

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРЕЩИН И ДВОЙНИКОВ ВДОЛЬ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Э. П. Фельдман (Харьков)

Рассмотрим полубесконечную трещину в анизотропной полосе толщиной $2h$. Предположим, что плоскость трещины параллельна границам полосы, и трещина удерживается в раскрытом состоянии некоторыми внешними напряжениями. Расположение трещины относительно границ полосы изображено на фиг. 1 (рассматриваем плоскую задачу). Будем изучать процесс распространения трещины при возрастании внешней нагрузки.

Как известно [1], тонкую равновесную трещину можно описать формальным образом как совокупность находящихся в равновесии дислокаций, распределенных по берегам трещины. Векторы Бюргера этих дислокаций перпендикулярны плоскости трещины. Такой подход эквивалентен методу, развитому Г. И. Баренблаттом [2].

Введя плотность дислокаций $\rho(x)$, можно следующим образом записать интегральное уравнение равновесия трещины в данном случае:

$$\int_0^{\infty} \sigma_{yy}^{\delta}(x' - x, y_0) \rho(x') dx' = \frac{1}{b} [S(x) + \sigma_{yy}^e(x)] \quad (1)$$

Здесь $\sigma_{yy}^{\delta}(x' - x, y_0)$ — напряжения, создаваемые в точке (x, y_0) дислокацией, находящейся в точке (x', y_0) . Поскольку полоса предполагается бесконечной в направлении оси x , эти напряжения, естественно, зависят лишь от разности $x' - x$. Остальные обозначения таковы: $\sigma_{yy}^e(x)$ — внешние напряжения, которые были бы в точке (x, y_0) при отсутствии трещины; b — вектор Бюргера дислокации; $S(x)$ — сила межмолекулярного притяжения.

Так как $\sigma_{yy}^{\delta}(x' - x, y_0) \approx \text{const} / (x' - x)$ при $(x' - x) \rightarrow 0$, то интегральное уравнение (1) относительно плотности дислокаций $\rho(x)$ будет сингулярным, и интеграл понимается в смысле главного значения.

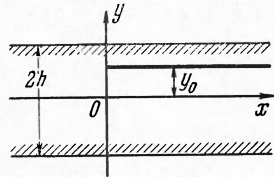
Решив уравнение (1), можно определить форму трещины согласно соотношению

$$h(x) = b \int_0^x \rho(x') dx' \quad (2)$$

где $h(x)$ — высота раскрытия трещины в данной точке. Рассматриваем решения уравнения (1), ограниченные в нуле, поскольку в противном случае, согласно (2), не будет обеспечено условие плавного смыкания берегов трещины в ее устье [2].

Необходимым и достаточным условием существования такого решения будет, как известно [3], выполнение соотношения

$$\int_0^{\infty} \omega(x) [S(x) + \sigma_{yy}^e(x)] dx = 0 \quad (3)$$



Фиг. 1

где функция $\omega(x)$ — решение сопряженного однородного уравнения, соответствующего (1)

$$\int_0^{\infty} \omega(x') \sigma_{yy}^{\delta}(x - x', y_0) dx' = 0 \quad (4)$$

Соотношение (3) эквивалентно условию обращения в нуль коэффициента концентрации нормальных напряжений, возникающих вблизи конца трещины [2]. Кроме того, наличие трещины вызывает концентрацию касательных напряжений типа T / \sqrt{r} , где r — расстояние от конца трещины, а коэффициент T при указанном на фиг. 1 несимметричном расположении трещины отличен от нуля. Эти напряжения могут вызвать тангенциальный сдвиг материала на продолжении плоскости трещины, т. е., иными словами, могут породить трещину поперечного сдвига. Однако в дальнейшем предполагается, что имеются, помимо «нормальных», «тангенциальные» силы межмолекулярного сцепления, величина которых достаточна для того, чтобы воспрепятствовать возникновению трещины поперечного сдвига.

Отметим, что $\sigma_{yy}^{\delta}(t, y_0) = -\sigma_{yy}^{\delta}(-t, y_0)$, поэтому однородное уравнение (4) будет самосопряженным, и $\omega(x)$ может быть физически интерпретирована как плотность дислокаций, образующих трещину при отсутствии внешней нагрузки.

Равенство (3) при известной функции $\omega(x)$ позволяет проанализировать распространение трещины при изменении внешней нагрузки. Основная трудность заключается, таким образом, в нахождении решения уравнения (4).

Хотя в общем анизотропном случае не удается эффективно построить это решение, однако, как оказывается, можно выяснить все существенные особенности функции $\omega(x)$, необходимые для анализа процесса распространения трещины.

