

А. В. Селихов*(Новосибирск)***ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ
КЛЕТочНОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ
С ВНЕШНИМИ ВХОДАМИ**

Клеточная нейронная сеть (КНС) известна как мелкозернистая параллельная модель, способная генерировать автоволны различных типов. Такое свойство КНС позволяет рассматривать ее как новую модель автоволновых процессов в распределенных активных средах и определяет необходимость в дальнейшем детальном исследовании свойств этой модели. Описана модификация КНС-модели, не имеющая параметра смещения у нейрона, и ее свойства. Определены способы использования внешних входов для модификации свойств КНС и для генерации автоволновых процессов.

Введение. Клеточная нейронная сеть (КНС) [1] является мелкозернистой моделью параллельной обработки информации и интенсивно исследуется как модель различных распределенных нелинейных процессов, в частности автоволн. В работах [2–4] рассмотрена двумерная двухслойная клеточная нейронная сеть, способная генерировать нелинейные волны, аналогичные автоволновым процессам типа «бегущий фронт», «бегущий импульс», «ревербератор» (спиральная автоволна), наблюдаемым в распределенных нелинейных системах естественной природы.

Клеточная нейронная сеть, свойства которой детально описаны в [4], представляет собой двумерную решетку клеток, имеющих взвешенные связи с клетками в ближайшей окрестности и состоящих из двух нейронов. Динамика каждой изолированной клетки (нейронной пары) описывается системой двух дифференциальных уравнений первого порядка. Для придания сети клеток КНС свойства активности, необходимого для генерации автоволновых процессов, используется формирование устойчивого предельного цикла на фазовой плоскости клетки посредством задания соответствующих значений ее параметров. Существование у сети одного или двух состояний равновесия, необходимых для генерации бегущего импульса или бегущего фронта, достигается последующим преобразованием предельного цикла в совокупность предельных траекторий и устойчивых точек равновесия. Одной из особенностей этой КНС является зависимость ее динамических свойств от выполнения равенства в требуемых соотношениях параметров

клетки, что является очевидным потенциальным ограничением такой КНС как модели автоволновых процессов в реальных системах и, кроме того, может потребовать более сложную аппаратную реализацию КНС с заданными свойствами. В предлагаемой работе описывается модификация КНС, позволяющая избежать такой нежелательной зависимости путем устранения одного параметра нейрона и использования внешних входов, а также описаны способы использования внешних входов в такой КНС для управления ее динамическими свойствами и для задания с их помощью внешних воздействий, инициирующих требуемые автоволновые процессы.

Модифицированная КНС-модель. Клеточная нейронная сеть, предложенная в работе [4] и используемая для исследования качественных свойств двумерных автоволновых процессов, представляет собой двумерную решетку клеток, связанных с ближайшими соседями. Вся клеточная нейронная сеть описывается системой дифференциально-разностных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + ay_1 + by_2 + z_1 + D_1(y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} - 4y_1), \\ \dot{x}_2 = \beta x_2 + cy_1 + dy_2 + z_2 + D_2(y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24} - 4y_2), \end{cases}$$

где D_1 и D_2 – веса связей между нейронами данной клетки и нейронами клеток в ее ближайшей окрестности; $y_{1i}, y_{2i}, i = 1, \dots, 4$, – выходы нейронов клеток ближайшей окрестности. Эта система содержит в правой части уравнений слагаемые, характеризующие как функционирование самой клетки (активная составляющая), так и взаимодействие клеток в сети (диффузионная составляющая).

Изолированная клетка КНС описывается системой двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 + ay_1 + by_2 + z_1; \\ \dot{x}_2 &= \beta x_2 + cy_1 + dy_2 + z_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha, \beta, a, b, c, d$ – параметры, характеризующие свойства нейронов в клетке и их взаимосвязь; z_1 и z_2 – параметры, называемые смещением; $y_i(x_i)$ – функция активации нейрона

$$y_i = \frac{1}{2} (|x_i + 1| - |x_i - 1|), \tag{2}$$

являющаяся кусочно-линейной функцией сигмоидного типа (рис. 1, *a*) и разбивающая фазовую плоскость клетки на линейные подобласти (рис. 1, *b*), в которых становится простым анализ свойств единственно возможной точки равновесия и имеющих место траекторий.

