

УДК 624.024:539.3+611.113/.16

## О РАЦИОНАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ КРОВЕНОСНЫХ СОСУДОВ

А. Е. Медведев, В. И. Самсонов, В. М. Фомин

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск  
E-mails: medvedev@itam.nsc.ru, visam@itam.nsc.ru, fomin@itam.nsc.ru

Рассмотрен вопрос об оптимальном (с точки зрения прочности) строении кровеносных сосудов живого организма. Показано, что угол укладки мышечных волокон в сосудах является оптимальным для прочности артерий.

Ключевые слова: кровеносные сосуды, армированные сосуды, оболочка, композит, вязкость-упругость, деформирование.

На основе многочисленных клинических исследований [1] кровеносные сосуды (артерии и артериолы) можно представить как многослойную оболочку. Известно, что гладкомышечные элементы в крупных кровеносных сосудах располагаются под углом  $\varphi = 30 \div 50^\circ$  по отношению к оси сосуда. Угол  $\varphi$  увеличивается по мере уменьшения диаметра кровеносного сосуда (рис. 1), т. е. по мере перехода вниз по кровеносному руслу от артерий к артериолам и далее к капиллярам. При этом в мелких кровеносных сосудах угол наклона гладкомышечных элементов приближается к  $90^\circ$ .

На рис. 2 представлена общая схема строения артерий и артериол. Они состоят из внутреннего слоя (*tunica interna*), среднего слоя (*tunica media*) и внешнего слоя (*tunica externa*). Внутренний слой состоит из эндотелия и внутренней эластической мембраны, а средний слой — из гладкомышечных клеток, некоторого количества фибропластов и коллагеновых волокон. Количество фибропластов и коллагеновых волокон варьируется в зависимости от типа артерий (эластического, мышечно-эластического и мышечного). В артериолах мало эластических волокон, но присутствуют прекапиллярные сфинктеры. В артериальной стенке плотность мышечных клеток зависит от того, насколько далеко артериола отстоит от предковой малой артерии. Внешний слой состоит из наружной эластической мембраны и рыхлой волокнистой соединительной ткани.

Рассмотрим подробнее средний слой кровеносного сосуда. Гладкомышечные клетки и волокна образуют эластомоторную спираль (см. [2]), которая располагается наклонно к оси сосуда. Угол между направлением намотки эластомоторной спирали и продольной осью

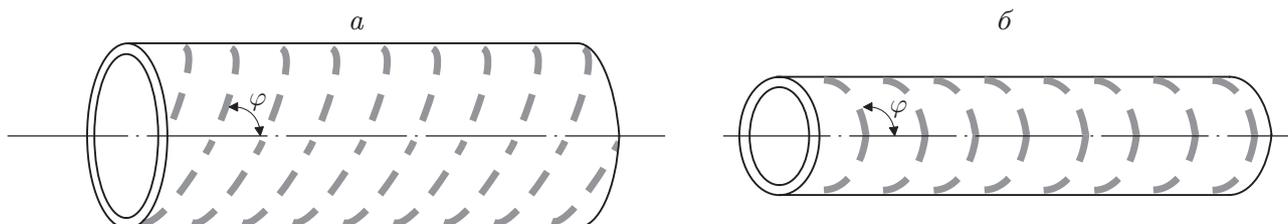


Рис. 1. Наклон гладкомышечных элементов в крупных (а) и мелких (б) кровеносных сосудах



Рис. 2. Строение артерии

сосуда составляет  $30 \div 50^\circ$  в крупных артериях, постепенно увеличиваясь с уменьшением размера сосуда. В мелких артериолах спиральное направление ближе к кольцевому [1–5]. С возрастом у человека количество слоев спиральной намотки мышечных волокон увеличивается с трех (в 12 лет) до шести (в 20 лет) [2].

