0), \\ A_m &= U_m \quad (m = 1, 2, \dots), \quad A_m^* = U_m^* \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Проведем алгебраизацию интегродифференциальных уравнений (2.16) с условиями (2.13). Сначала в интегральных уравнениях (2.16) и в условиях (2.13) все интервалы интегрирования приводятся к одному интервалу $[-1, 1]$. С помощью квадратурных формул [12, 13] все интегралы заменяются конечными суммами, а производные в правых частях уравнений (2.16) — конечно-разностными аппроксимациями. При этом учитываются граничные условия $q_y(a) = q_y(b) = 0$, $q_{xy}(a) = q_{xy}(b) = 0$ (что соответствует условиям $v^+(a, 0) - v^-(a, 0) = 0$, $v^+(b, 0) - v^-(b, 0) = 0$, $u^+(a, 0) - u^-(a, 0) = 0$, $u^+(b, 0) - u^-(b, 0) = 0$). В результате алгебраизации вместо каждого интегрального уравнения в (2.16) с соответствующими дополнительными условиями получаем $M_1 + 2$ алгебраических уравнения для определения напряжений в узловых точках, расположенных в концевых зонах трещиновидной полости, и размеров концевых зон:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M A_{mk}(q_{y,k} + f_{y,k}) &= \frac{1 + \varkappa_0}{4\mu} \frac{M}{b-a} [C(x_{m+1}, \sigma(x_{m+1}))q_{y,m+1} - C(x_{m-1}, \sigma(x_{m-1}))q_{y,m-1}] \\ &\quad (m = 1, 2, \dots, M_1), \\ \sum_{k=1}^M f_{*y}(\cos \theta_k) &= 0, \quad \sum_{k=1}^M \tau_k f_{*y}(\tau_k) = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M A_{mk}(q_{xy,k} + f_{xy,k}) &= \frac{(1 + \varkappa_0)M}{4\mu(b-a)} [C(x_{m+1}, \sigma(x_{m+1}))q_{xy,m+1} - C(x_{m-1}, \sigma(x_{m-1}))q_{xy,m-1}] \\ &\quad (m = 1, 2, \dots, M_1), \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^M f_{*xy}(\tau_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^M \tau_k f_{*xy}(\tau_k) = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} q_{y,k} &= q_y(\tau_k), \quad q_{xy,k} = q_{xy}(\tau_k), \quad f_{y,k} = f_y(\tau_k), \quad f_{xy,k} = f_{xy}(\tau_k), \\ x_{m+1} &= \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \eta_{m+1}, \quad \eta_m = \cos \theta_m, \quad \tau_k = \cos \theta_k, \\ \theta_m &= \frac{2m-1}{2M} \pi \quad (m = 1, 2, \dots, M), \quad A_{mk} = -\frac{1}{M} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m \mp \theta_k}{2}, \end{aligned}$$

в формуле для A_{mk} верхний знак берется в случае, когда число $|m - k|$ нечетное, а нижний — когда оно четное.

Совместное решение уравнений (1.1), (3.2), (3.3) позволяет при заданных характеристиках связей определить интенсивность давления $p(x)$ в полости, усилия в связях, размеры концевых зон. Как известно, одной из основных причин выхода работы двигателя на твердом топливе на нерасчетный режим является наличие в твердом топливе больших трещиновидных дефектов [1], что может привести к неустойчивому горению. Механизм

неустойчивости заключается в следующем. При определенных условиях скорость изменения линейных размеров полости в плане может оказаться больше скорости изменения ее ширины, что обусловлено локальным разрушением твердого топлива в концевой зоне полости вследствие концентрации напряжений и резкого увеличения скорости горения в концевой зоне из-за локального разрыхления материала и увеличения площади поверхности горения. Последнее вызвано локальной местной концентрацией деформаций. Оба физических механизма неустойчивости обусловлены локальной концентрацией деформации. Это позволяет при формулировке критерия предельного равновесия использовать критерий критического раскрытия трещины. Раскрытие трещиновидной полости в концевых зонах определяется по соотношениям

$$\begin{aligned}v^+(x, 0) - v^-(x, 0) &= C(x, \sigma)q_y(x), & a \leq x \leq \lambda_1, & \lambda_2 \leq x \leq b, \\u^+(x, 0) - u^-(x, 0) &= C(x, \sigma)q_{xy}(x).\end{aligned}$$

Условие критического раскрытия трещиновидной полости в концевой зоне имеет вид

$$\begin{aligned}C(\lambda_1, \sigma(\lambda_1))\sigma(\lambda_1) &= \delta_c \quad \text{при } x = \lambda_1, \\C(\lambda_2, \sigma(\lambda_2))\sigma(\lambda_2) &= \delta_c \quad \text{при } x = \lambda_2,\end{aligned}\tag{3.4}$$

где δ_c — характеристика твердого топлива, определяемая экспериментальным путем.

