

УДК 622.023

**РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ
ПРОГНОЗА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИТЕРИЯ ПРОЧНОСТИ СТАВРОГИНА**

А. Г. Протосеня, М. А. Карасев, Н. А. Беляков

*Национальный минерально-сырьевой университет “Горный”,
E-mail: kaf-sgp@mail.ru,
21-я линия В.О., 2, 199026, г. Санкт-Петербург, Россия*

Изучаются в комплексе следующие вопросы: прочность горных пород в условиях объемных напряженных состояний, упругопластическая модель с переменными показателями пластического течения, алгоритм решения задач с условием прочности Ставрогина, оценка корректности численной модели и области использования условия Кулона. Алгоритм решения задачи реализован в программном комплексе Abaqus, выполнено сопоставление результатов расчета зон предельного состояния вокруг выработки с условиями прочности Ставрогина и Кулона.

Порода, напряжения, условие прочности, огибающая, модель, нелинейность, выработка

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД

Результаты испытаний различных типов горных пород в объемных напряженных состояниях показывают, что огибающая кругов Мора максимальных напряжений горной породы имеет нелинейную форму. Для описания нелинейной огибающей кругов напряжений при испытаниях горных пород предлагалось использовать параболу, циклоиду и другие типы зависимостей [1]. На практике наибольшее распространение получила линейная зависимость в форме Кулона.

А. Н. Ставрогиным [2–5] и его учениками выполнены фундаментальные экспериментальные исследования прочности, деформирования и разрушения основных типов пород в широком диапазоне режимов и видов нагружения. Эксперименты в условиях объемных напряженных состояний $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ проводились на цилиндрических образцах диаметром 30 мм и длиной 80 мм. На рис. 1 показаны полные диаграммы, полученные при разных уровнях бокового давления для сульфидной руды. По горизонтали отложены продольные (осевые) ε_1 и поперечные ε_2 деформации, по вертикали — осевое напряжение $\Delta\sigma_1$, представляющее разность между осевым главным напряжением σ_1 и боковым давлением $\sigma_2 = \sigma_3$, т. е. $\Delta\sigma_1 = \sigma_1 - \sigma_2$. Возле кривых указаны значения боковых давлений σ_2 , при которых эти кривые получены. Аналогичные зависимости получены и для других типов пород.

При малых значениях σ_2 наблюдаются резко выраженные максимумы, за которыми идет ниспадающая ветвь, заканчивающаяся выходом на горизонтальный участок. Несущая способность материала на этом участке определяется остаточной прочностью. Здесь материал полно-

стью теряет сцепление, а дальнейшая деформация представляет собой относительное скольжение двух или большего числа частей образца по образовавшимся шероховатым поверхностям сдвига, трение по которым порождает остаточную прочность. По мере повышения σ_2 предельная часть кривой становится более пологой, необратимые деформации на пределе прочности возрастают, максимумы напряжений делаются менее выраженными и исчезают. Сильно растет остаточная прочность, значение которой при высоких давлениях становится равным предельной прочности.

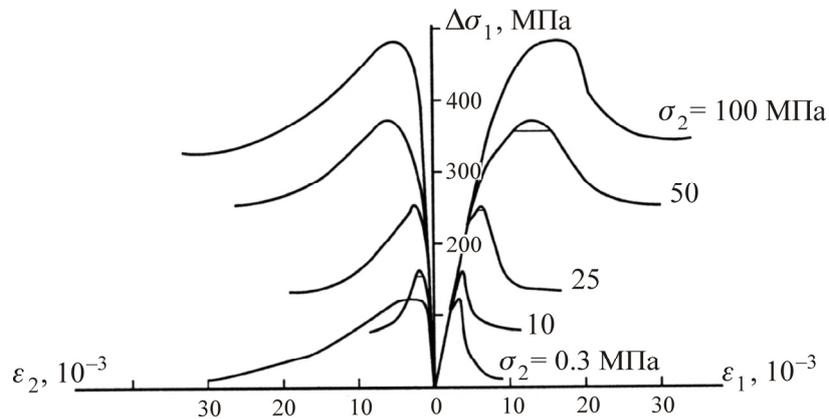


Рис. 1. Полная диаграмма деформирования сульфидной руды при различных значениях бокового давления σ_2

При проведении испытаний в условиях высоких боковых давлений порода перестает быть хрупкой, модуль запредельного деформирования M уменьшается и для получения полных диаграмм отпадает необходимость использования жесткого оборудования.

