

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ИЗГИБ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

С. В. Левяков

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск
E-mail: stan-levyakov@yandex.ru

Предложен конечный элемент для анализа нелинейного деформирования и устойчивости пространственных стержней при больших упругих перемещениях. Для учета поперечного сдвига использована модель Тимошенко. На примере задач нелинейного изгиба криволинейных стержней исследованы точность и сходимость численных решений.

Ключевые слова: пространственный стержень, геометрическая нелинейность, поперечный сдвиг, конечный элемент.

Введение. Гибкие стержневые конструкции, допускающие большие перемещения и углы поворота при малых упругих деформациях, находят применение в различных областях техники. Исследованию механики гибких упругих стержней при пространственном деформировании посвящено большое количество публикаций начиная с работ Г. Р. Кирхгофа, А. Клебша и А. Лява. Различные варианты геометрически нелинейных соотношений теории пространственных стержней рассматривались в [1–3]. При решении задач нелинейной механики деформирования стержней с учетом поперечного сдвига даже в частном случае плоского изгиба возникают значительные математические трудности. Аналитические решения, выраженные через эллиптические интегралы, известны лишь для простейших случаев нагружения балок [4]. В [5, 6] на основе нелинейных уравнений с независимыми полями перемещений и поворотов построен численный алгоритм определения равновесных состояний стержней и арок при плоском изгибе. Успехи в решении задач нелинейной механики пространственных стержней обусловлены использованием методов дискретизации, среди которых основным является метод конечных элементов. Для преодоления трудностей, возникающих при описании кинематики элемента в случае конечных поворотов в трехмерном пространстве, используются общий и модифицированный подходы Лагранжа [7, 8], а также коротационный подход [9–11]. Известные конечно-элементные формулировки задачи приводят к весьма громоздким матричным соотношениям.

В настоящей работе предложена компактная формулировка конечного элемента пространственного стержня, основанная на теории кинематических групп [12, 13]. Под кинематической группой понимается совокупность радиус-векторов узловых точек и присоединенных векторов. Для описания изменения расстояний между узлами и углов между векторами группы вводится понятие деформаций, которые выражаются через скалярные произведения данных векторов. В [12] показано, что при преобразованиях векторов, соответствующих перемещениям и поворотам твердого тела, деформации группы обращаются

в нуль. Это важное свойство используется при построении конечных элементов: если удастся выразить деформации элемента континуума через дискретные деформации группы, то такой элемент будет автоматически удовлетворять необходимому критерию сходимости [14]. Для учета поперечных сдвигов применяются гипотезы Тимошенко. С этой целью при аппроксимации искривлений упругой оси стержня использованы точные аналитические решения задачи об изгибе балки Тимошенко с заданными углами поворота концевых сечений. Такой подход позволяет избежать эффекта сдвигового “запирания”, заключающегося в плохой обусловленности разрешающей системы уравнений и приводящего к потере точности решения при уменьшении размеров поперечного сечения стержня.

1. Основные допущения. Материал стержня считается изотропным и линейно-упругим. Деформации стержня малы по сравнению с единицей, при этом ограничения на величину перемещений и углов поворота не налагаются. В соответствии с гипотезой Тимошенко поперечные сечения, которые в исходном состоянии перпендикулярны осевой линии стержня, после деформации остаются плоскими, но необязательно нормальными к осевой линии. Начальная закрученность отсутствует.

При построении конечного элемента пространственного стержня используются обозначения [13].

2. Кинематическая группа стержня. Рассмотрим стержень, упругая ось которого проходит через центры тяжести поперечных сечений. Выберем на оси два узла с номерами 0 и 1 и в каждом из них определим два присоединенных вектора \mathbf{d}_{mi} ($i = 1, 2; m = 0, 1$), лежащих в плоскостях, перпендикулярных оси стержня.