В соответствии с ранее полученными результатами [2–4] свойство активности КНС, выражающееся в способности клетки генерировать автоколебание при любом сколь угодно малом смещении ее состояния из положения равновесия в область неустойчивости, может быть реализовано путем формирования на фазовой плоскости клетки, описываемой системой (1), устойчивого предельного цикла и преобразования этого предельного цикла в одну или две предельные траектории, задавая специальные значения параметров

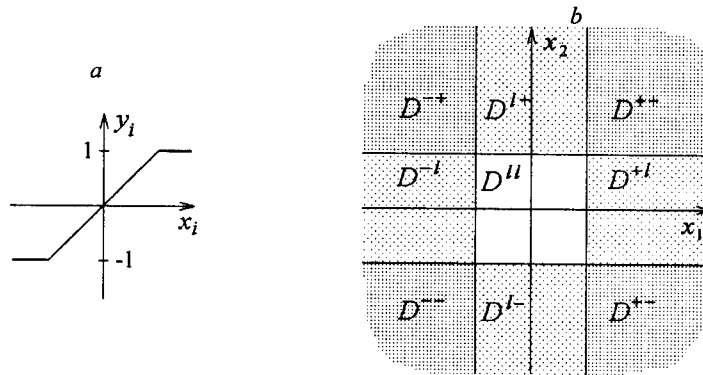


Рис. 1. Кусочно-линейная функция активации нейрона (а) и подобласти (D^{++} , ...) фазовой плоскости клетки КНС (b)

x_1 и x_2 при фиксированных значениях остальных параметров клетки. Условие существования предельного цикла [4] на фазовой плоскости клетки определяется системой неравенств:

$$\begin{aligned}
 \alpha &< 0; \\
 \beta &< 0; \\
 a &> -\alpha; \\
 d &> -\beta; \\
 (\alpha - \beta + a - d)^2 + 4bc &\leq 0; \\
 \alpha + a - |b| + |z_1| &< 0; \\
 \beta - |c| + d + |z_2| &< 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Активность клетки такой КНС определяется положением ее изображающей точки на фазовой плоскости относительно границ между подобластями, в одной из которых все траектории стремятся к устойчивой, а в другой – направлены от неустойчивой точки равновесия. Наибольшей активностью характеризуется клетка, состояние которой находится в точке равновесия, расположенной непосредственно на границе между подобластями, причем таких точек может быть одна или две или не быть ни одной. На рис. 2 показаны точки равновесия и предельные траектории на фазовой плоскости.

Для различных комбинаций расположения устойчивых точек равновесия имеют место следующие равенства для параметров клетки:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \pm(\alpha + a - |b|); \\
 z_2 &= \pm(\beta - |c| + d).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Выполнение одного или двух этих равенств определяет преобразование предельного цикла в одну или две предельные траектории с соответствующим количеством устойчивых точек равновесия, лежащих на границах подобластей (см. рис. 2).

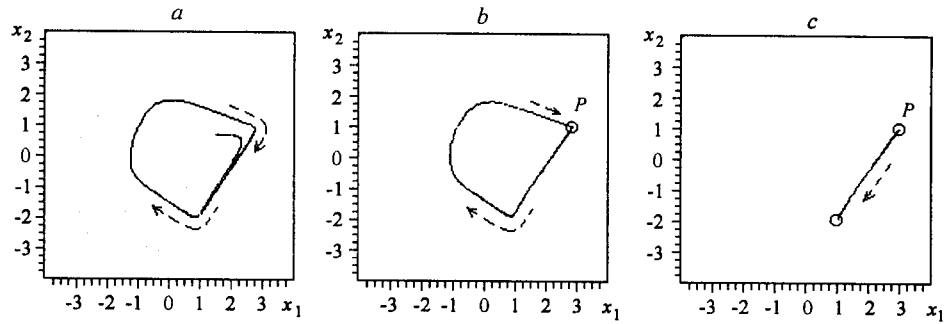


Рис. 2. Точки равновесия и предельные траектории на фазовой плоскости клетки: без устойчивых точек равновесия (а), с одной (b) и с двумя устойчивыми точками равновесия (с)