Эластические свойства стенок сосудов имеют большое значение для пульсирующего движения крови. Упругое состояние артериальных стенок не является стабильным. Оно меняется рефлекторно за счет активности мышечных элементов, которые неодинаково распределены в различных участках артериальной системы. В зависимости от изменения потребностей организма (уровня кровообращения) меняются и упругие свойства сосудистых стенок. Поэтому модуль упругости сосудистых стенок зависит от функционального состояния мышечных элементов и степени пассивного напряжения соединительно-тканной основы сосуда.

Рассмотрим стенку кровеносного сосуда (рис. 3) как связующую основу с внедренными в нее мышечными элементами (армирующими волокнами).

Пусть объемная доля волокон равна  $\omega_s$ . Семейство армирующих волокон ориентировано под углом  $\varphi$  к оси сосуда (штриховая линия на рис. 3). Объемная доля связующего  $\omega_0$  равна

$$\omega_0 = 1 - \omega_s. \quad (1)$$

Семейство армирующих волокон считается упругим материалом с модулем Юнга  $E_s$ . При этом предполагается, что при заданных нагрузках все волокна остаются упругими. Связующее считается линейно-вязкоупругим материалом с модулем Юнга  $E_0$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ .

Расчетная модель деформирования цилиндрического слоистого сосуда (оболочки) должна включать три группы уравнений: 1) уравнения равновесия или движения элемента оболочки; 2) геометрические соотношения, которые выводятся на основе допущений о характере деформации и существенно связаны с ее геометрическими параметрами; 3) физические соотношения, связывающие напряжения и деформации и описываю-

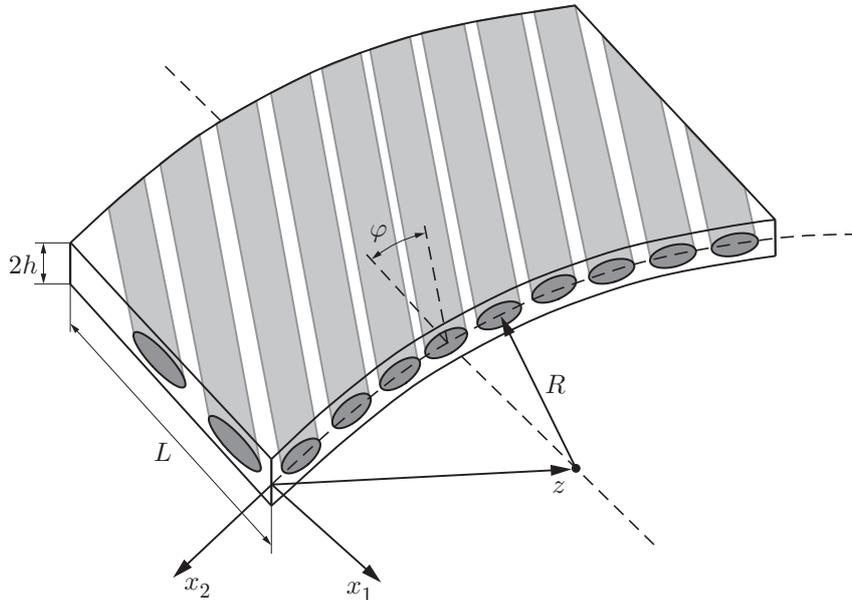


Рис. 3. Схема стенки кровеносного сосуда:

$L$  — длина сосуда;  $h$  — полуширина стенки сосуда;  $R$  — радиус сосуда; заштрихованные области — мышечные (армирующие) волокна

щие свойства материала. Во второй и третьей группах уравнений находят свое отражение особенности механики деформирования композитного материала, из которого, как можно полагать, выполнен кровеносный сосуд.

В случае использования обобщенной кинематической гипотезы Тимошенко [6] разрешающие уравнения можно представить в виде [7]

$$(A - B)\mathbf{u} + \tilde{h}^2 \mathbf{p} = 0; \quad (2)$$

$$\mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{u}|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

где  $A$  — кинематическая матрица-оператор;  $B$  — матрица-оператор инерции;  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{p}$  — векторы обобщенных перемещений и внешней поверхностной нагрузки;  $\mathbf{Q}$ ,  $\delta \mathbf{u}$  — векторы обобщенных усилий и вариаций обобщенных перемещений на линии  $\Gamma$ , ограничивающей отсчетную (срединную) поверхность оболочки;  $\tilde{h}$  — тонкостенность оболочки (определена ниже).