Таким образом, кинематическую группу стержня образуют два узла с радиус-векторами $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1$ и четыре присоединенных вектора \mathbf{d}_{mp} :

$$\mathbf{R}_m = \mathbf{e}_i x_{mi}, \quad \mathbf{d}_{mp} = \mathbf{e}_i \lambda_{mpi} \quad (i = 1, 2, 3; \quad m = 0, 1; \quad p = 1, 2).$$

Здесь и далее \mathbf{e}_i — орты декартовой системы координат; λ_{mpi} — направляющие косинусы присоединенных векторов; по повторяющимся индексам (за исключением случаев, оговоренных особо) проводится суммирование. Исходное состояние группы характеризуется следующими метрическими тензорами, первый из которых является скаляром:

$$a_{11} = \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1, \quad b_{1mp} = \mathbf{r}_1 \mathbf{d}_{mp}, \quad c_{mpnq} = \mathbf{d}_{mp} \mathbf{d}_{nq} \quad (m, n = 0, 1; \quad p, q = 1, 2)$$

($\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0$). Аналогично для деформированного состояния имеем

$$a_{11}^* = \mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_1^*, \quad b_{1mp}^* = \mathbf{r}_1^* \mathbf{d}_{mp}^*, \quad c_{mpnq}^* = \mathbf{d}_{mp}^* \mathbf{d}_{nq}^* \quad (m, n = 0, 1; \quad p, q = 1, 2). \quad (2.1)$$

Здесь и далее символом “*” отмечены величины, соответствующие деформированному состоянию. Тензоры деформаций кинематической группы стержня определяются в виде

$$\varepsilon_{11} = (a_{11}^* - a_{11})/2, \quad \vartheta_{1mp} = (b_{1mp}^* - b_{1mp})/2, \quad \nu_{mpnq} = (c_{mpnq}^* - c_{mpnq})/2. \quad (2.2)$$

Пусть $\mathbf{d}_{mi} \mathbf{d}_{mj} = \mathbf{d}_{mi}^* \mathbf{d}_{mj}^* = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Тогда $c_{mpmq} = c_{mpmq}^* = \delta_{pq}$ и $\nu_{mpmq} = 0$ (по m суммирование не проводится). При перемещениях кинематической группы как твердого тела компоненты метрических тензоров (2.1) сохраняют исходные значения, и, следовательно, деформации (2.2) равны нулю.

С учетом условия единичности и ортонормальности присоединенных векторов их вариации определены соотношениями (по m суммирование не проводится)

$$\delta \mathbf{d}_{mp}^* = \delta \boldsymbol{\omega}_m \times \mathbf{d}_{mp}^*, \quad \delta^2 \mathbf{d}_{mp}^* = \delta \boldsymbol{\omega}_m \times (\delta \boldsymbol{\omega}_m \times \mathbf{d}_{mp}^*), \quad \delta \boldsymbol{\omega}_m = \mathbf{e}_i \delta \omega_{mi},$$

где $\delta \boldsymbol{\omega}_m$ — вариация узлового вектора поворота. Изменение состояния кинематической группы определяется вариациями векторов \mathbf{R}_m и \mathbf{d}_{mi} , которые образуют 12-компонентный вектор

$$\delta \mathbf{q}^T = \{\delta \mathbf{q}_0^T, \delta \mathbf{q}_1^T\}, \quad \delta \mathbf{q}_m^T = \{\delta x_{m1}^*, \delta x_{m2}^*, \delta x_{m3}^*, \delta \omega_{m1}, \delta \omega_{m2}, \delta \omega_{m3}\} \quad (m = 0, 1).$$

3. Энергия деформации элемента. Выражение для энергии деформации элемента длиной l имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l (EF\varepsilon^2 + EI_{ij}\varkappa_i\varkappa_j + GFk_i\Gamma_i + GJ\chi^2) ds \quad (i, j = 1, 2), \quad (3.1)$$

где E, G — модули упругости и сдвига соответственно; F — площадь поперечного сечения; $I_{ij} = \int_F \xi_i \xi_j dF$ — осевые моменты инерции; ξ_i — координаты в плоскости поперечного сечения; J — геометрическая жесткость при кручении; k_i — коэффициент неравномерности касательных напряжений, зависящий от формы поперечного сечения (например, для прямоугольного сечения $k_i = 5/6$); $\Gamma_i = \gamma_i^2$; γ_i — деформация поперечного сдвига; χ — угол закручивания на единицу длины стержня.