Из формул, определяющих ядро $\sigma_{yy}^{\partial}(t, y_0)$, приведенных в работе [4], видно, что все величины размерности длины входят в него в виде отношения к толщине полосы $2h$, и что это ядро содержит отношение y_0/h в качестве параметра. Поэтому, введя обозначение $\xi = \pi x/2h$, можно утверждать, что решение уравнения (4) записывается в виде $\omega(x) \equiv \rho_0(\xi, y_0/h)$.

Далее, поскольку $\sigma_{yy}^{\partial}(t, y_0)$ при $t \rightarrow 0$ ведет себя как const/t , то, как следует из теории сингулярных интегральных уравнений, $\rho_0(\xi) \approx A/\sqrt{\xi}$ при $\xi \rightarrow 0$, где A — некоторая константа, не равная нулю.

Для изучения поведения функции $\rho_0(\xi)$ при больших ξ будем решать уравнение (4) методом Винера — Хопфа. Этот метод применим в данном случае, так как ядро — разностное и экспоненциально убывает на бесконечности [4]. Как показано Винером и Пэли [5], асимптотика $\rho_0(\xi)$ на бесконечности такова:

$$\rho_0(\xi) \approx \sum Q(\xi) e^{ik^*\xi} \quad (5)$$

где сумма берется по нулям k^* Фурье-преобразования ядра, лежащим в полосе аналитичности этого преобразования, а $Q(\xi)$ — полиномы степени $n-1$, где n — кратность соответствующего нуля.

Обозначим через $\sigma(k)$ Фурье-преобразование функции $\sigma_{yy}^{\partial}(t, y_0)$ по t . Функция $\sigma(k)$ довольно просто может быть получена из формул, содержащихся в [4]. Приведем выражение для $\sigma(k)$ лишь для случая, когда среда обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, совпадающими на фиг. 1 с координатными плоскостями (ромбический кристалл, или, в других терминах, ортотропная среда). В этом случае, как оказывается,

$$\sigma(k) = -\frac{2id}{\sqrt{2\pi}(s_1 - s_2)} \frac{\delta(k)}{\Delta(k)} \quad (6)$$

$$\delta(k) = \begin{vmatrix} f_{11} & e^{ks_1h} - e^{ks_2h} & \text{sh } ks_1(h - y_0) & \text{sh } ks_2(h - y_0) \\ 0 & e^{-ks_1h} - e^{-ks_2h} & -\text{sh } ks_1(h + y_0) & -\text{sh } ks_2(h + y_0) \\ f_{31} & s_1 e^{ks_1h} - s_2 e^{ks_2h} & s_1 \text{ch } ks_1(h - y_0) & s_2 \text{ch } ks_2(h - y_0) \\ 0 & s_1 e^{-ks_1h} - s_2 e^{-ks_2h} & s_1 \text{ch } ks_1(h + y_0) & s_2 \text{ch } ks_2(h + y_0) \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$\Delta(k) = 4(s_1 - s_2)^2(s_1 + s_2)^2 \left[\frac{\text{sh}^2 k(s_1 + s_2)h}{(s_1 + s_2)^2} - \frac{\text{sh}^2 k(s_1 - s_2)h}{(s_1 - s_2)^2} \right] \quad (8)$$

$$f_{11} = s_2 \text{sh } ks_1(h - y_0) - s_1 \text{sh } ks_2(h - y_0), \quad f_{31} = s_1 s_2 [\text{ch } ks_1(h - y_0) - \text{ch } ks_2(h - y_0)]$$

Здесь s_1, s_2 и d — величины, известным образом связанные с упругими константами среды, причем d зависит также и от вектора Бюргера [6,7].

Элементарные выкладки с использованием выражений (6), (7) и (8) показывают, что содержащаяся внутри полосы аналитичности функции $\sigma(k)$ точка $k=0$ — трехкратный нуль этой функции.

Поэтому на основании (5) можно сделать вывод, что $\rho_0(\xi)$ возрастает на бесконечности не медленнее, чем ξ^2 . Такая асимптотика $\rho_0(\xi)$ на бесконечности может быть получена также из следующих простых физических соображений. Рассмотрим отрываемую часть полосы как балку, закрепленную в устье трещины, и обозначим через $h(x)$ прогиб этой балки. Как известно (см., например [1]), этот прогиб удовлетворяет уравнению $h''''(x) = 0$, если отсутствуют внешние силы. Общим решением этого уравнения будет полином третьей степени, причем коэффициент при старшей степени x в этом полиноме, вообще говоря (т. е. при произвольных граничных условиях), отличен от нуля. Поэтому на бесконечности $h(x) \approx x^3$, следовательно, согласно (2), $\rho_0(x) \approx x^2$.