Краевая задача (2), (3) в общем случае нелинейная. Общий порядок системы уравнений равен 12 и не зависит от числа слоев и их расположения. В отличие от классических моделей, приведенных, например, в [6], сдвиговые деформации и напряжения определяются здесь естественным образом через соответствующие соотношения упругости [8].

Для критической нагрузки (максимального внутреннего давления, которое может выдержать сосуд) в [8] получена зависимость

$$\tilde{q} = \frac{\beta}{12} \varphi_1 + \frac{\theta^4}{\beta \varphi_2}, \quad (4)$$

где  $\varphi_1 = a_{11}\theta^2 + 2(a_{12} + 2a_{33}) + a_{22}/\theta^2$ ;  $\varphi_2 = A_{22}\theta^2 + 2A_{12} + A_{33} + A_{11}/\theta^2$ ;  $\mathcal{E} = [a_{ij}]$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) — симметричная матрица коэффициентов упругости связующего и волокон для плоского напряженного состояния.

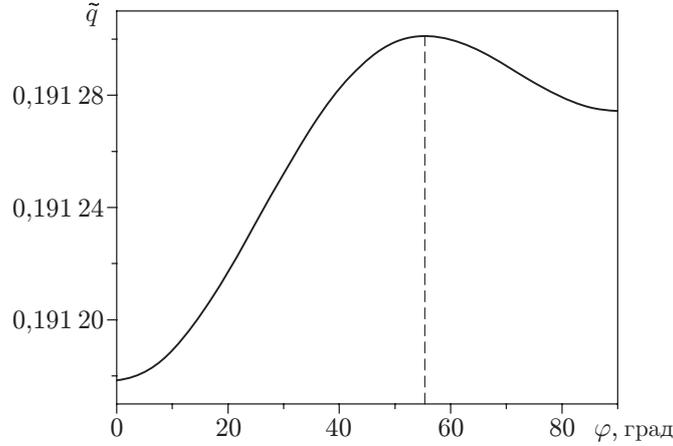


Рис. 4. Зависимость максимального внутреннего давления от угла укладки волокон ( $\tilde{R} = 0,32$ ,  $\tilde{h} = 0,09$ ,  $\tilde{E}_s = 0,03$ ,  $\nu = 0,5$ ,  $\omega_s = 0,1$ )

В случае изотропного вязкоупругого связующего коэффициенты матрицы  $\mathcal{E}$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 a_{ii} &= \frac{1}{1 - \nu^2} + P_s \chi_i^4, & a_{12} &= a_{21} = \frac{\nu}{1 - \nu^2} + P_s \chi_1^2 \chi_2^2, & a_{13} &= a_{31} = P_s \chi_2 \chi_1, \\
 a_{23} &= a_{32} = P_s \chi_1 \chi_2, & a_{33} &= \frac{1}{2(1 + \nu)} + P_s \chi_1^2 \chi_2^2,
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

где  $P_s = \omega_s \tilde{E}_s / \omega_0$ ;  $\chi_i = \text{const}$  — направляющий косинус траектории волокон по отношению к направлению  $i$ . Для системы координат, показанной на рис. 3, направляющие косинусы равны  $\chi_1 = \chi$ ,  $\chi_2 = \sqrt{1 - \chi^2}$ ,  $\chi_3 = 0$  (здесь  $\chi = \cos \varphi$ ). Матрица  $\|A_{ij}\| = \|a_{ij}\|^{-1}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

В формулах (4), (5) используются следующие безразмерные переменные:  $\tilde{q} = q / (4\omega_0 E_0 \tilde{h}^2)$  ( $q$  — размерное внутреннее давление, действующее на сосуд);  $\tilde{h} = h / R$ ;  $\tilde{E}_s = E_s / E_0$ ; безразмерный радиус сосуда  $\tilde{R} = R / L$ ;  $\beta = 2\tilde{h}\pi^2 \tilde{R}^2$ ;  $\theta = \pi \tilde{R} / n$  ( $n$  — количество волн, характеризующих форму деформации сосуда по окружности). Далее везде примем  $n = 2$ , что означает овальное деформирование сосуда.