Выразим деформации криволинейного стержня через деформации кинематической группы. Если узлы 0 и 1 расположены достаточно близко, то элемент является пологим относительно секущей, проходящей через узлы. В этом случае длину дуги s можно отождествить с длиной отрезка на секущей. При этом выражения для осевой деформации и относительного угла закручивания имеют вид [13]

$$\varepsilon = \varepsilon_{11}/l^2, \quad \chi = \theta/l, \quad \theta = \nu_{1101} - \nu_{1201}. \quad (3.2)$$

Для определения искривлений и деформаций поперечного сдвига в двух плоскостях рассмотрим следующую задачу об изгибе балки Тимошенко при заданных углах поворота на ее концах (по i суммирование не проводится):

$$EI_{ii}\vartheta_i'' - k_iGF(\vartheta_i + w_i') = 0, \quad (\vartheta_i + w_i')' = 0; \quad (3.3)$$

$$\vartheta_i(0) = 2\vartheta_{101}/l, \quad w_i(0) = 0, \quad \vartheta_i(l) = 2\vartheta_{111}/l, \quad w_i(l) = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (3.4)$$

Здесь w_i — прогиб; ϑ_i — угол поворота поперечного сечения; штрих обозначает производную по координате s . Решение краевой задачи (3.3), (3.4) имеет вид (по i суммирование не проводится)

$$\varkappa_i = \vartheta_i' = 2[\vartheta_{11i} - \vartheta_{10i} + \eta_{i1}(\vartheta_{11i} + \vartheta_{10i})(2s/l - 1)]/l^2; \quad (3.5)$$

$$\gamma_i = \vartheta_i + w_i' = 2\eta_{i2}(\vartheta_{10i} + \vartheta_{11i})/l; \quad (3.6)$$

$$\vartheta_i = (s/l)(\vartheta_{11i} - \vartheta_{10i}) + (\eta_{i1}/l_i)(\vartheta_{11i} + \vartheta_{10i})(s^2/l - s) + \vartheta_{10i}; \quad (3.7)$$

$$w_i = (\gamma_i - \vartheta_{10i})s - (\vartheta_{11i} - \vartheta_{10i})s^2/(2l) - (\eta_{i1}/l)(\vartheta_{11i} + \vartheta_{10i})(s^3/(3l) - s^2/2), \quad (3.8)$$

где

$$\eta_{i1} = 3/(1 + \eta_{i3}), \quad \eta_{i2} = \eta_{i1}\eta_{i3}/6, \quad \eta_{i3} = 12EI_{ii}/(k_iGF l^2).$$

Выражения (3.5), (3.6) устанавливают связь между деформациями элемента и узловыми параметрами — деформациями кинематической группы. Заметим, что при уменьшении размеров поперечного сечения $\eta_{i3} \rightarrow 0$, $\eta_{i2} \rightarrow 0$, $\eta_{i1} \rightarrow 3$. В этом случае $\gamma_i \rightarrow 0$ и соотношения (3.5)–(3.8) переходят в известные соотношения для стержня, удовлетворяющего гипотезам Бернулли — Эйлера (см., например, [13]).

Подставляя (3.2), (3.5), (3.6) в (3.1) и вычисляя интегралы по длине элемента, получаем выражение для энергии деформации конечного элемента

$$\Pi = (1/2)\mathbf{u}^T K \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^T = \{\varepsilon_{11}, \vartheta_{101}, \vartheta_{102}, \vartheta_{111}, \vartheta_{112}, \theta\},$$

где K — симметричная матрица жесткости; \mathbf{u} — вектор обобщенных упругих перемеще-

ний. Выражения для отличных от нуля коэффициентов матрицы жесткости имеют вид

$$\begin{aligned} K_{11} &= EF/l^3, & K_{22} &= 4EI_{11}l^{-3}(1 + \eta_{11}^2/3 + 12\eta_{12}^2/\eta_{13}), & K_{23} &= 4EI_{12}l^{-3}(1 + \eta_{11}\eta_{21}/3), \\ K_{24} &= 4EI_{11}l^{-3}(-1 + \eta_{11}^2/3 + 12\eta_{12}^2/\eta_{13}), & K_{25} &= 4EI_{12}l^{-3}(-1 + \eta_{11}\eta_{21}/3), \\ K_{33} &= 4EI_{22}l^{-3}(1 + \eta_{21}^2/3 + 12\eta_{22}^2/\eta_{23}), & K_{34} &= 4EI_{12}l^{-3}(-1 + \eta_{11}\eta_{21}/3), \\ K_{35} &= 4EI_{22}l^{-3}(-1 + \eta_{21}^2/3 + 12\eta_{22}^2/\eta_{23}), & K_{44} &= K_{22}, & K_{45} &= K_{23}, \\ & & K_{55} &= K_{33}, & K_{66} &= GJ/l. \end{aligned}$$

4. Алгоритм решения. Для того чтобы построить итерационный метод определения деформированного состояния стержня, необходимо вычислить коэффициенты вариации энергии деформации. Первая и вторая вариации энергии конечного элемента стержня имеют вид

