

## ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев С. П., Фомин В. М. Континуально-дискретная модель для смеси газ — твердые частицы при малой объемной концентрации частиц // ПМТФ.— 1986.— № 2.
2. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики.— М.: Наука, 1973.
3. Крайко А. Н. О корректности задачи Коши для двухжидкостной модели течения смеси газа с частицами // ПММ.— 1982.— Т. 46, вып. 3.
4. Фомин В. М., Киселев С. П. Комбинированный разрыв в смеси газа и твердых частиц // ЧМСС.— 1984.— Т. 15, № 2.
5. Ершов А. П. Об уравнениях механики двухфазных сред // ПМТФ.— 1983.— № 6.

*Поступила 12/V 1986 г.*

УДК 539.3 : 534.1

### ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В УСЛОВИЯХ СИНГУЛЯРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

*В. В. Ларченко  
(Новосибирск)*

Изложен адаптирующийся вариационный метод и показано его применение для исследования напряженно-деформированного состояния тонкой упругой оболочки, который в существенной части использует принцип максимума для включений [1, 2]. Особенность метода состоит в том, что координатная система вычисляется на ЭВМ, причем, согласно идее Г. И. Марчука, класс функций, на котором реализован принцип максимума, задается с учетом априори известных свойств решений краевой задачи [3, 4]. Предложена модель кинематических соотношений геометрически нелинейной теории оболочек в «квадратичном» приближении.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему уравнений Маргерра — Власова

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \mu \Delta^2 w &= \theta \Delta \Phi + \Phi'' H w + w'' H \Phi - 2 I \Phi I w + p, \\ \mu \Delta^2 \Phi &= (I w)^2 - w'' H w - \theta \Delta w, \quad (r, \varphi) \in \Omega, \quad \Omega = [0, 1) \times [0, 2\pi], \\ \left[ \begin{array}{l} r H(\dots) = (\dots)' + r^{-1}(\dots)'' \\ r I(\dots) = r^{-1}(\dots)' - (\dots)'' \end{array} \right. \\ & r \in \partial \Omega, \quad w = w' = 0, \quad H \Phi = I \Phi = 0, \\ \mu &= h/a\gamma, \quad \gamma^2 = 12(1 - \nu^2), \quad \theta = a/R, \quad (\dots)' = \partial/\partial r(\dots), \quad (\dots)'' = \partial^2/\partial \varphi^2(\dots), \end{aligned}$$

описывающую напряженно-деформированное состояние, устойчивость и послебифуркационное поведение пологого сферического купола с подвижно защемленным опорным контуром. Здесь  $w$  — нормальное перемещение срединной поверхности;  $\Phi$  — функция Эри;  $\mu$  — естественный малый параметр при старших производных;  $\theta$  — полураствор оболочки;  $a$  — опорный радиус;  $R$  — радиус кривизны сферы;  $p$  — внешнее давление;  $h$  — толщина оболочки;  $\nu$  — коэффициент Пуассона; все величины безразмерные; переход их к размерным приведен в [5].

Исследуемая задача допускает применение двойственного метода анализа, который заключается в том, что при аппроксимации решения уравнений теории оболочек наряду с задачей Маргерра — Власова используется ее вариационная формулировка [6]

$$(1.2) \quad \langle \text{grad } \mathcal{D}(\mathcal{F}), \omega \rangle = 0, \quad \forall \omega \in \mathbf{U}(\Omega), \quad \mathbf{U}(\Omega) = \dot{\mathbf{H}}^2(\Omega) \times \dot{\mathbf{H}}^2(\Omega),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{F}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ \mu [(\Delta \mathcal{F}_1)^2 - (\Delta \mathcal{F}_2)^2] - 2 \mathcal{F}_1 \Delta \mathcal{F}_2 + 2 p \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1 \times \\ & \times [\mathcal{F}_1'' H \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_2'' H \mathcal{F}_1 - 2 I \mathcal{F}_1 I \mathcal{F}_2] \} d\Omega, \quad \mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \equiv (\Phi, w). \end{aligned}$$

Постановки (1.1) и (1.2) эквивалентны в гильбертовом пространстве двумерных вектор-функций  $\mathbf{U}(\Omega)$ . Однако это утверждение справедливо лишь в бесконечномерном случае. При развитии приближенных методов

анализа, когда построенное решение содержит погрешность аппроксимации, минимизацией функционала  $\mathcal{E}(U)$  можно повысить точность методов.