С практической точки зрения наиболее интересными являются результаты, полученные при относительно низких уровнях бокового давления σ_2 , поскольку в подобных условиях находятся породы, примыкающие к контуру обнажений в горных выработках. Данные о поведении пород за пределом прочности в этих условиях необходимы, например, для оценки устойчивости выработки и прогноза возможности возникновения динамических явлений.

Описанные диаграммы “напряжение – деформация”, помимо упругих констант и запредельных характеристик, позволяют получить условия трех предельных состояний: пределов упругости, пределов прочности и пределов остаточной прочности. Общепринято представление предельных состояний горных пород в виде огибающих максимальных кругов Мора. Недостатком огибающих кругов Мора является отсутствие универсальной аналитической формы огибающей в широком диапазоне видов напряженного состояния. В работах [2–5] предложены аналитические представления всех трех предельных состояний в виде экспоненциальных уравнений:

$$\tau_y = \tau_y^0 e^{BC}, \quad (1)$$

$$\tau_{II} = \tau_{II}^0 e^{AC}, \quad (2)$$

$$\tau_o = \tau_o^0 e^{OC}, \quad (3)$$

где уравнение (1) — условие предельных упругих состояний; (2) — условие пределов прочности; (3) — условие пределов остаточной прочности. В этих уравнениях $\tau_y = (\sigma_1^y - \sigma_3)/2$, $\tau_{II} = (\sigma_1^{II} - \sigma_3)/2$, $\tau_o = (\sigma_1^o - \sigma_3)/2$ — соответственно пределы упругости, прочности и оста-

точной прочности; τ_y^0 , τ_n^0 , τ_0^0 — константы, являющиеся пределом упругости, прочности и остаточной прочности при одноосном сжатии; B , A , O — константы, отражающие упрочнение горных пород с ростом гидростатического давления; $C = \sigma_3 / \sigma_1$ — параметр, характеризующий вид напряженного состояния.

Константы B , A , O на языке огибающих кругов Мора можно интерпретировать как аналоги угла внутреннего трения, правда в данном случае они не зависят от уровня σ_2 . Константы τ_y^0 , τ_n^0 и τ_0^0 — аналоги коэффициента сцепления. Предлагаемые аналитические уравнения, так же как и огибающие кругов Мора, не учитывают влияния промежуточного главного нормального напряжения.

Экспериментальные графики предельных упругих и предельных прочностных состояний в координатах $(\ln \tau - C)$ для талькохлорита и диабазы изображены на рис. 2.

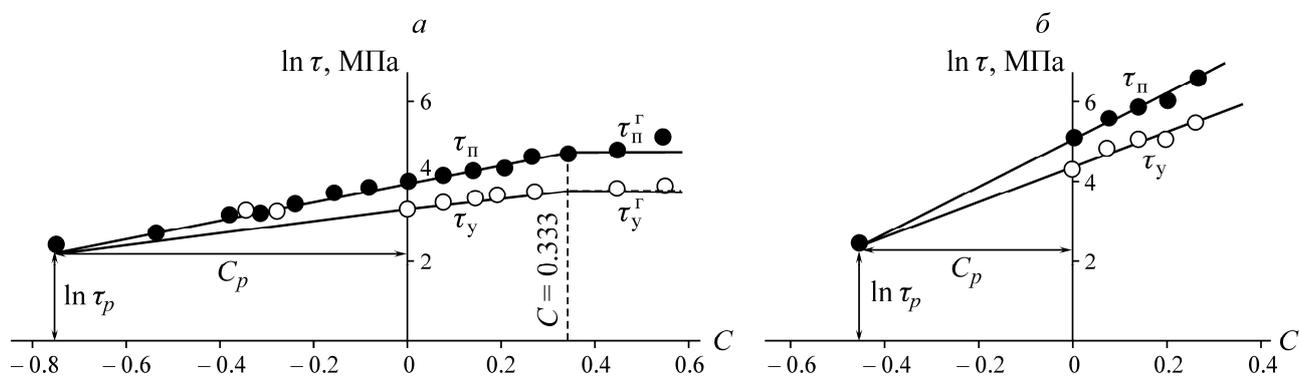


Рис. 2. Зависимости пределов прочности τ_n и пределов упругости τ_y от параметра C талькохлорита (а) и диабазы (б)

Экспериментальные точки удовлетворительно ложатся на прямые линии, что позволяет полученные зависимости аппроксимировать уравнениями вида (1) и (2). При $C = 0$ получаем одноосное сжатие. Вправо от начала координат параметр C имеет положительный знак, все компоненты главных напряжений здесь сжимающие. Влево от начала координат параметр C имеет знак “минус”, что означает наличие растяжения у одного из главных нормальных напряжений.