Формула (4) получена для решения задачи об устойчивости под действием внешнего давления. Однако она пригодна и для расчета внутреннего давления цилиндрического сосуда, если принять  $n = 0$  или  $n = 2$ ,  $m = 1$  ( $m$  — число волнообразования вдоль образующей сосуда). Это справедливо при решении задачи устойчивости методом Бубнова — Галеркина [8] в линеаризованной постановке [6].

Уравнение (4) определяет максимальное внутреннее давление, которое выдерживает сосуд в зависимости от угла  $\varphi$  укладки армирующих волокон (рис. 4). На рис. 4 видно, что максимальному внутреннему давлению, которое выдерживает сосуд, соответствует угол укладки мышечных волокон  $\varphi \approx 57^\circ$ .

Для исследования свойств укладки гладкомышечных элементов необходимо определить упругие характеристики кровеносных сосудов. Трудность состоит в том, что механические свойства сосудов непостоянны: они изменяются с возрастом и под воздействием лекарственных средств. Обзор работ по исследованию вязкоупругих свойств стенок артериальных сосудов приведен в [9].

Согласно [9] коэффициент Пуассона  $\nu$  стенок кровеносных сосудов можно принять равным 0,5 (это не вносит больших погрешностей в расчеты).

Мышечная оболочка сосудов выполняет два вида работы: статическую (преодоление внутрисосудистого давления крови) и динамическую (активную работу по винтовому ламинарному проталкиванию крови в сосуде) [2, 10]. Очевидно, что предельные значения прочности кровеносных сосудов определяются при пиковых статических нагрузках. В [11] установлено, что стенка общей сонной артерии собаки выдерживает давление изнутри до  $88 \cdot 10^6$  дин/см<sup>2</sup>. При исследовании одной мышечной оболочки этой артерии (после удаления наружной и внутренней оболочек) оказалось, что она выдерживает давление лишь  $2,73 \cdot 10^6$  дин/см<sup>2</sup>.

Рассмотрим однородную упругую цилиндрическую оболочку под действием внутреннего давления. Максимальное давление, которое выдерживает однородная оболочка, равно (см. [6])

$$p_{\max} = \frac{\pi\sqrt{6}}{9(1-\nu^2)^{0,75}} E \frac{h^2}{RL} \sqrt{\frac{h}{R}}. \quad (6)$$

Для оценки отношения модулей Юнга  $\tilde{E}_s = E_s/E_0$  используем отношение предельного давления для мышечной оболочки к предельному давлению общей сонной артерии. Тогда согласно формуле (4) отношение модулей Юнга армирующих волокон  $E_s$  и связующего  $E_0$  можно оценить как  $\tilde{E}_s = 0,03$ .

Отношение толщины стенок сосуда к его радиусу является достаточно постоянным [9]. Поэтому величину  $D = (r_a - r_i)/r_i$  ( $r_a, r_i$  — наружный и внутренний радиусы артерии) без большой погрешности можно принять в качестве константы. Согласно [9] для артерий эластического типа  $D = 0,15$ , для артерий мышечного типа  $D = 0,20$ . Тогда величина  $\tilde{h}$  меняется в интервале от 0,07 (артерии эластического типа) до 0,09 (артерии мышечного типа).