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \mathbf{g}^T \delta\mathbf{q}, & \delta^2\Pi &= \delta\mathbf{q}^T H \delta\mathbf{q}, \\ \mathbf{g} &= \mathbf{u}'\mathbf{P}, & \mathbf{P} &= K\mathbf{u}, & H &= \mathbf{u}'K(\mathbf{u}')^T + P_i\mathbf{u}_i'' \quad (i = 1, \dots, 6). \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{u}' — матрица размером 12×6 , содержащая коэффициенты первых вариаций компонент вектора \mathbf{u} ; \mathbf{u}_i'' — симметричные матрицы размером 12×12 , содержащие коэффициенты вторых вариаций компонент вектора \mathbf{u} ; \mathbf{g} , H — градиент и матрица Гессе конечного элемента соответственно.

Деформированное состояние определяется пошаговым методом контроля дуги [15]. На каждом шаге решение строится итерационным методом Ньютона — Рафсона по схеме

$$H^{p-1} \delta\mathbf{q}^p + \mathbf{g}^{p-1} + \mathbf{w}^{p-1} \delta\lambda^p = 0,$$

где \mathbf{g} , H — градиент и матрица Гессе ансамбля конечных элементов, которые формируются из градиентов и матриц Гессе отдельных конечных элементов по известным правилам [14]; $\delta\mathbf{q}^p$ — вектор поправок к обобщенным координатам; $\delta\lambda$ — поправка к параметру нагрузки; \mathbf{w} — вектор нагрузки; верхний индекс обозначает номер итерации. Формулы для суммирования поправок приведены в [13].

5. Примеры численных расчетов. С целью исследования точности и сходимости численного решения рассмотрим три тестовые задачи о нелинейном деформировании и устойчивости стержней с различными соотношениями геометрических параметров.

Задача 1. Консольный криволинейный стержень нагружен поперечной силой P , действующей в направлении оси z (рис. 1). Ось стержня представляет собой дугу окружности радиусом R с центральным углом α . Поперечное сечение бруса имеет форму квадрата, длина стороны которого равна a . В расчетах используются следующие данные работы [11]: $R = 2,54$ м, $a = 0,0254$ м, $\alpha = 45^\circ$, модуль упругости $E = 0,6895 \cdot 10^{11}$ Н/м², коэффициент Пуассона $\nu = 0$. При нелинейном деформировании стержень испытывает деформации растяжения и изгиба (в двух плоскостях) и кручение. Зависимости нагрузки от перемещения свободного конца, определенные при разбиении стержня на четыре и восемь элементов, представлены на рис. 2. Результаты, полученные с использованием восьми элементов, практически совпадают с решением [16].

Для того чтобы выполнить количественную оценку точности решения, полученного с использованием восьми элементов, проведем его сравнение с известными результатами [7, 11, 17, 18]. В табл. 1 приведены значения координат свободного конца бруса при различных значениях нагрузки. Для каждого значения нагрузки рассматриваемое решение получено за один шаг. При этом потребовалось 12, 14 и 15 итераций для значений нагрузки $P = 1334, 2002, 2669$ Н соответственно при выполнении следующего критерия сходимости