На правой ветви рассматриваемой зависимости горизонтальные участки предельных кривых возникают при значении $C = 0.333$, что соответствует условию $\tau = \sigma_2$. На горизонтальных участках предельных кривых τ_n^{Γ} и τ_y^{Γ} критериями предельных упругих и прочностных состояний становятся либо максимальные касательные, либо октаэдрические напряжения в соответствии с теорией прочности Кулона или в соответствии с теорией прочности Мизеса, Губера, Генки. Количественные различия между этими двумя теориями невелики. Область напряженных состояний, соответствующую горизонтальной части предельных кривых, в дальнейшем условно будем называть областью чистого сдвига.

Из условия равенства $\tau_n = \tau_y$ находим координату

$$C_p = \lg \left(\frac{\tau_n^0}{\tau_y^0} \right) \frac{1}{B - A}.$$

Значение C_p , будучи подставленное в уравнение (1) или (2), позволяет получить вторую координату точки пересечения предельных кривых $\ln \tau_{II}$. После этого можно подсчитать прочность на отрыв σ_p по следующей формуле:

$$\sigma_p = 2\tau_p / (1/C_p - 1).$$

Таким образом, условия предельных состояний (1) и (2) описывают диапазон напряженных состояний, расположенный между областью чистого отрыва и областью чистого сдвига. Область с положительными значениями параметра C исследована на широком круге горных пород и сходных с ними материалах.

На рис. 3 в координатах $(\ln \tau - C)$ представлены экспериментальные зависимости пределов прочности τ_{II} и пределов остаточной прочности τ_o от параметра C для выбросоопасного песчаника и сульфидной руды. Экспериментальные точки аппроксимированы прямыми линиями в соответствии с уравнениями (2) и (3). Параметр O , определяющий наклон предельной прямой, всегда значительно превосходит параметр A для линии пределов прочности. При выходе в горизонтальное положение предельные линии пересекаются в одной точке с параметром $C \sim 0.333$. При выходе предельных кривых в горизонтальное положение понятие “остаточная прочность” утрачивает свой смысл. Координата выхода предельных кривых в горизонтальное положение по оси C зависит от скорости приложения нагрузки. С увеличением скорости точка выхода C передвигается в сторону значений, меньших $C = 0.333$.

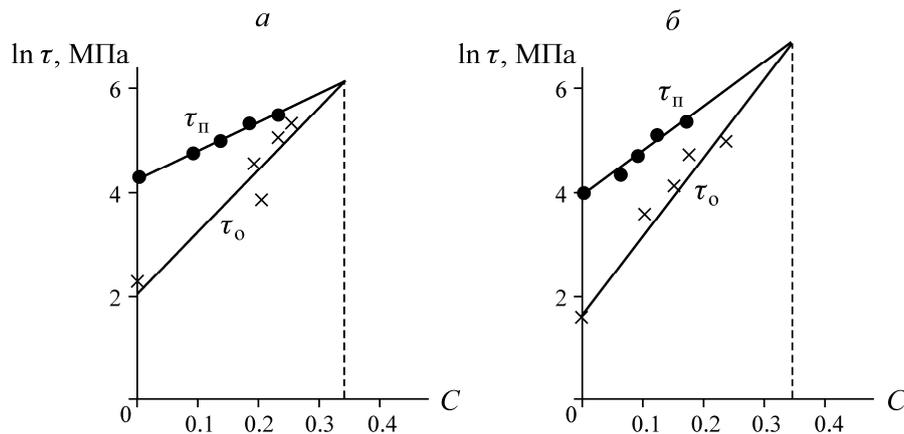


Рис. 3. Экспериментальные зависимости для пределов максимальной и остаточной прочности, полученные на выбросоопасном песчанике (а) и сульфидной руде (б)

Разброс экспериментальных точек относительно прямой τ_o значительно больше разброса точек относительно прямой τ_{II} , что, вероятно, связано с различием условий на трущихся контактных поверхностях разрушения, а также с более низкой точностью определения значений пределов остаточной прочности на диаграммах.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что в условиях высоких давлений и больших пластических деформаций некоторые горные породы проявляют более интенсивную склонность к упрочнению, нежели это диктуется уравнением (2).