При выводе уравнений теории оболочек использованы статические соотношения в форме закона Гука, гипотезы Кирхгофа — Лява и кинематические выражения

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= A^{-1} [u'_\alpha + \bar{B}^{-1} A'_\beta v] - k_\alpha w + (1/2) \omega_\alpha^2, & A\omega_\alpha &= -w'_\alpha, \\ \varepsilon_\beta &= \bar{B}^{-1} v'_\beta + B'_\beta u - k_\beta w + (1/2) \omega_\beta^2, & B\omega_\beta &= -w'_\beta, \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= BA^{-1} (B^{-1} v)_\alpha + AB^{-1} (A^{-1} u)_\beta + \omega_\alpha \omega_\beta, \end{aligned}$$

где  $A(\alpha, \beta)$ ,  $B(\alpha, \beta)$  — коэффициенты первой квадратичной формы недеформированной срединной поверхности;  $\alpha, \beta$  — криволинейные координаты;  $u, v$  — тангенциальные перемещения в направлении  $\alpha$  и  $\beta$ ;  $k_\alpha, k_\beta$  — главные кривизны указанной поверхности. Таким образом, в рамках изучаемой модели теории оболочек в компонентах тензора деформаций удерживаются нелинейные члены лишь относительно углов поворота нормали ее поверхности при вращении последней в двух плоскостях:  $\alpha = \text{const}$ ,  $\beta = \text{const}$ .

В 1939—1942 гг. Фридрихс и Стокер обнаружили новый эффект — круглая пластина при равномерном сжатии в области больших давлений имеет зону, в которой наблюдаются растягивающие усилия. Явление для них оказалось неожиданным, однако достоверность своих результатов они смогли подтвердить асимптотическим методом [7, 8]. Аналогичный результат при постановке прецизионного эксперимента в задаче об устойчивости сферического сегмента, находящегося под действием равномерного внешнего давления  $p$ , установлен в [9].

Парадоксальность и важность указанных явлений связаны с тем, что, например, сфера в рассматриваемом случае может терять устойчивость по неосесимметричным формам. Причина такой бифуркации решения, по мнению специалистов, — то обстоятельство, что в зоне больших деформаций образуются значительные сжимающие усилия. Эта идея положена в основу современного объяснения существования неосесимметричной потери устойчивости [10].

В [9] рассматривались оболочки лишь при  $\mu \geq 1,07 \cdot 10^{-3}$ , поскольку в области меньших значений  $\mu$  крайне сложно исследовать в прецизионном эксперименте напряженно-деформированное состояние. В данной работе предлагается провести анализ этой задачи приближенными методами, расширив диапазон изменения  $\mu$ . Однако при их реализации возникает ряд принципиальных вопросов при аппроксимации решения [11—13].

В основу метода положена идея [3, 4] о возможности повышения эффективности проекционных методов, если в зоне больших градиентов решение аппроксимировать двумя последовательностями  $\{\varphi_i\}$  и  $\{\psi_i\}$ , одна из которых учитывает сингулярные свойства решения уравнений теории оболочек.

**2. Метод решения и результаты счета.** В качестве первой последовательности пробных пространств  $\{V_n\}$ ,  $V_1 \subset V_2 \subset V_3, \dots, V_{n-1} \subset V_n$  возьмем гильбертовы пространства, удовлетворяющие требованию гладкости решения исходной задачи, но, вообще говоря, для элементов которых условия на  $\partial\Omega$  необязательно выполняются. Здесь  $n = \dim V_n$ . Для каждого фиксированного  $n$  зададим правило выбора базисных функций  $\{\varphi_i\}_1^n$  в  $V_n$ .