Подстановка выражений (4) в систему уравнений (1) дает модифицированную модель изолированной клетки, описываемую системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + ay_1 + by_2 \pm (\alpha + a - |b|); \\ \dot{x}_2 = \beta x_2 + cy_1 + dy_2 \pm (\beta - |c| + d). \end{cases} \quad (5)$$

Клетка, описываемая системой (5), при условии выполнения ограничений на параметры, представленных первыми пятью неравенствами системы (3), всегда имеет на фазовой плоскости две устойчивые точки равновесия, расположенные на границах между подобластями, и две предельные траектории, ведущие от одной точки к другой (знаки перед выражениями в скобках определяют четыре различных расположения точек равновесия на фазовой плоскости). При этом существенным является то, что как бы ни были заданы параметры системы (5) в рамках ограничений, определяемых указанными неравенствами из (3), при фиксированных знаках перед скобками количество и тип точек равновесия, а также расположение и направление предельных траекторий на фазовой плоскости клетки останутся неизменными.

Результирующая система уравнений, описывающая модифицированную КНС, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + ay_1 + by_2 \pm (\alpha + a - |b|) + D_1(y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} - 4y_1); \\ \dot{x}_2 = \beta x_2 + cy_1 + dy_2 \pm (\beta - |c| + d) + D_2(y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24} - 4y_2). \end{cases} \quad (6)$$

Управление свойствами модифицированной клеточной нейронной сети. Клеточная нейронная сеть (6) способна генерировать автоволновой процесс, переводящий состояния клеток из одной точки равновесия в другую. Автоволновой процесс такого типа называется бегущим фронтом и имеет место во многих естественных нелинейных динамических системах. Распространение одиночного кругового бегущего фронта в КНС без смещений показано на рис. 3, а. Большого разнообразия автоволновых процессов, генерируемых с помощью такой КНС, можно добиться, используя внешние входы для изменения свойств фазовой плоскости клетки.

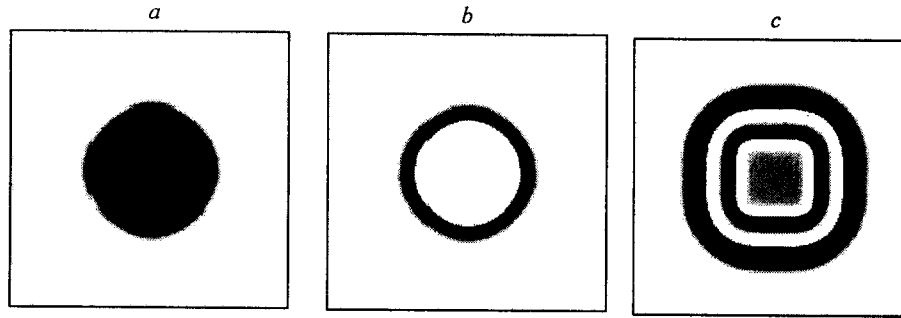


Рис. 3. Автоволновые процессы в КНС без смещений: бегущий фронт (а); бегущий импульс (b); синхронные автоколебания подобласти размером 30×30 клеток в центре КНС (серый квадрат), порождающие расходящиеся бегущие импульсы (с)

В рассматриваемой модифицированной КНС внешние входы являются взвешенными и имеют аддитивный характер: каждый нейрон в клетке имеет свой собственный внешний вход и при определении нового значения состояния нейрона взвешенное значение внешнего входа суммируется со значением предыдущего состояния нейрона. Изолированная клетка без смещений и с внешними входами описывается системой

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + ay_1 + by_2 \pm (\alpha + a - |b|) + w_1 u_1; \\ \dot{x}_2 = \beta x_2 + cy_1 + dy_2 \pm (\beta - |c| + d) + w_2 u_2, \end{cases} \quad (7)$$

где u_1 и u_2 – внешние входы первого и второго нейронов клетки; w_1 и w_2 – веса этих внешних входов соответственно.

Поскольку влияние внешних входов на координаты точек равновесия на фазовой плоскости клетки, описываемой системой уравнений (5), имеет такой же характер, что и влияние параметров z_1 и z_2 в клетке (1) [4], т. е. смещает точки равновесия по координате x_1 и/или x_2 , но не изменяет их типа и устойчивости, внешние входы могут быть использованы для уменьшения количества устойчивых точек равновесия.