В работах [2 – 5] приведены значения рассмотренных выше параметров для различных типов горных пород. Развитие других направлений исследований отражено в работах [6, 7].

Необходимо отметить, что использование условий (1) – (3) вызывает сложность при решении нелинейных задач.

Предлагаемая работа направлена на разработку численных моделей решения нелинейных задач с условием прочности А. Н. Ставрогина, что позволит существенно уменьшить сложность их решения и расширить область применения условия.

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Обычно в программных комплексах конечно-элементного анализа в качестве базовой модели рассматривается упругопластическая модель, поверхность пластического течения в которой задается в виде линейной функции, отвечающая критерию прочности Кулона, а нелинейные критерии прочности не представлены. Одним из эффективных способов реализации нелинейного критерия прочности является разделение функции, связывающей величину прочности сдвига и нормальные напряжения, на линейные участки, изменение нормальных напряжений между крайними точками которых незначительны. Такой подход позволяет выполнить внедрение нелинейного критерия прочности в программные комплексы для конечно-элементного или конечно-разностного анализа.

Далее рассмотрена реализация данного подхода в универсальном программном комплексе Abaqus для условия пластичности А. Н. Ставрогина. Взаимосвязь между предельными касательными напряжениями τ на рассматриваемой площадке и нормальными напряжениями σ_n , действующими перпендикулярно ей, для условия пластичности Кулона можно выразить следующим образом:

$$\tau = K - \sigma_n \operatorname{tg} \rho, \quad (4)$$

где K — сцепление; ρ — угол внутреннего трения.

В главных напряжениях условие (4) можно записать так:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)/2 + (\sigma_1 + \sigma_3)/2 \sin \rho - K \cos \rho = 0.$$

Для взаимосвязи между параметрами условий Кулона и Ставрогина запишем условие (2) в явном виде:

$$\sigma = \tau [1 + \ln \tau / (\tau_0^n / A)] / [1 - \ln \tau / (\tau_0^n / A)].$$

Для перевода показателей прочности Ставрогина к эквивалентным показателям прочности Кулона, т. е. к эквивалентным сцеплению и углу внутреннего трения, будем использовать аппроксимацию экспоненциальной огибающей кругов предельного состояния (2) кусочно-линейной функцией. Точность аппроксимации будет зависеть только от количества точек, выбранных на исходной экспоненциальной огибающей: чем больше точек, тем точнее аппроксимация.

Для двух последовательно расположенных на экспоненциальной огибающей точек, представляющих на аппроксимирующей кусочно-линейной огибающей начальную и конечную точки одного линейного участка функции с постоянными значениями сцепления и угла внутреннего трения, их значения будут определяться согласно следующим выражениям:

$$K = \frac{\tau_M \sigma_N - \tau_N \sigma_M}{\tau_B - \tau_A}, \quad (5)$$

$$\rho = \operatorname{arctg} \left(\frac{\tau_M - \tau_N}{\sigma_M - \sigma_{Bm}} \right), \quad (6)$$

где τ_M , τ_N , σ_M , σ_N — координаты соседних точек M и N на экспоненциальной огибающей (2).

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЕМ ПРОЧНОСТИ А. Н. СТАВРОГИНА

1. Выполняется построение огибающей кругов предельного состояния в виде $\tau = f(\sigma)$ с применением условия пластичности Ставрогина (2) в необходимом диапазоне напряжений.

2. В необходимом диапазоне изменения касательных напряжений выполняется кусочно-линейная аппроксимация полученной огибающей кругов предельного состояния. Точность аппроксимации зависит от принятого шага изменения касательных напряжений: чем меньше этот шаг, тем больше точек и тем точнее будет кусочно-линейная аппроксимация. На каждом отдельном участке между двумя соседними точками полученной кусочно-линейной функции, принадлежащими к исходной огибающей, значения эквивалентных сцепления и угла внутреннего трения принимаются постоянными.