Первый алгоритм состоит в том, что  $n$ -приближение  $(\eta_n = (w_n, \Phi_n))$  строится в виде

$$(2.1) \quad \eta_n = \sum_{i=1}^n c_i \circ \varphi_i, \quad c_i = (c_i^1, c_i^2), \quad c \circ \varphi \stackrel{\text{def}}{=} (c^1 \varphi^1, c^2 \varphi^2),$$

причем коэффициенты разложения  $c_i$  определяются из нелинейной

алгебраической системы Бубнова

$$(2.2) \quad f_i(c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, p) = 0, \quad i = \overline{1, 2n}.$$

Явные выражения для функций  $f_i$  не выписываются, так как техника их получения хорошо известна.

Пусть  $\xi$  — параметр ( $-\infty < \xi < 0$ ). Введем переменную  $\tau = \mu^{\xi} \times \times (1 - r)$ . Аналогично изложенному зададим другую последовательность гильбертовых пространств  $\{\Pi_k\}$ ,  $\Pi_1 \subset \Pi_2 \subset \Pi_3, \dots, \Pi_{k-1} \subset \Pi_k$ , которая, во-первых, принадлежит заданному классу в смысле ограничения гладкости, во-вторых, позволяет компенсировать невязку в граничных условиях и некоторой зоне опорного контура оболочки. Обозначим базисные функции в  $\Pi_k$  через  $\{\psi_j\}_1^n$ , где  $\psi_j = \mathcal{P}^j \rho_j$ ,  $\mathcal{P}^j$  — полиномиальная форма от  $\tau$ ,  $\rho_j = \exp(-\lambda_j \tau)$ ,  $\infty > \operatorname{Re} \lambda_j > \delta > 0$ . Предполагается, что экспоненциальный множитель  $\rho_j$  для каждого члена последовательности пробных пространств  $\{\Pi_k\}$  выделяется явным образом, хотя численное значение параметров  $\lambda_j$  может быть неизвестным.

Второй алгоритм заключается в разложении  $\Pi_{kn} = = \eta_n + (w_{kn}, \Phi_{kn})$  по двум системам функций

$$(2.3) \quad \mathbf{H}_{kn} = \sum_{i=1}^n c_i \circ \varphi_i + \sum_{j=1}^n d_j \circ \psi_j, \quad d_j = (d_j^1, d_j^2)$$

( $d_j$  — неизвестные коэффициенты). Для их определения подставим (2.3) в уравнения теории оболочек и граничные условия, предварительно переменную  $r$  в коэффициентах и дифференциальных операторах выразим через  $\tau$ . Соберем все выражения, которые не содержат элементов  $\psi_j$  и их производных. Далее, считая, что ряд (2.1) удовлетворяет уравнениям сферы с необходимой точностью  $\varepsilon$  на  $\Omega$ , кроме, может быть, малой зоны в окрестности опорного контура, и полученные выражения устойчивы относительно  $\varepsilon$ -возмущений, опустим все указанные члены. После упрощений каждое из оставшихся слагаемых в уравнениях сферической оболочки будет экспоненциально малым при больших  $\tau$ . Спроектировав преобразованные таким образом выражения на элементы последовательности  $\{\psi_j\}_\sigma^n$ , найдем вторую нелинейную алгебраическую систему Бубнова

$$(2.4) \quad g_i(c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, d_1, d_2, d_3, \dots, d_k, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = 0, \quad i = \overline{1, 2(k - \sigma)}.$$

Такое использование второго процесса Бубнова приводит к недоопределенной алгебраической системе относительно неизвестных  $d_1, d_2, \dots, d_k$ , так как в (2.4) содержится  $2k$  коэффициентов  $d_j = (d_j^1, d_j^2)$  и  $2(k - \sigma)$  уравнений. Дополнительные  $2\sigma$  уравнений выводятся из граничных условий. Присоединим их к системе Бубнова, и в дальнейшем (2.4) будет означать расширенную алгебраическую задачу.

Если показатели экспонент  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  известны, то, последовательно решая (2.2) и (2.4), с помощью (2.3) строим приближенное решение  $\mathbf{H}_{kn}$ . Однако в нелинейных задачах теории оболочек, за редким исключением, вопрос о численном значении  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  остается открытым.