Труднее всего оценить объемную долю мышечных волокон  $\omega_s$  в стенке кровеносного сосуда. Очевидно, что эта доля зависит от типа артерии (эластического, мышечно-эластического и мышечного) и возраста живого организма (как отмечено выше). Ниже приводятся результаты для  $\omega_s = 0,1$ . Оптимальный угол наклона мышечных элементов не зависит от объемной доли мышечных волокон  $\omega_s$ .

Из (4) можно найти оптимальный угол укладки волокон  $\varphi_{opt}$  — угол, при котором сосуд выдерживает максимальное давление. Эта зависимость определяется из решения уравнения

$$\frac{\partial \tilde{q}(\varphi; \tilde{R}, \tilde{E}_s, \nu, \omega_s, \tilde{h})}{\partial \varphi} = 0, \quad (7)$$

откуда находим оптимальный угол укладки мышечных волокон

$$\varphi_{opt} = \varphi(\tilde{R}; \tilde{E}_s, \nu, \omega_s, \tilde{h}). \quad (8)$$

Зависимость оптимального угла мышечных волокон  $\varphi_{opt}$  (8) от радиуса сосуда  $\tilde{R}$  приведена на рис. 5. Видно, что для крупных кровеносных сосудов ( $\tilde{R} = 0,5$ ) угол наклона мышечных волокон близок к 43°. При уменьшении размера сосуда до  $\tilde{R} = 0,3$  угол укладки мышечных волокон увеличивается: для артерий мышечного типа ( $\tilde{h} = 0,09$ ) — до 83°; для артерий эластического типа ( $\tilde{h} = 0,07$ ) — до 58°. Такая зависимость угла укладки гладкомышечных элементов от размера сосуда соответствует морфологическим данным [2] об ориентации мышц в стенках артерий.

Исследуем влияние “старения” сосуда на его оптимальную прочность. На рис. 6 приведена зависимость максимального внутреннего давления от угла укладки волокон. Штриховая линия на рис. 6 — расчет при “старении” сосуда с прежним объемом мышц ( $\omega_s = 0,1$ ).

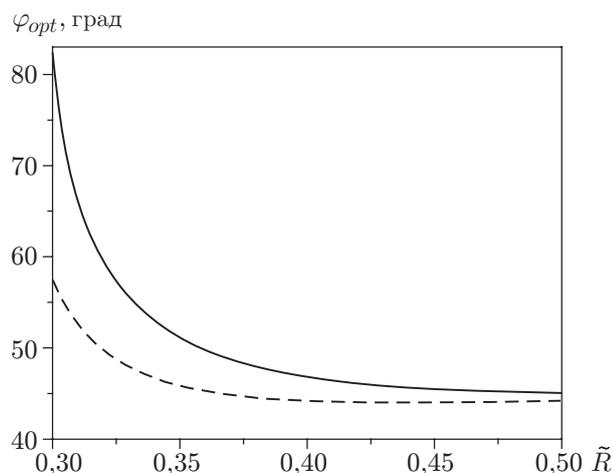


Рис. 5

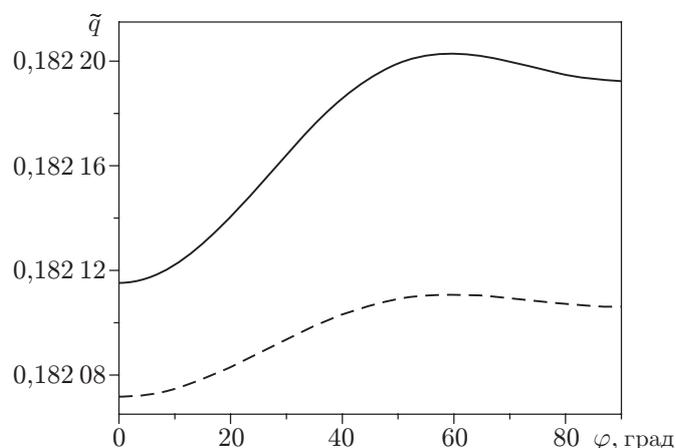


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость оптимального угла укладки мышечных волокон от радиуса кровеносного сосуда ( $\tilde{E}_s = 0,03$ ,  $\nu = 0,5$ ,  $\omega_s = 0,1$ ): сплошная линия —  $\tilde{h} = 0,09$ ; штриховая —  $\tilde{h} = 0,07$