3. Выполняется построение зависимостей изменения эквивалентных значений сцепления и угла внутреннего трения от касательных или нормальных напряжений. Для определения начальных эквивалентных значений сцепления и угла внутреннего трения необходимо для значений наибольшего и наименьшего главных напряжений (σ_1 и σ_3), начального поля распределения напряжений по условию Ставрогина, записанного в виде выражения (2), найти действующее касательное напряжение. Затем по его значению определить по известным зависимостям (5) и (6) $K = f(\tau)$ и $\rho = f(\tau)$ необходимые значения начальных эквивалентных величин сцепления и угла внутреннего трения.

Внедрение представленного алгоритма в программный комплекс Abaqus осуществлено с помощью пользовательской подпрограммы UsdFld [8]. Данная подпрограмма позволяет изменять параметры поля как функцию от времени или любого показателя, достигнутого в процессе решения в конкретной точке интегрирования. Обычно в качестве показателей рассматриваются напряжения или деформации. Для доступа к показателям в точке интегрирования используется функция GetVRM [8]. Далее каждой переменной поля соотносят величину параметра модели материала, которая прописывается на этапе подготовки исходных данных.

Алгоритм реализации условия прочности (2) через условие Кулона приведен ниже:

- определение тензора напряжений на начале шага приращения нагрузки;
- определение предельного значения касательных напряжений τ согласно условию прочности (2) для каждой точки интегрирования конечно-элементной модели;
- определение сцепления и угла внутреннего трения, соответствующих предельному значению касательных напряжений, согласно условию прочности (2). Взаимосвязь между предельными касательными напряжениями и величиной сцепления и угла внутреннего трения находится предварительно с учетом параметров условия прочности (2);
- определение первичных переменных (смещения и усилия) и вторичных переменных (напряжения и деформации) с учетом составленной для каждой точки интегрирования упруго-пластической матрицы;
- выполнение следующего шага приращения нагрузки и повторение алгоритма.

С учетом того, что пользовательская подпрограмма UsdFld позволяет получить информацию о напряженном состоянии только на момент начала шага нагружения, а напряженное состояние на конец шага нагружения неизвестно, размер шага приращения нагрузки определяется при последовательном уменьшении шага и сравнении результатов численного моделирования на предыдущей и данной итерациях. Как только результаты численного моделирования будут отличаться друг от друга менее чем на $1 \cdot 10^{-3}$, считается, что шаг приращения нагрузки найден.

ОЦЕНКА КОРРЕКТНОСТИ РАЗРАБОТАННОЙ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ

Для проверки корректности разработанной численной модели проведено сопоставление результатов расчета по ней с результатами, полученными аналитическими методами. В работе [2] приведено приближенное решение плоской упругопластической задачи о напряженном состоянии вокруг выработки кругового очертания с начальным негидростатическим полем в нетронутом массиве. Предполагается, что вокруг выработки образуется область предельного состояния, напряжения в которой удовлетворяют условию пластичности Ставрогина.

Приближенное решение о размерах области предельного состояния получено с использованием метода малого параметра и записывается в виде

$$R_L = (r_0 + \varepsilon r_1 \cos 2\theta)R_0, \quad (7)$$

где $\varepsilon = 0.5(1 - \lambda)$; θ — угловая координата; r_0 и r_1 находятся по формулам

$$\left. \begin{aligned} r_0^2 &= \tau_n^0 C_1 \exp \left[2A / \left(A - \ln \frac{\lambda_1 \gamma H k}{\tau_n^0} \right) \right] / \left[(\lambda_1 \gamma H k)^2 \left(A - \ln \frac{\lambda_1 \gamma H k}{\tau_n^0} \right)^{2A} \right], \\ r_1 &= \frac{2r_0}{\lambda_1 k} \left[\left(A - \ln \frac{\lambda_1 \gamma H k}{\tau_n^0} \right)^2 - A \left(1 + A - \ln \frac{\lambda_1 \gamma H k}{\tau_n^0} \right) \right] / \left[\left(A - \ln \frac{\lambda_1 \gamma H k}{\tau_n^0} \right)^2 - 2A \left(1 + A - \ln \frac{\lambda_1 \gamma H k}{\tau_n^0} \right) \right], \end{aligned} \right\} (8)$$

где $\lambda_1 = 0.5(1 + \lambda)$; H — глубина заложения выработки; γ — удельный вес толщи пород; R_0 — радиус выработки.