Достаточным условием локальной устойчивости режима горения твердого топлива является неравенство

$$C(x, \sigma(x))\sigma(x) < \delta_c, \quad a \leq x \leq \lambda_1, \quad \lambda_2 \leq x \leq b.\tag{3.5}$$

В тот момент, когда неравенство (3.5) нарушается вблизи одной из концевых зон трещиновидной полости, начинается локально-неустойчивый процесс горения с разрушением.

Для того чтобы получить численное решение, необходимо совместно решить систему уравнений (1.1), (3.2)–(3.4), с помощью которых можно определить a , b , $p(x)$, $q_y(x)$, $q_{xy}(x)$, $V_x(x)$, $v(x)$, $u(x)$, $h(x)$, $\rho(x)$. Указанную систему уравнений нетрудно свести к системе (3.3), из которой определяются величины $q_y(x)$, $q_{xy}(x)$, a , b , $p(x)$. Для получения численного решения уравнений (3.3) целесообразно применять следующий способ: функция $p(x)$ ищется в виде многочлена с неизвестными коэффициентами, а уравнение для $p(x)$ удовлетворяется приближенно в смысле наибольшей близости к нулю среднеквадратичной невязки.

Даже в частном случае линейно-упругих связей системы уравнений (3.3) оказываются нелинейными, поскольку размеры концевых зон трещиновидной полости неизвестны. Поэтому для решения полученных систем в случае линейных связей использовался метод последовательных приближений [13]. В каждом приближении алгебраическая система решалась численно методом Гаусса с выбором главного элемента. В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в концевых зонах использовался алгоритм, подобный методу упругих решений [14]. Расчет эффективной податливости аналогичен определению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [15]. Процесс последовательных приближений заканчивается, когда различие величин усилий вдоль концевой зоны, полученных на двух последовательных итерациях, не будет превышать 10^{-4} . Выполнен приближенный расчет в предположении, что

$$\begin{aligned}h_0(x) &= h_0 = \text{const}, & h_0 \gg v, & h_0 \gg h_c, \\f(p) &= A + Bp, & \int_0^{\lambda_2} p(x) dx &= \frac{1}{2} \lambda_2(p_1 + p_0).\end{aligned}$$

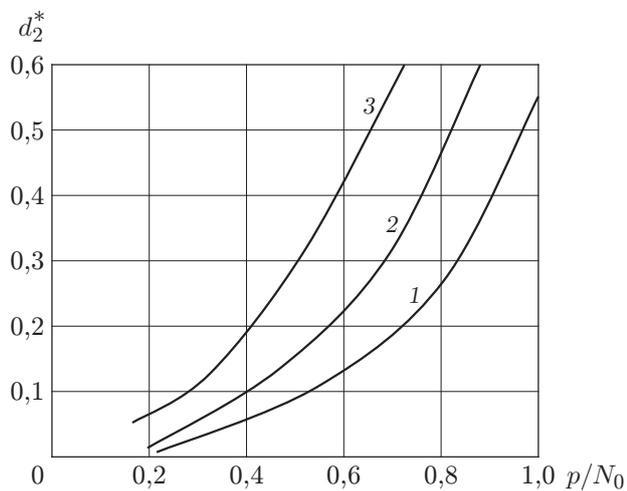


Рис. 2

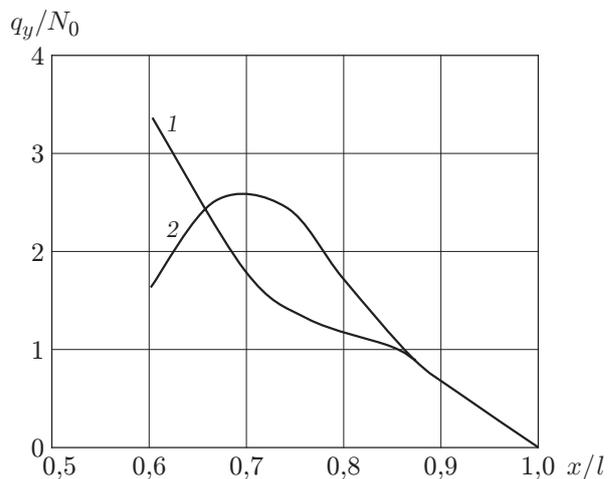


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость безразмерной длины правой концевой зоны d_2^* от безразмерной нагрузки p/N_0 при различных размерах трещиновидной полости:

1 — $l_* = 0,25$; 2 — $l_* = 0,50$; 3 — $l_* = 0,75$

Рис. 3. Распределение нормальных усилий q_y/N_0 в связях для правой концевой зоны трещиновидной полости:

1 — линейная зависимость, 2 — билинейная зависимость

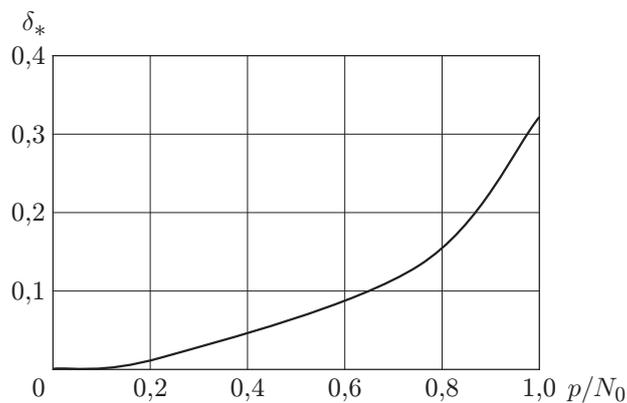


Рис. 4. Зависимость модуля безразмерного раскрытия δ_* от безразмерного параметра p/N_0 на правом конце трещины

Здесь A, B — эмпирические постоянные; для упрощения считалось, что на стенки полости действует постоянное давление $(p_1 + p_0)/2$. С учетом этих упрощений из уравнений системы (1.1) следует

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho_1^\chi} &= \frac{p_0}{\rho_0^\chi}, & \rho_1 V_{x_1} - \rho_0 V_{x_0} &= \frac{\rho_s}{h_0} \left(A\lambda_2 + \frac{1}{2} B\lambda_2(p_1 + p_0) \right), \\ V_{x_1} &= \frac{\rho_s}{\rho_0^2} (A + Bp_1), & \frac{V_{x_1}^2}{2} + \frac{\chi}{\chi - 1} \frac{p_1}{\rho_1} &= \frac{V_{x_0}^2}{2} + \frac{\chi}{\chi - 1} \frac{p_0}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из соотношений (3.6) определяются величины $p_1, \rho_1, V_{x_1}, V_{x_0}$. Затем численно решается алгебраическая система (3.2), (3.3). В расчетах полагалось $M = 30$, что соответствует разбиению интервала интегрирования на 30 чебышевских узлов. Следует отметить, что начиная с $M = 20$ значения искомым величин практически не меняются.

На рис. 2 приведена зависимость безразмерной длины правой концевой зоны $d_2^* = (b - \lambda_2)/(b - a)$ от безразмерной нагрузки p/N_0 при различных размерах трещиновидной полости $l_* = (\lambda_1 - \lambda_2)/(b - a)$.

На рис. 3 представлено распределение нормальных усилий q_y/N_0 в связях для правой концевой зоны трещиновидной полости.

На рис. 4 представлена зависимость модуля безразмерного раскрытия $\delta_* = \pi E\delta/(8N_0l)$ от безразмерного параметра p/N_0 на правом конце трещины.

Полученные основные разрешающие алгебраические уравнения (3.2), (3.3), (1.1) и условия устойчивости (безопасности) режима позволяют путем численного расчета для каждого вида топлива прогнозировать предельно допустимый размер трещиновидной полости (технологического дефекта).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соркин Р. Е.** Газодинамика ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, 1967.
2. **Черепанов Г. П.** О горении в узких полостях // ПМТФ. 1970. № 2. С. 90–95.
3. **Cornec A., Yuan H., Lin G.** Cohesive zone model for ductile fracture // GKSS Rep. 1994. N E73. P. 269–274.
4. **Сох В. N., Marshall D. B.** Concepts for bridged cracks fracture and fatigue // Acta Metall. Material. 1994. V. 42, N 2. P. 341–363.
5. **Needleman A.** An analysis of decohesion an imperfect interface // Intern. J. Fracture. 1990. V. 42, N 1. P. 21–40.
6. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
7. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
8. **Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н.** Рост трещин по границе соединения материалов // Проблемы механики: Сб. ст. к 90-летию со дня рожд. А. Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 221–238.
9. **Гаджиев В. Д., Мирсалимов В. М.** Предельно-равновесное состояние детали типа втулки контактной пары при наличии трещин со связями между берегами // Оптимальное проектирование механических систем. Баку: Элм, 1999. С. 50–63.
10. **Шерман Д. И.** Об одной задаче теории упругости // Докл. АН СССР. 1940. Т. 27, № 9. С. 907–910.
11. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

12. **Панасюк В. В.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. Киев: Наук. думка, 1976.
13. **Мирсалимов В. М.** Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987.
14. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
15. **Биргер И. А.** Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 51–73.

*Поступила в редакцию 19/II 2009 г.,
в окончательном варианте — 14/X 2009 г.*