Как показано в работах [2, 4], благодаря свойствам фазовой плоскости клетки в каждой подобласти фазовой плоскости может существовать единственная устойчивая или неустойчивая точка равновесия. Координаты такой точки равновесия, определяемые параметрами клетки, могут располагать эту точку как в самой подобласти, где точка равновесия найдена, так и за ее пределами. В первом случае точку равновесия принято называть реальной, во втором – виртуальной. Виртуальная точка равновесия не может являться предельной для какой-либо траектории на фазовой плоскости (и поэтому, строго говоря, не является точкой равновесия), а лишь определяет направления траекторий в своей подобласти.

Использование внешнего входа клетки для смещения реальной устойчивой точки равновесия в подобласть, где она является виртуальной, позволяет уменьшить количество состояний равновесия всей клеточной нейронной сети и получать распределенный процесс типа бегущий импульс (рис. 3, b) или синхронные автоколебания (рис. 3, c) при уменьшении количества ре-

альных устойчивых точек равновесия на фазовой плоскости до одной или при их полном отсутствии соответственно.

Инициирование автоволновых процессов с помощью внешних входов. Инициирование автоволновых процессов в клеточной нейронной сети, находящейся в состоянии равновесия, может осуществляться с помощью задания необходимых начальных условий, выражающихся в измененном состоянии одной или нескольких клеток по отношению ко всем остальным. При этом начальные условия имеют место только для момента времени $t_0 = 0$ и не поддерживаются при дальнейшем функционировании сети. Характер такого инициирования автоволновых процессов в КНС определяет вмешательство в состояние сети только в начальный момент времени; далее сеть функционирует самостоятельно без какого-либо влияния извне. Большой интерес представляет возможность инициирования автоволновых процессов в КНС при помощи внешних входов, отражающих, например, действия экспериментатора или какое-то внешнее воздействие на сеть, поскольку именно внешнее воздействие часто приводит к возникновению распределенных нелинейных процессов в системах естественного происхождения.

Возникновение автоволнового процесса [3] в клеточной нейронной сети основывается на элементарном взаимодействии двух клеток, одна из которых находится в состоянии равновесия, а другая выведена из этого состояния вследствие влияния начального условия, при этом изображающая точка ее состояния начинает движение вдоль предельной траектории. Решающим фактором, иницирующим автоволновой процесс, является смещение состояния клетки из точки равновесия в том направлении и на такую величину, которые приведут к движению изображающей точки клетки на фазовой плоскости вдоль всей предельной траектории или до следующей точки равновесия. Было показано [3], что для инициализации автоволнового процесса достаточно смещения состояния клетки по одной из координат (в зависимости от расположения состояния равновесия на фазовой плоскости) и на сколь угодно малую величину.

Внешние входы позволяют изменять состояние одной или нескольких клеток для инициализации автоволнового процесса аналогично использованию начальных условий. Так же как и для начальных условий, для внешних воздействий можно определить необходимые условия возникновения автоволнового процесса.

Согласно определению в точке равновесия изменение состояния системы равно нулю, т. е.

$$\frac{dx_i}{dt} = 0.$$

При отсутствии внешних входов это определяет равенство нулю правых частей уравнений системы (7), т. е.

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + ay_1 + by_2 \pm (\alpha + a - |b|) &= 0; \\ \beta x_2 + cy_1 + dy_2 \pm (\beta - |c| + d) &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим случай, когда клетка находится в состоянии равновесия, изображающая точка которого расположена на прямой $x_2 = 1$. Переход клет-

ки в неустойчивое состояние и начало движения ее изображающей точки вдоль предельной траектории (рис. 2, с) в этом случае соответствуют уменьшению значения переменной состояния x_2 , т. е.