Третий алгоритм. Для замыкания излагаемого метода подставим (2.3) в выражение функционала энергии. Тогда из условия

$$(2.5) \quad \mathcal{E} \rightarrow \inf_{\lambda_j}$$

легко найти остальные  $k$  уравнений. При минимизации функционала  $\mathcal{E}$  такими могли быть уравнения Ритца, если бы не существовало ограничения на  $\lambda_j$ . Последнее обстоятельство с необходимостью требует применения принципа максимума. Для того чтобы использовать его в традиционной форме, достаточно алгебраические задачи (2.2), (2.4) свести к задачам Коши с управляющими параметрами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  из области допусти-

мых значений, продифференцировав (2.2), (2.4) по давлению  $p$ . В этом случае функционалом качества может быть интеграл

$$J = - \int_0^p \partial ds,$$

а начальными условиями — тривиальные значения для  $c_i, d_j$  при  $p = 0$ .

Один из недостатков метода связан с громоздкостью вывода интегрируемых уравнений. Упростить предварительные аналитические выкладки при реализации проекционного метода удастся, если получающиеся системы дифференциальных уравнений не разрешать относительно производных  $(c_i)'_p$  и  $(d_j)'_p$ , но проводить эту процедуру численно на ЭВМ. При этом указанные величины содержат ошибки округлений. Тогда в основе корректного применения принципа максимума лежит соответствующая теорема не для дифференциальных уравнений, а для включений [1, 2]. Кроме того, в подготовительных выкладках при построении скалярного произведения также оказалось возможным применить ЭВМ, но здесь возникла необходимость при малых  $\lambda_j$  вычислять слагаемые, превосходящие допустимые разрядной сеткой числа. Тем самым при программной реализации сужалась область для управляющих параметров, и они не могли принимать значения на ЭВМ БЭСМ-6 меньше  $\sim 0,1$ .

Для продолжения решения по параметру  $p \in [0, p^*]$ , где  $p^*$  — точка бифуркации, на отрезке  $[0, p^*]$  задавалась направленная последовательность  $\{p^i\}$ . Решение между двумя любыми членами находилось методом Рунге — Кутты. В точках  $p^i$  оно уточнялось методом Ньютона. Расположение их определялось исходя из скорости сходимости итераций Ньютона.

При численном интегрировании уравнений тонких геометрически нелинейных оболочек интерес представляет продвижение в область возможно малых значений  $\mu$ , если отсутствует обоснование метода малого параметра при старших производных. В настоящее время при уменьшении  $\mu$  в 2—4 раза, как правило, требуется, по меньшей мере, модифицировать метод расчета [14].

Ниже приведены результаты численного анализа напряженно-деформированного состояния при  $\mu = 2 \cdot 10^{-19}$ , что близко к естественной границе — машинному нулю ЭВМ БЭСМ-6. Исследование ограничено осесимметричной постановкой

$$(2.6) \quad r \in (0, 1), \quad \mu \mathcal{A} f + \theta \omega r + (1/2) \omega^2 = 0, \\ \mu \mathcal{A} \omega - \theta f r - f \omega - (1/2) p r^2 = 0,$$

$$\mathcal{A}(\dots) = r \frac{d}{dr} r^{-1} \frac{d}{dr} r(\dots), \quad \Phi = \int_0^r f(t) dt, \quad w = \int_1^r \omega(t) dt \quad (r = 0, 1, f = \\ = \omega = 0).$$

В первом процессе Бубнова для аппроксимации каждой из неизвестных  $f$  и  $\omega$  задавался один степенной базис  $(1 + r^2) \times \{r^{2k+1}\}_0^n$ . При проектировании в  $L_2(0, 1)$  системы (2.6) использовались элементы вида  $\{r^{2k+1}\}_0^n$ . Во втором процессе Бубнова аналогичные координатные последовательности равны  $\{\tau^k\}_1^d \exp(-\lambda \tau)$  и  $\{\tau^k\}_1^d$  соответственно, где  $\tau = (1 - r)\mu^{-1/2}$ .