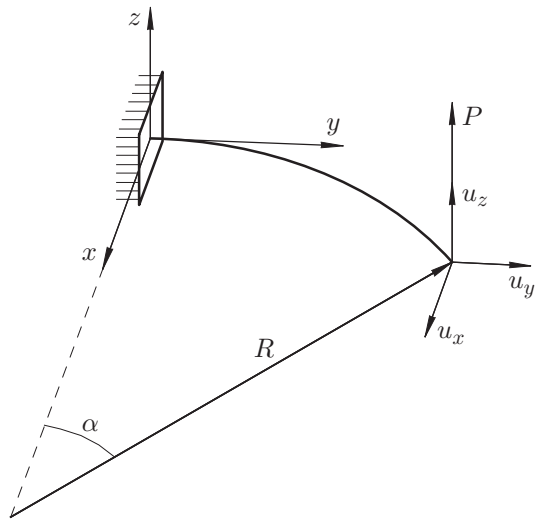


Рис. 1

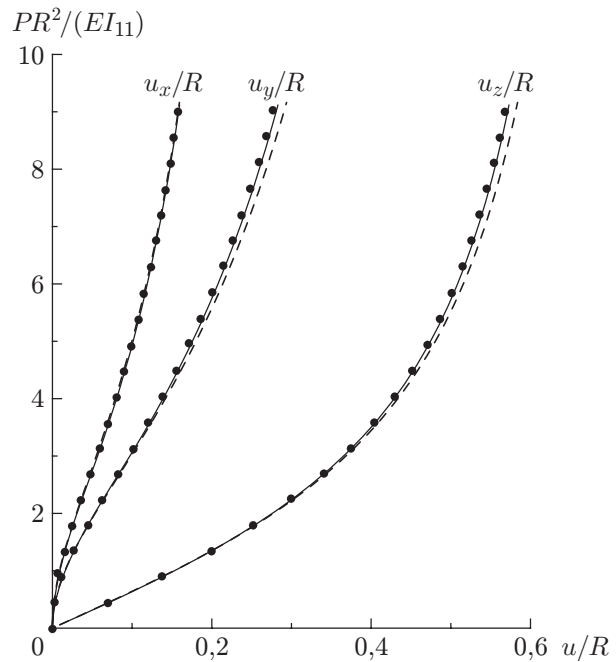


Рис. 2

Рис. 1. Криволинейный консольный стержень под действием поперечной силы

Рис. 2. Зависимость нагрузки от перемещений свободного конца криволинейного стержня:

штриховые линии — рассматриваемое решение, полученное с использованием четырех конечных элементов; сплошные линии — рассматриваемое решение, полученное с использованием восьми конечных элементов; точки — решение [16]

решения: максимально допустимая поправка к значениям координат не должна превышать 10^{-8} м. Из табл. 1 следует, что результаты расчетов согласуются с результатами численных решений [7, 11, 17, 18].

В рассматриваемом примере размеры поперечного сечения бруса малы по сравнению с его длиной, поэтому влияние деформации поперечного сдвига незначительно. Полученное решение хорошо согласуется с решениями, основанными на гипотезах Бернулли — Эйлера, что свидетельствует об отсутствии сдвигового “запирания”.

ЗАДАЧА 2. Рассмотрим классическую задачу о боковой потере устойчивости консольной балки длиной L . Балка нагружена консервативной поперечной силой P , приложенной на свободном конце и действующей в плоскости наибольшей жесткости балки. Поперечное сечение имеет форму прямоугольника с размерами $b \times h$, причем $b > h$. При дискретизации балки использовано 16 конечных элементов одинаковой длины.

В табл. 2 приведены критические значения параметра нагрузки $p_{cr} = P_{cr}L^2/(GJEI_{22})^{1/2}$ ($I_{22} = bh^3/12$), вычисленные при различных отношениях геометрических параметров L/b и b/h . Из табл. 2 следует, что с увеличением относительной толщины стенки b/h и с уменьшением относительной длины балки L/b параметр нагрузки p_{cr} увеличивается и существенно отличается от классического решения $p_{cr} = 4,0126$ [19]. Например, при $L/b = 5$ и $b/h = 10$ различие составляет 15 %. Очевидно, различие объясняется тем, что в классическом решении не учитываются докритическое искривление оси балки в плоскости наибольшей жесткости и влияние поперечного сдвига. Для выяснения роли этих факторов проведены расчеты с использованием нелинейной

Таблица 1

Координаты конца криволинейного консольного стержня при изгибе из плоскости кривизны

P, H	Координаты	Данные [7]	Данные [11]	Данные [17]	Данные [18]	Решение с помощью предлагаемого метода
1334	x/R	0,225	0,2216	0,2233	—	0,2217
	y/R	0,592	0,5853	0,5884	—	0,5846
	z/R	0,395	0,4053	0,4008	—	0,4061
2002	x/R	—	0,1843	0,1862	—	0,1841
	y/R	—	0,5193	0,5232	—	0,5181
	z/R	—	0,4879	0,4839	—	0,4892
2669	x/R	0,159	0,1561	0,1579	0,155 60	0,1559
	y/R	0,472	0,4684	0,4723	0,468 97	0,4665
	z/R	0,534	0,5371	0,5337	0,536 07	0,5388

Таблица 2

Критическая нагрузка при боковой потере устойчивости консольной балки

L/b	p_{cr}			
	$b/h = 5$	$b/h = 10$	$b/h = 20$	$b/h = 40$
5	4,26	4,600	4,24	4,08
10	4,27	4,280	4,09	4,04
20	4,27	4,140	4,05	4,03
40	4,27	4,084	4,04	4,03