$$\frac{dx_2}{dt} < 0. \quad (9)$$

Подстановка (9) и второго равенства из (8) в уравнение (7) дает неравенство

$$w_2 u_2 < 0, \quad (10)$$

являющееся необходимым условием возникновения автоволнового процесса под действием внешнего входа u_2 в КНС, изображающие точки клеток которой находятся в точке равновесия, расположенной на прямой $x_2 = 1$. Аналогичным образом в КНС, клетки которой находятся в состоянии равновесия в точке, лежащей на прямой $x_1 = -1$, начало движения изображающей точки вдоль предельной траектории определяется неравенством

$$\frac{dx_1}{dt} > 0,$$

а необходимое условие возникновения автоволнового процесса под действием внешнего входа u_1 выражается неравенством

$$w_1 u_1 > 0. \quad (11)$$

На рис. 4 показано возникновение и распространение концентрических бегущих импульсов, генерируемых постоянным внешним воздействием на единственную клетку, имеющую при отсутствии воздействия одну устойчивую точку равновесия. В этом случае клетка, подверженная внешнему воздействию, не имеет на своей фазовой плоскости ни одной точки равновесия и ее состояние меняется в соответствии с имеющим место устойчивым предельным циклом. В случае, когда внешнее воздействие определено для клетки, имеющей две устойчивые точки равновесия на фазовой плоскости, состояние этой клетки переходит во вторую устойчивую точку равновесия, а в КНС генерируется одиночный бегущий импульс. Характеристики бегущих импульсов полностью определяются свойствами фазовой плоскости клетки КНС.

Использование внешних входов для изменения активности клеток. Влияние значений внешних входов на положение точек равновесия на фазовой плоскости клетки позволяет целенаправленно использовать внешние входы для изменения свойств клеток КНС. Основным свойством, характеризующим КНС как распределенную нелинейную систему, является активность ее

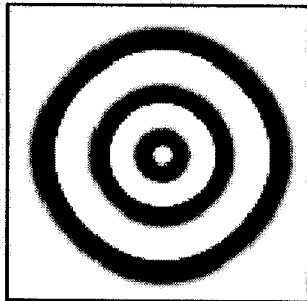


Рис. 4. Распространение концентрических бегущих импульсов, генерируемых постоянным внешним воздействием в КНС с одной устойчивой точкой равновесия на фазовой плоскости клетки

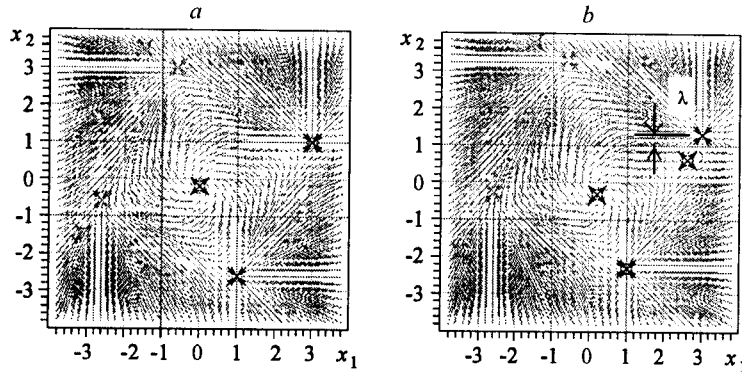


Рис. 5. Векторные поля и точки равновесия на фазовых плоскостях клетки модифицированной КНС (стрелки внутрь – устойчивая точка равновесия; стрелки наружу – неустойчивая точка равновесия): исходное состояние (а) и состояние со смещением устойчивых точек равновесия (б) для понижения активности клетки (увеличения порога ее чувствительности)

клеток. Клетки рассматриваемой КНС являются максимально активными (или максимально чувствительными) в том смысле, что для перевода их из состояния равновесия к движению вдоль устойчивого предельного цикла требуется сколь угодно малое смещение начального состояния клетки в необходимую подобласть. Такая активность клетки определяется положением устойчивых точек равновесия и начального состояния точно на границе между подобластями фазовой плоскости. Однако далеко не все активные системы обладают такой максимальной (предельной) активностью или имеют ее постоянно. Моделировать различную степень активности среды в КНС позволяет использование внешних входов для снижения уровня активности клеток путем отдаления устойчивых точек равновесия от границы в подобласть, которой они принадлежат (рис. 5).

Характеристикой таких клеток может являться порог активности λ_i , определяемый значением модуля разности координаты прямой – границы подобластей, на которой эта точка располагалась до смещения, и соответствующей координаты этой точки равновесия, т. е.

$$\lambda_1 = |x_1^* - x_1^e|,$$

где x_1^* – координата x_1 прямой – границы между подобластями, на которой располагалась точка равновесия при отсутствии смещающего внешнего воздействия; x_1^e – координата x_1 точки равновесия.