Значения первых четырех коэффициентов  $c_k$  для функции напряжений следующие: 0,132615; 0,120845; -0,079648; 0,024718 при  $k = 0; 1; 2; 3$ . Здесь и далее  $\theta = 0,15$ ,  $p = p^*$ ,  $n = 3$ . Ясны характерные закономерности разложения (2.3) — относительно медленное убывание коэффициентов  $c_k$  и чередование знаков при изменении  $k$ . Это позволяет предполагать, что точность результатов первого процесса Бубнова невысокая.

Таблица 1

$r_k$	$-10 f(r_k)$	$-10 f(r_k), \mu \rightarrow 0$	$r_k$	$-10 f(r_k)$	$-10 f(r_k), \mu \rightarrow 0$
0,1	0,132726	0,133566	0,6	0,802970	0,801576
0,2	0,266048	0,267192	0,7	0,934706	0,935172
0,3	0,400139	0,400788	0,8	1,068087	1,068764
0,4	0,534612	0,534384	0,9	1,203048	1,202364
0,5	0,668737	0,667983	1,0	1,334005	1,335960

Таблица 2

$k$	$d_k$ для $f$	$d_k$ для $\omega$	$k$	$d_k$ для $f$	$d_k$ для $\omega$
0	0,1334005	0,0000000	3	0,0106243	0,0080705
1	0,1670084	0,0249054	4	-0,0002632	-0,0002400
2	-0,1040459	-0,0579592			

В табл. 1 указаны точки  $r_k$  по меридиану оболочки и значения  $f(r_k)$ , вычисленные в приближении первого процесса Бубнова и формальным предельным переходом при  $\mu \rightarrow 0$  в уравнениях (2.6).

Видно, что, по крайней мере, вырожденная задача при таком убывании  $c_k$  с ростом  $k$  определяется с погрешностью, не превосходящей 0,6%, а в точке  $r = 1$  она даже равна 0,15%. Высокая точность в граничной точке очень важна для эффективности метода, так как в ней проводится согласование решений двух процессов Бубнова, при котором ошибки вычислений  $c_k$  переходят в ошибки  $d_k$ .

В табл. 2 приведены  $d_k$  для функции напряжений и угла поворота нормали элемента оболочки. Здесь в последней сумме в разложении (2.3) удержаны пять членов. Видно, что  $d_k$  быстро убывают с увеличением  $k$ . Таким образом, для обоих процессов Бубнова существует «внутренняя сходимость» ряда (2.3).

В изложенных расчетах параметр  $\lambda$ , характеризующий оптимальный вес пробного пространства  $\Pi_4$ , оказался равным 0,41375. Его значение определено из условия минимума потенциальной энергии на рассматриваемом приближении.

При реализации проекционного метода в высоких приближениях задачи (2.2), (2.4) оказываются плохо обусловленными в том смысле, что в методе Ньютона возникают плохо обусловленные линейные алгебраические уравнения. Этот факт установлен на основе анализа сингулярных чисел соответствующих матриц, в котором учитывались ошибки округления по методике, изложенной в [15], а необходимый для этой цели комплекс программ предоставлен автором [16].

На рис. 1, 2 приведены усилия в срединной поверхности оболочки. Видны следующие закономерности: 1)  $N_\varphi$ ,  $N_r$  — немонотонные функции

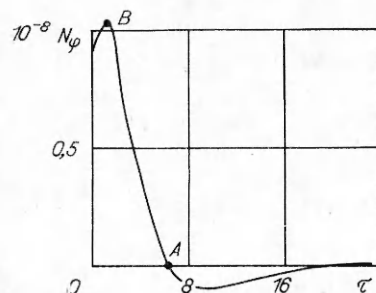


Рис. 1

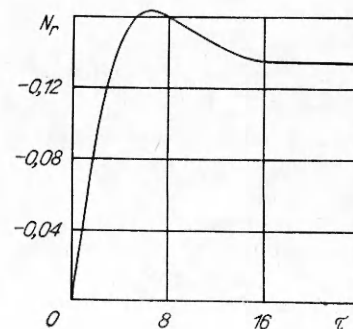


Рис. 2

переменной  $\tau$ ; 2) существует точка  $A$ , в которой имеет место одноосное напряженное состояние; 3) в зоне пограничного слоя есть окрестность  $T = \{\tau < 6,4 | N_\Phi > 0\}$  такая, что в ней сфера растягивается; 4) точка локализации максимальных усилий  $B$  хотя и расположена близко к границе  $\partial\Omega$ , но ей не принадлежит.