конечно-элементной модели стержней [13], не учитывающей влияние поперечного сдвига. Установлено, что при $b/h = 5, 10, 20, 40$ $p_{cr} = 4,27; 4,08; 4,04; 4,03$ соответственно, причем параметр критической нагрузки не зависит от относительной длины L/b . Эти результаты хорошо согласуются с аналитическим решением [20, 21]

$$p_{cr} = 4,0126(1 + 0,5EI_{22}/(EI_{11}) + 0,8197GJ/(EI_{11})), \quad (5.1)$$

в котором учитывается докритическое искривление оси длинных балок в отсутствие деформаций поперечного сдвига. В результате расчета по формуле (5.1) при $b/h = 5, 10, 20, 40$ получены значения $p_{cr} = 4,27; 4,08; 4,03; 4,02$ соответственно. Следовательно, различие классического решения и результатов, представленных в табл. 2, обусловлено в основном деформацией поперечного сдвига.

Исследуем закритическое поведение балки с параметрами $L/b = 5$ и $b/h = 10$. На рис. 3 сплошной линией показана нелинейная зависимость параметра поперечной нагрузки от бокового перемещения свободного конца балки. Точки соответствуют решению, полученному с помощью конечно-элементного комплекса ANSYS (лицензия № 00435880). Балка моделировалась четырехугольными четырехузловыми элементами оболочки SHELL43 с использованием равномерной сетки размером 8×40 . Поперечная сила была приложена в среднем узле на свободном конце. Для перехода на ветвь закритических состояний использовано возмущение в виде малой боковой силы. Рассматриваемое стержневое решение достаточно точно описывает поведение балки на начальной стадии закритического деформирования. При значительных боковых прогибах ($u_y/L > 0,2$) в расчетах с использованием оболочечной модели получена более жесткая зависимость нагрузки от прогиба.

Задача 3. Исследуем нелинейное деформирование кругового кольца радиусом R , закручиваемого двумя моментами M вокруг диаметральной линии. Поперечное сечение кольца имеет форму прямоугольника с размерами $b \times h$. Данная задача изучалась в ра-

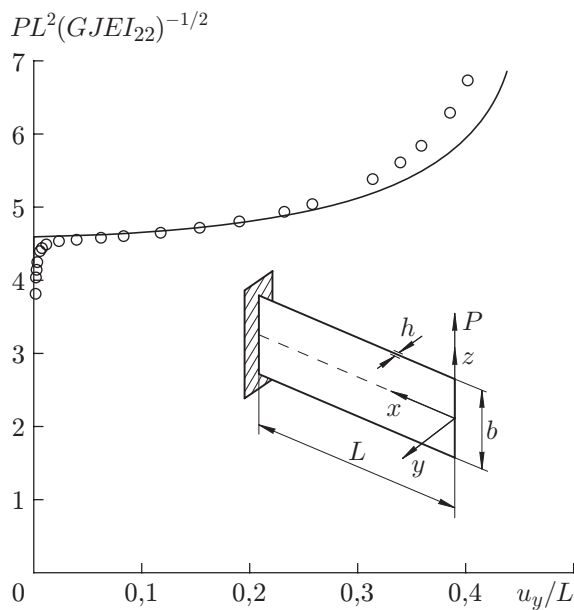


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость нагрузки от бокового прогиба при закритическом деформировании консольной балки и схема ее нагружения ($L/b = 5$, $b/h = 10$):

сплошная линия — рассматриваемое решение; точки — решение, полученное с использованием конечных элементов оболочки

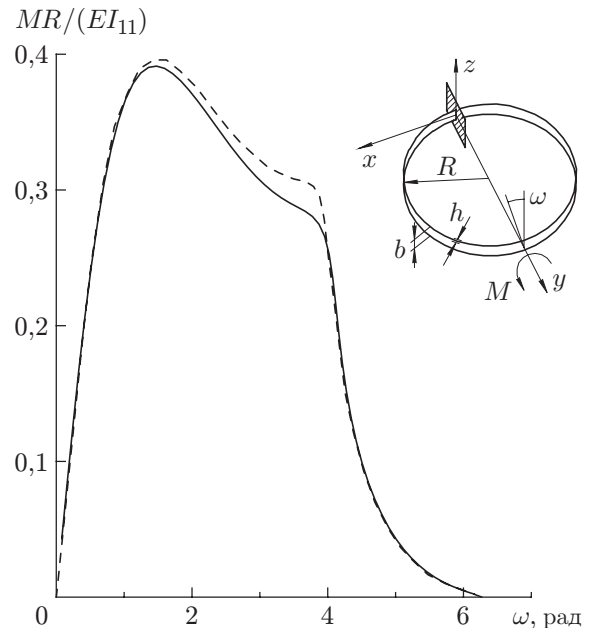


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость крутящего момента от угла поворота сечения кольца и схема его нагружения:

сплошная линия — рассматриваемое решение; штриховая — численное решение [22]

боте [22], в которой установлено, что при достижении предельного значения крутящего момента кольцо теряет устойчивость и в результате перескока сворачивается в кольцо радиусом $R/3$. При этом нагруженные сечения поворачиваются относительно друг друга на угол, равный 360° .