Рис. 6. Влияние "старения" сосуда на его оптимальную прочность ( $\tilde{R} = 0,32$ ,  $\tilde{h} = 0,09$ ,  $\tilde{E}_s = 0,01$ ,  $\nu = 0,5$ ): сплошная линия —  $\omega_s = 0,2$ ; штриховая —  $\omega_s = 0,1$

Упругость мышечных волокон  $\tilde{E}_s$  уменьшена в три раза по сравнению с расчетной для молодого организма (ср. сплошные линии на рис. 4, 6), т. е. прочность сосуда уменьшилась. Несколько компенсировать потерю прочности можно наращиванием мышечной массы в два раза ( $\omega_s = 0,2$ ) (сплошная линия на рис. 6). Однако полностью достичь прочности сосудов молодого организма не удастся (ср. рис. 4, 6). Предварительные результаты данной работы изложены в [12, 13].

Таким образом, показано, что ориентация намотки гладкомышечных волокон в крупных кровеносных сосудах (артериях и артериолах) является оптимальной. "Старение" сосудов (уменьшение упругости стенок) в живых организмах компенсируется ростом объема мышечных волокон. В зависимости от размера сосуда мышечные волокна ориентированы под углом, обеспечивающим максимально возможную прочность сосуда. Это еще раз доказывает, что строение живого организма (в частности, кровеносной системы) является оптимальным и с точки зрения механики.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Пуриня Б. Я., Касьянов В. А.** Биомеханика крупных кровеносных сосудов человека. Рига: Зинатне, 1980.
2. **Куприянов В. В.** Спиральное расположение мышечных элементов в стенке кровеносных сосудов и его значение для гемодинамики // Арх. анатомии, гистологии и эмбриологии. 1983. № 9. С. 46–54.
3. **Елисеев В. Г.** Гистология. М.: Медицина, 1983.
4. **Пшеничный А. Н.** Взаимопреобразование спиральных  $D$ - и  $L$ -энантиоморфов мышц кровеносных сосудов // Арх. анатомии, гистологии и эмбриологии. 1985. № 5. С. 37–43.
5. **Никулин А. А., Петров В. К.** Кровеносные сосуды. Тула: Приок. кн. изд-во, 1981.

6. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
7. **Самсонов В. И.** Выпучивание композитных цилиндрических оболочек при динамическом нагружении // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 1992. С. 121–129.
8. **Самсонов В. И.** Устойчивость подкрепленной армированной цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении // Прикл. механика. 1982. Т. 13, № 1. С. 107–109.
9. **Савицкий Н. Н.** Биофизические основы кровообращения и клинические методы изучения гемодинамики. Л.: Медгиз, 1963.
10. **Багаев С. Н., Захаров В. Н., Орлов В. А.** Физические механизмы транспортных систем живого организма. 1999. (Препр. / Ин-т лазерной физики СО РАН; № 1).
11. **Dobrin Ph., Rovick A.** Influence of vascular smooth muscle on contractile mechanics and elasticity of arteries // Amer. J. Physiol. 1969. V. 217. P. 1644–1657.
12. **Багаев С. Н., Захаров В. Н., Маркель А. Л. и др.** Об оптимальном строении стенки кровеносных сосудов // Докл. РАН. 2004. Т. 398, № 3. С. 331–334.
13. **Medvedev A. E., Samsonov V. I., Fomin V. M.** Packing of smooth muscles in blood vessels // Proc. of the 12th Intern. conf. on the methods of aerophys. res., Novosibirsk (Russia), 28 June — 3 July 2004. Novosibirsk: Inst. Theor. and Appl. Mech., 2004. Pt 3. P. 123–127.

*Поступила в редакцию 24/VIII 2005 г.*

---