В целом для напряженного состояния в зоне краевого эффекта справедливо соотношение  $N_\Phi \gg N_r$ . Следовательно, усилие  $N_\Phi$  определяет деформирование сферической оболочки в этой области при малых  $\mu$ .

Изложенным методом найдено критическое давление  $p^* = 0,4454$ , что превосходит результаты метода пристрелки при возможно малых  $\mu$  лишь на 3,8%. Ранее неоднократно предпринимались попытки с целью его вычисления при  $\mu \in [\mu_0, 0)$ ,  $\mu_0 \ll 1$ . Однако они не привели к положительному результату. Объясняется это тем, что отсутствовала методика аппроксимации уравнений пограничного слоя в окрестности точек ветвления, поэтому возникала необходимость решать плохо обусловленные системы алгебраических уравнений. Разработанный метод позволяет получать равномерную по  $\mu$  аппроксимацию решения уравнений Маргерра — Власова для сферы, а его реализация на ЭВМ показала, что он закрывает вопрос об их численном интегрировании и в области возможно малых  $\mu$  в осесимметричной постановке.

Определены также последовательность точек неосесимметричной бифуркации  $\{p_l\}$  и критическое давление  $p_c = \min_l \{p_l\}$ . Здесь  $p_l$  есть собственное значение краевой задачи

$$\begin{aligned} \mu \Delta_l^2 W_l &= \theta \Delta_l \Phi_l + f' H_l W_l + \beta' H_l \Phi_l + (\beta \Phi_l'' + f W_l'') r^{-1}, \\ \mu \Delta_l^2 \Phi_l &= -\theta \Delta_l W_l - \beta' H_l W_l - \beta W_l'' r^{-1}, \quad r=1, \quad W_l = W_l' = 0, \\ H_l \Phi_l &= I_l \Phi_l = 0, \\ r H_l(\dots) &= (\dots)' - l^2 r^{-1}(\dots), \quad r I_l(\dots) = -l[(\dots) r^{-1} - (\dots)'] I, \\ \Delta_l(\dots) &= (\dots)'' + (\dots)' r^{-1} - l^2 r^{-2}(\dots), \end{aligned}$$

которая получается из (1.1) разложением решения в ряд Фурье и линеаризацией ее в окрестности осесимметричного решения  $(\beta, f)$ . Показатели экспонент  $\lambda_k^l$  базисных функций найдены из условия

$$G_n^l \rightarrow \inf_{\{\lambda_k^l\}} G_n^l \stackrel{\text{def}}{=} G(W_l^n, \Phi_l^n),$$

$$G(W_l, \Phi_l) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \rho(r) [\mu (W_l \Delta_l^2 W_l - \Phi_l \Delta_l^2 \Phi_l) - W_l (f' H_l W_l + f W_l'') r^{-1} - 2W_l (\theta \Delta_l \Phi_l + \beta' H_l \Phi_l + r^{-1} \beta \Phi_l'')] r dr,$$

$$W_l^n = \sum_{k=2}^n a_{k,l}^1 \psi_k^l, \quad \Phi_l^n = \sum_{k=2}^n a_{k,l}^2 \psi_k^l, \quad \psi_k^l = \tau^k \exp(-\lambda_k^l \tau),$$

где  $\rho(r)$  — весовая функция;  $a_{k,l}^i$  — неизвестные коэффициенты разложения ( $i = 1, 2$ ).

Расчеты проведены для  $\mu = 8,5 \cdot 10^{-5}$ ,  $\theta = 0,15$ ,  $n = 6$ ,  $\rho(r) = r^4$ ,  $\lambda_2^l = \lambda_3^l = \dots = \lambda_6^l = \lambda^l$ . Оказалось, что значение  $\lambda^l$ , на котором функционал  $G_6^l$  достигает минимума, равно 0,300, а отвечающие ему критическое давление и параметр волнообразования принимают соответственно значения 0,2339 и 20.