На рис. 6 показано распространение бегущего импульса в КНС с различными порогами активности в разных областях сети. Эксперименты проводились на компьютерной модели КНС размером 150×150 клеток с параметрами: $\alpha = \beta = -1,0$; $a = d = 1,8$; $b = -c = 1$; $D_1 = D_2 = 0,3$; $w_1 = w_2 = 1,0$. В левой части исследовавшейся КНС было установлено значение $\lambda_2 = 0,3$ при помощи соответствующего внешнего входа $u_2 = 0,3$ ($u_1 = 0$), а в правой области клеток КНС использовались значения $u_1 = -0,1$, $u_2 = 0$.

Результаты экспериментов показывают, что в области клеток с более высоким порогом активности (т. е. с меньшей чувствительностью клетки к начальному воздействию) автоволна возникает с запозданием, пропорциональным времени перехода состояния клетки на границу между подобластями.

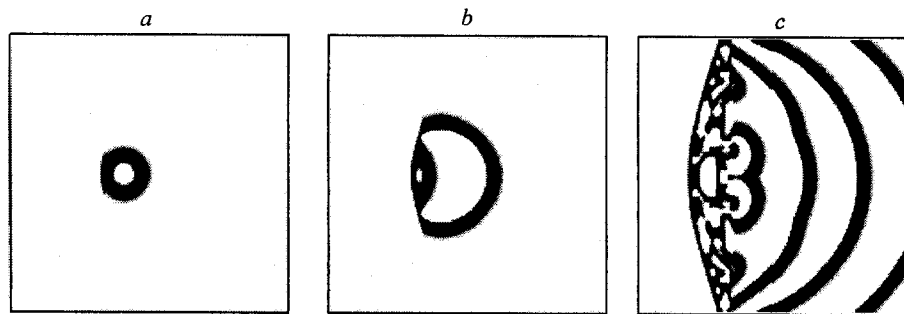


Рис. 6. Распространение бегущего импульса в КНС, имеющей области клеток с различным порогом активности: начало распространения одиночного кругового бегущего импульса вблизи границы областей КНС (а); возникновение импульса, отраженного от границы (b); автогенерация бегущих импульсов вблизи границы областей (с)

Форма и амплитуда автоволны в области клеток с измененным порогом активности меняются в зависимости от нового положения точек равновесия. Кроме того, уменьшение скорости распространения волны в подобласти с большим порогом чувствительности приводит к возникновению сложной неустойчивости, распространяющейся в обе стороны от границы областей КНС с разной активностью клеток (см. рис. 6).

Заключение. В работе представлена модифицированная клеточная нейронная сеть, обладающая большей устойчивостью свойств клетки при изменении ее параметров. Эта КНС имеет меньшее количество параметров и без использования внешних входов способна генерировать автоволновой процесс типа бегущий фронт вследствие наличия на фазовой плоскости ее клетки двух состояний равновесия. Свойства клетки в модифицированной КНС являются более устойчивыми по отношению к неточности выбора значений параметров, что существенно улучшает ее аппаратную реализуемость. Разнообразие генерируемых автоволновых процессов, свойственное для рассматривавшихся ранее КНС, достигается в этой модели посредством использования взвешенных внешних входов. Такой подход к влиянию внешнего воздействия на свойства модели представляется более естественным и соответствующим реальным активным средам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chua L. O., Yang L. Cellular neural networks: theory and applications // IEEE Trans. on Circuits and Systems. 1988. **35**, N 10. P.1257.
2. Arena P., Baglio S., Fortuna L., Manganaro G. Self-organization in a two-layer CNN // IEEE Trans. on Circuits and Systems. Pt. I. 1988. **45**, N 2. P.157.
3. Selikhov A. A formal background for basic type autowaves formation by a cellular neural network // Proc. of the 2-nd Intern. Conf. "Control of Oscillations and Chaos" (COC 2000). 2000. Vol. 1. P. 29.
4. Селихов А. В. Условия формирования автоволнового процесса в клеточной нейронной сети // СибЖВМ. 2000. **3**, № 4. С. 377.

Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
E-mail: selikhov@ssd.sccc.ru

Поступила в редакцию
23 октября 2001 г.