Величина $k = a / r_0^2$ рассчитывается из уравнения

$$A - \ln \frac{\lambda_1 \gamma H k}{\tau_n^0} = k \left(A + \ln \frac{\lambda_1 \gamma H k}{\tau_n^0} \right). \quad (9)$$

Постоянная

$$C_1 = \frac{\tau_1^2}{\tau_n^0} \left(A - \ln \frac{\tau_1}{\tau_n^0} \right)^{2A} \exp \left[-2A / \left(A - \ln \frac{\tau_1}{\tau_n^0} \right) \right], \quad (10)$$

а τ_1 определяется из уравнения

$$p_0 = 2\tau_1 \left(\ln \frac{\tau_1}{\tau_n^0} \right) / \left(A - \ln \frac{\tau_1}{\tau_n^0} \right), \quad (11)$$

в котором p_0 — отпор крепи.

Найдем численное и аналитическое решения задачи по формулам (7)–(11) для следующих исходных данных: $H = 1000$ м; $\gamma = 25$ кН/м³; $p_0 = 0$; $\lambda = 0.8$; $R_0 = 2$ м; $\tau_n^0 = 5$ МПа; $A = 3.8$.

Область предельного состояния вокруг выработки имеет эллиптическое очертание и описывается формулой $R_L = (1.65 + 0.194 \cos 2\theta)R_0$. Максимальный и минимальный размеры зоны предельного состояния вокруг круговой выработки составляют при этом соответственно $1.844R_0$ и $1.44R_0$.

Численное решение задачи по предлагаемой методике показывает, что она также имеет форму эллипса, описываемого зависимостью $R_L = (1.737 + 0.297 \cos 2\theta)R_0$. В этом случае минимальные и максимальные размеры зоны предельного состояния вокруг круговой выработки равны соответственно $2.033R_0$ и $1.456R_0$. Наибольшее различие результатов расчетов получено при $\theta = 0$ и составляет $\Delta = 2.033 - 1.844 = 0.189$, относительная погрешность при этом рав-

на 9.29 %, что соответствует погрешности определения прочностных характеристик пород [2]. Сопоставление численного и аналитического решений, с учетом некоторого различия в постановке задачи, свидетельствует об их соответствии.

С помощью предложенного численного алгоритма проведем сопоставление результатов определения зон предельного состояния с условием (2) и условием Кулона для двух выработок сводчатого очертания с пролетом 6 м и разделенных целиком шириной 6 м.

При выполнении моделирования принимаем, что выработки проходятся в каменном угле, для которого определены следующие параметры прочности по условию Ставрогина: $\tau_0 = 5$ МПа и $A = 3.8$ [2]. При этом известно, что $\sigma_{сж} = 10$ МПа, а $\sigma_p = 1.2$ МПа. С учетом этого путем построения паспорта прочности горной породы по ГОСТ 21/58-88 [9] определены следующие параметры прочности условия Кулона: $K = 3.54$ МПа и $\rho = 51^\circ$.

Подчеркнем также, что задача решалась в постановке плоской деформации, расчетная глубина составила 1000 м при удельном весе пород 25 кН/м^3 , а коэффициент бокового распора λ принимался равным 0.8. В качестве модели поведения горной породы принималась модель изотропной упругопластической среды.

Полученные в результате численных расчетов очертания зон предельного состояния вокруг выработок в двух случаях приведены на рис. 4.

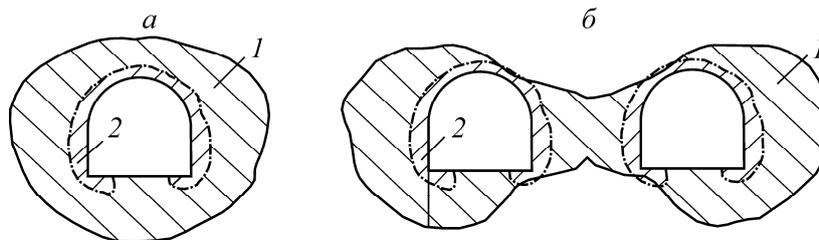


Рис. 4. Области предельного состояния вокруг одиночной выработки сводчатого очертания (а) и вокруг взаимно влияющих выработок сводчатого очертания (б): 1 — условие Ставрогина; 2 — условие Кулона