**3. Кинематические соотношения.** При выводе уравнений геометрически нелинейной теории оболочек, как правило, требуется выполнение двух ограничений: уравнения должны быть настолько простыми, чтобы допускали численное интегрирование; в тензоре деформаций необходимо удерживать все нелинейные члены, определяющие напряженно-деформированное состояние.

Т а б л и ц а 3

$\mu$	$p_c$	$l$	$\mu$	$p_c$	$l$	$\mu$	$p_c$	$l$
$\theta=0,6$			$\theta=0,8$			$\theta=1,0$		
0,013			0,013	0,7356	2	0,013	0,7185	3
0,011	0,7668	2	0,011	0,7290	3	0,011	0,7034	4
0,009	0,7428	2	0,009	0,7305	3	0,009	0,7190	4
0,007	0,7470	2	0,007	0,7210	4	0,007	0,7519	4

В соответствии с существующей методикой при формулировке краевой задачи принимается следующий план исследований. Из механических соображений задаются кинематические соотношения, а затем, согласно [17], выводятся уравнения равновесия и совместности деформаций.

В табл. 3 указаны критические давления  $p_c$  сферической оболочки с защемленным краем и отвечающие им номера гармоник ряда Фурье  $l$ . Геометрия срединной поверхности здесь не отождествлялась с плоскостью [18].

Видно, что в рассматриваемом диапазоне изменения  $\mu$  и  $\theta$  номера гармоник  $l$  не превосходят четырех. Для  $l \leq 3$  среди опущенных выражений в более полном представлении тензора деформаций имеются сравнимые с квадратичными членами, приведенными в (1.3). Если их восстановить, то появляются два новых слагаемых в кинематических соотношениях

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= A^{-1} [u'_\alpha + B^{-1} A'_\beta v] - k_\alpha w + k_\alpha^2 w^2 + (1/2) \omega_\alpha^2, \\ \varepsilon_\beta &= B^{-1} v'_\beta + B'_\beta u - k_\beta w + k_\beta^2 w^2 + (1/2) \omega_\beta^2, \\ AB\varepsilon_{\alpha\beta} &= B^2 (B^{-1} v'_\alpha + A^2 (A^{-1} u'_\beta + \omega_\alpha \omega_\beta). \end{aligned}$$

При  $\mu < 0,007$  можно предположить, что деформации из (3.1) и (1.3) близки вследствие того, что оболочка в условии сингулярного возмущения деформируется в основном в некоторой окрестности края. В то же время здесь углы поворота нормали элемента оболочки удовлетворяют неравенствам  $|\omega_\eta| \gg k_\eta w$ ,  $\eta = \alpha, \beta$ . Численный анализ, однако, показывает, что в рамках такой модели в указанной области также могут уточняться известные ранее результаты, если учитывается вся последовательность  $\{p_l\}$ , так как при  $p_l \gg p_c$  возможно ветвление решения при малых  $l$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г. и др. Математическая теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1976.
2. Благодатских В. И. Задача оптимального управления для дифференциальных включений: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— М.: МГУ, 1983.
3. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1980.
4. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы.— М.: Наука, 1981.
5. Ларченко В. В. Асимптотический анализ неосесимметричных форм равновесия тонкой пологой сферической оболочки // ПММ.— 1980.— Т. 44, вып. 6.
6. Алузян Н. А. Одна вариационная формула для исследования тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии // ПММ.— 1950.— Т. 14, вып. 2.
7. Friedrichs K. O., Stoker J. J. The non-linear boundary value problem of the buckled plate // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1939.— V. 25, N 10.
8. Friedrichs K. O., Stoker J. J. Buckling of the circular plate beyond the critical thrust // J. Appl. Mech.— 1942.— V. 9, N 1.
9. Sunakawa M., Ichida K. A High precision experiment on the buckling of spherical caps subjected to external pressure // Inst. of Space and Aeron. Science. Univer. of Tokyo, 1974.— Rep. N 508.
10. Тонкостенные оболочечные конструкции/Под ред. Э. И. Григолюка.— М.: Машиностроение, 1980.
11. Корнев В. М. О решении задач устойчивости оболочек с учетом плотности собственных значений // Теория оболочек и пластин.— Л.: Судостроение, 1975.
12. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М.: Наука, 1977.