В расчетах рассматривалось полное кольцо, одно сечение которого жестко заделано, а к диаметрально противоположному сечению приложен крутящий момент относительно диаметральной линии. Для нагруженного сечения допустимы только радиальное перемещение и поворот вокруг оси внешнего момента. Допускается самопересечение кольца. Расчеты проведены для случая $R/b = 20$, $b/h = 3$, $\nu = 0,3$. Кольцо представлено в виде 40 конечных элементов одинаковой длины. На рис. 4 показана зависимость безразмерной нагрузки от угла поворота ω нагруженного сечения ($I_{11} = hb^3/12$ — наибольший момент инерции сечения). Сплошная линия соответствует результатам расчета по предложенной конечно-элементной модели, штриховая линия — численному решению [22]. Согласно расчетам по предложенной модели предельное значение крутящего момента составляет $M \approx 0,39EI_{11}/R$, при этом сечение, в котором приложен момент, поворачивается на угол, приблизительно равный $1,45$ рад (83°). В закритической области деформирования сравниваемые зависимости несколько различаются, что можно объяснить влиянием поперечного сдвига.

На рис. 5 представлены равновесные формы кольца при различных значениях угла поворота нагруженного сечения. Следует отметить, что при $\omega = 2\pi$ равновесное состояние получено при допущении о свободном самопересечении кольца. Такое состояние реализуется при бесконечно малых размерах поперечного сечения.

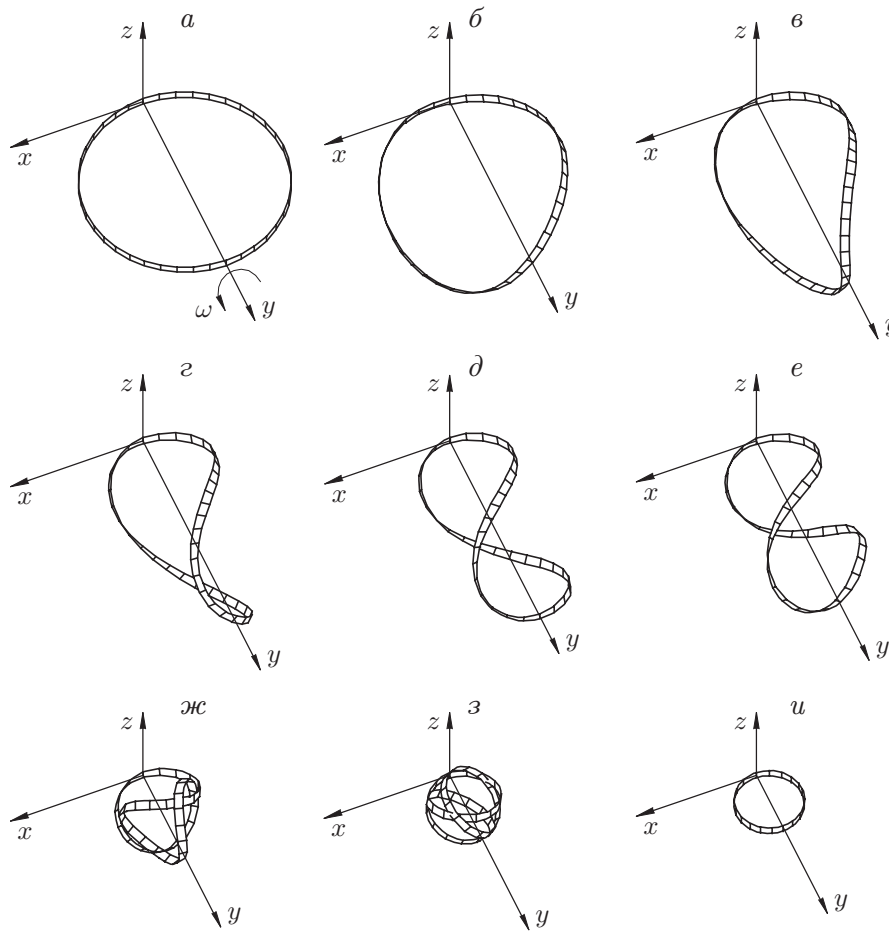


Рис. 5. Равновесные формы кольца при различных значениях угла поворота нагруженного сечения:

$a - \omega = 0$, $b - \omega = \pi/4$, $в - \omega = \pi/2$, $г - \omega = 3\pi/4$, $д - \omega = \pi$, $e - \omega = 5\pi/4$, $ж - \omega = 3\pi/2$, $з - \omega = 7\pi/4$, $u - \omega = 2\pi$

Заключение. Предложенная конечно-элементная модель может быть использована при исследовании геометрически нелинейного деформирования и устойчивости пространственных криволинейных стержней с учетом деформаций поперечного сдвига. Использование конечного элемента, построенного на основе точных решений для балки Тимошенко, позволяет избежать появления эффекта сдвигового “запирания” при уменьшении размеров поперечного сечения стержней. В предельном случае, когда деформации поперечного сдвига стремятся к нулю, с помощью предложенной модели получены решения, соответствующие теории Кирхгофа — Клебша. На примере тестовых задач показано, что при определенных соотношениях геометрических параметров учет поперечного сдвига оказывает существенное влияние на нелинейное деформирование и устойчивость стержней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
2. Светлицкий В. А. Механика стержней. М.: Высш. шк., 1987.
3. Antman S. S. Nonlinear problems of elasticity. Berlin: Springer, 1995.
4. Goto Y., Yoshimitsu T., Obata M. Elliptic integral solutions of plane elastica with axial and shear deformations // Intern. J. Solids Structures. 1990. V. 26, N 4. P. 375–390.

5. **Шкутин Л. И.** Численный анализ разветвленных форм изгиба стержней // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 141–147.
6. **Шкутин Л. И.** Численный анализ разветвленных форм изгиба арок // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 4. С. 155–160.
7. **Bathe K. J., Bolourchi S.** Large displacement analysis of three dimensional beam structures // Intern. J. Numer. Methods Engng. 1979. V. 14. P. 961–986.
8. **Pai P. F., Anderson T. J., Wheeler E. A.** Large-deformation tests and total-Lagrangian finite-element analyses of flexible beams // Intern. J. Solids Structures. 2000. V. 37, N 21. P. 2951–2980.
9. **Battini J.-M., Pacoste C.** Co-rotational beam elements with warping effects in instability problems // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2002. V. 191. P. 1755–1789.
10. **Hsiao K.-M., Horng H.-J., Chen Y.-R.** A corotational procedure that handles large rotations of spatial beam structures // Comput. Structures. 1987. V. 27, N 6. P. 769–781.
11. **Crisfield M. A.** A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 1990. V. 81. P. 131–150.
12. **Кузнецов В. В., Левяков С. В.** Кинематические группы и конечные элементы в механике деформируемого тела // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 3. С. 67–82.
13. **Кузнецов В. В., Левяков С. В.** Многозначные решения пространственных задач нелинейного деформирования тонких криволинейных стержней // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 141–149.
14. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
15. **Yang Y. B., Shieh M. S.** Solution method for nonlinear problems with multiple critical points // AIAA J. 1990. V. 28. P. 2110–2116.
16. **Dutta A., White D. W.** Large displacement formulation of a three-dimensional beam element with cross-sectional warping // Comput. Structures. 1992. V. 45, N 1. P. 9–24.
17. **Simo J. C., Vu-Quoc L.** A three-dimensional finite-strain rod model. Pt 2. Computational aspects // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 1986. V. 58. P. 79–116.
18. **Ibrahimbegovic A.** On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 1995. V. 122. P. 11–26.
19. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
20. **Hodges D. H., Peters D. A.** On the lateral buckling of uniform slender cantilever beams // Intern. J. Solids Structures. 1975. V. 11, N 12. P. 1269–1280.
21. **Reissner E.** Lateral buckling of beams // Comput. Structures. 1989. V. 33, N 5. P. 1289–1306.
22. **Pai P. F., Palazotto A. N.** Large-deformation analysis of flexible beams // Intern. J. Solids Structures. 1996. V. 33, N 9. P. 1335–1353.

*Поступила в редакцию 11/IV 2011 г.,
в окончательном варианте — 21/VII 2011 г.*