Сопоставляя результаты для одиночной выработки, отметим следующее. Размер зоны предельного состояния вокруг выработки, полученный с условием прочности (2), значительно превышает размер этой зоны с условием Кулона. Это обстоятельство можно объяснить тем, что условие Кулона не учитывает зависимости прочности горной породы от величины напряжений, действующей в ней. Вблизи контура горной выработки возникает наибольшая концентрация напряжений, в результате чего эквивалентные показатели сцепления и угла внутреннего трения, определенные пересчетом из условия (2), в значительной степени отличаются от постоянных сцепления и угла внутреннего трения условия Кулона. С ростом напряжений эквивалентный угол внутреннего трения, определенный пересчетом из условия Ставрогина, постепенно уменьшается, а эквивалентное сцепление постепенно увеличивается. Уменьшение угла внутреннего трения при росте напряжений приводит к увеличению размеров зоны предельного состояния вокруг горной выработки по сравнению с размерами зоны, определенными по условию Кулона. Характерным является постепенное сглаживание формы зоны предельного состояния по мере удаления от контура выработки вглубь породного массива. При этом, в случае достаточно больших размеров зоны предельного состояния, очертание ее постепенно стремится к эллиптической форме, которая характерна для выработок кругового очертания.

Следует также отметить, что в работе [2] выполнены расчеты зоны предельного состояния вокруг выработки круговой формы поперечного сечения на основе решений плоских упругопластических задач и получены аналогичные различия в размерах зоны при использовании условий Ставрогина и Кулона.

Сопоставляя полученные зоны предельного состояния вокруг пройденных в зоне взаимного влияния двух выработок сводчатого очертания с целиком, ширина которого равна пролету выработки, следует отметить значительные и принципиальные различия. Полученная с условием (2) область предельного состояния полностью охватывает целик между выработками, что может привести к потере его устойчивости. По условию Кулона полученные области предельного состояния вокруг выработок носят ярко выраженный локальный характер и концентрируются вблизи контура горных выработок, а также на некотором относительно незначительном удалении от него. Наложения зон предельного состояния от разных горных выработок в целике при этом не происходит, и целик находится в области упругого деформирования.

Выбор корректного условия прочности, а также выбор корректной модели поведения материала при выполнении моделирования геомеханических процессов в значительной степени определяет правильность результатов расчетов и точность прогноза протекания этих процессов.

ВЫВОДЫ

Условие прочности А. Н. Ставрогина разработано на основе обобщения большого объема экспериментального материала, составляющего несколько десятков тысяч экспериментов по исследованию объемной прочности горных пород, поэтому его применение для прогнозирования поведения твердых горных пород при ведении горных работ является перспективным направлением повышения точности и достоверности моделирования в геомеханике.

В программном комплексе Abaqus предложен, обоснован и реализован метод расчета предельного состояния массива с условием прочности Ставрогина, позволяющий получать численное решение различных задач горной геомеханики.

Сопоставление результатов расчетов зон предельного состояния пород вокруг выработок с условиями Ставрогина и Кулона показывает, что размер зоны предельного состояния вокруг выработки при использовании условия Кулона значительно меньше ее размеров, полученных с использованием условия Ставрогина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руппенейт К. В. Некоторые вопросы механики горных пород. — М.: Углетехиздат, 1954.
2. Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г. Пластичность горных пород. — М.: Недра, 1979.
3. Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г. Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах. — М.: Недра, 1985.
4. Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г. Механика деформирования и разрушения горных пород. — М.: Недра, 1992.
5. Ставрогин А. Н., Тарасов Б. Г. Экспериментальная физика и механика горных пород. — СПб.: Наука, 2001.
6. Протосеня А. Г., Ставрогин А. Н., Черников А. К., Тарасов Б. Г. К определяющим уравнениям состояния при деформировании горных пород в запредельной области // ФТПРПИ. — 1981. — № 3.
7. Протосеня А. Г., Ставрогин А. Н. Пластичность горных пород в условиях переменных скоростей деформирования // ФТПРПИ. — 1983. — № 4.
8. **Abaqus Users Manual** [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://50.16.176.52/v6.13/>.
9. ГОСТ 21153.8-88. Породы горные. Метод определения предела прочности при объемном сжатии. — М., 1989.

Поступила в редакцию 26/IX 2014