13. Orszad S. A., Patera A. T. Secondary instability of wallboundary shear flows // J. Fluid Mech.— 1983.— V. 128.— P. 347.
14. Ларченко В. В., Мельник В. В. Расчет непологих сферических оболочек при термосиловом нагружении // Изв. АН СССР. МТТ.— 1975.— № 4.
15. Годунов С. К. Решение систем линейных уравнений.— Новосибирск: Наука, 1980.
16. Ляпидевская З. А. Комплекс процедур по линейной алгебре.— Новосибирск, 1980.— (Препринт/ВЦ СО АН СССР; № 259).
17. Муштари Х. Н., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек.— Казань: Таткнигоиздат, 1957.
18. Ларченко В. В. Нелинейная устойчивость и оценка эффективности асимптотического метода в упругих сферических оболочках при различных граничных условиях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Ростов н/Д: Рост. ун-т, 1977.

Поступила 26/V 1986 г.

УДК 532

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ОБТЕКАЮЩЕЙ УПРУГОЕ ТЕЛО

А. П. Михайлов, С. О. Савченко  
(Новосибирск)

При обтекании вязким несжимаемым потоком неподвижной стенки, как известно, существует традиционная кривая нейтральной устойчивости. Она ограничивает зону неустойчивости для волны Толлмина — Шлихтинга в плоскости значений числа Рейнольдса и волнового числа. Имеется ряд работ (см., например, [1—3]), где изучалось влияние податливости обтекаемой стенки на положение этой кривой нейтральной устойчивости, а также (см. [4, 5]) устойчивость упругого тела (полупространства) в потоке идеальной жидкости (сжимаемой и несжимаемой). В частности, отмечается повышение устойчивости ламинарного потока (затягивание перехода в турбулентный режим) и появление новых видов неустойчивости типа Кельвина — Гельмгольца или гидрорупругого флаттера.

В данной работе исследуются совместные колебания упругого слоя (полупространства) и обтекающего вязкого несжимаемого потока жидкости. Оказывается, что при этом возможна неустойчивость нового вида, предельным состоянием которой при уменьшении относительной плотности потока является рэлеевская волна в упругом теле.

В области  $G_2$  (верхнее полупространство) рассматривается плоское (в плоскости  $xOz$ ) течение несжимаемой вязкой жидкости, обтекающей упругое нижнее полупространство (область  $G_1$ ), в котором под действием переменного давления возникают поверхностные волны. Течение жидкости описывается линеаризованными уравнениями Навье — Стокса с компонентами скорости  $v_x$ ,  $v_z$  и давлением  $p$ , представляющими малые отклонения от основного невозмущенного течения с параметрами  $U = U(z)$ ,  $V = 0$ ,  $P = P(x)$ .

Пусть  $U_0$  — скорость невозмущенного потока вдоль оси  $x$  на бесконечности,  $\rho_2$  — плотность жидкости. Компоненты скорости связаны с функцией тока соотношениями  $v_x = \partial\psi/\partial z$ ,  $v_z = -\partial\psi/\partial x$ .

В предположении только периодических по оси  $x$  возмущений течения функцию тока представим в форме бегущей волны

$$\psi(x, z, t) = \varphi(z)e^{i\alpha x - i\omega t},$$

где  $\alpha$  — безразмерное волновое число;  $\omega$  — частота колебаний. Все остальные переменные параметры потока и обтекаемого упругого тела будем считать пропорциональными гармонике того же вида

$$(1) \quad \theta(x, z, t) = \vartheta(z)e^{i\alpha x - i\omega t}.$$

В области  $G_2$  рассматривается также пограничный слой толщины  $\delta_0$ , так что  $U(\delta_0) = U_0$ . Задача для возмущения скоростей сводится к известному уравнению Орра — Зоммерфельда

$$(2) \quad (U - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi = -\frac{i}{\alpha \text{Re}} (\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi).$$