Приведенные соображения наводят на мысль, что и в общем анизотропном случае $\rho_0(\xi) \approx \xi^2$ на бесконечности, однако, чтобы доказать это строго, пришлось бы проделывать чрезвычайно громоздкие преобразования.

Далее, физические соображения показывают, что $\rho_0(\xi)$ должна быть знакопостоянной (для определенности — знакоположительной). Это следует из того, что $\rho_0(\xi)$ описывает распределение дислокаций при отсутствии внешних сил. Если бы функция $\rho_0(\xi)$ меняла знак в некоторой точке, то это означало бы, что вблизи этой точки находятся в равновесии дислокации разного знака, что невозможно, поскольку дислокации разного знака притягивались бы друг к другу и взаимно уничтожались.

Покажем, наконец, единственность решения уравнения (4). Любое решение уравнения (4), как известно из теории метода Винера — Хопфа, имеет вид

$$\rho_0(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} P_n(u) \Phi_-(u) e^{u\xi} du$$

где $\Phi_-(u)$ — определенная функция, а $P_n(u)$ — некоторый полином,

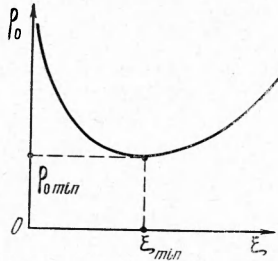
$$P_n(u) = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_0$$

Если ввести обозначение

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \Phi_-(u) e^{u\xi} du$$

то $\rho_0(\xi)$ можно записать в виде

$$\rho_0(\xi) = a_n f^{(n)}(\xi) + a_{n-1} f^{(n-1)}(\xi) + \dots + a_0 f(\xi) \quad (9)$$



Фиг. 2

С другой стороны, как указано выше, $\rho_0(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$ должна иметь особенность вида $\text{const} / \sqrt{\xi}$. Очевидно, что эту особенность должен давать член со старшей производной в (9), так как в противном случае функция $\rho_0(\xi)$ имела бы более сильную особенность в нуле. Если бы существовали два или более линейно независимых решения вида (9), то, составляя подходящим способом их линейную комбинацию, можно было бы обратить в нуль коэффициент при старшей производной функции $f(\xi)$, и полученная при этом функция не обладала бы требуемой особенностью в нуле. Полученное противоречие доказывает единственность решения уравнения (4).

Вышеизложенное позволяет утверждать, что график функции $\rho_0(\xi)$ имеет примерно следующий вид (фиг. 2). Этот график на фиг. 2 имеет один минимум, хотя а priori не исключена возможность, что $\rho_0(\xi)$ может иметь больше одного минимума.

Приведенные рассуждения общего характера можно наглядно проиллюстрировать на примере одного частного случая, когда можно получить интегральное представление для функции $\rho_0(\xi)$. А именно, рассмотрим случай $(s_1 + s_2) / (s_1 - s_2) = 2$, $y_0 = 0$, и обозначим $s_1 - s_2 = s$, $ik = u$. В этом случае, как оказывается, с точностью до несущественного постоянного множителя

$$\sigma(u) = \text{tg}^3 1/2 hsu \quad (10)$$

Выражение (10) получается из (6), (7) и (8) с учетом приведенных выше условий.

Выражение для $\sigma(u)$ можно факторизовать, как это требуется в методе Винера — Хопфа, и получить интегральное представление для $\rho_0(\xi)$. Факторизуя (10) при помощи Γ -функций и применяя далее теорему о свертке, найдем

$$\rho_0(\xi) = A f'(\xi) + B f(\xi) \quad (11)$$

где

$$f(\xi) = \frac{d}{d\xi} \left[\iiint_D \frac{d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3}{[(1 - e^{-\tau_1})(1 - e^{-\tau_2})(1 - e^{-\tau_3})]^{1/2}} \right] \quad (12)$$

В соотношении (11) величины A и B — некоторые постоянные, причем $A > 0$, $B \geq 0$. Областью интегрирования D в (12) является симплекс, определяемый неравенствами

$$\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0, \tau_3 \geq 0, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \leq \xi$$

Используя выражения (11) и (12), легко усмотреть, что $\rho_0(\xi) \sim 1 / \sqrt{\xi}$ при $\xi \rightarrow 0$ и $\rho_0(\xi) \sim \xi^2$ при $\xi \rightarrow \infty$, т. е. поведение этой функции в нуле и на бесконечности именно такое, как следует из общих соображений.

Зная (хотя бы в общих чертах) вид функции $\rho_0(\xi)$ (фиг. 2), можно дать качественное описание явления распространения трещины вдоль полосы при изменении внешней нагрузки. Для этого рассмотрим важный конкретный пример, когда $\sigma_{yy}^e(x) = P\delta(x - l)$, т. е. когда трещина поддерживается в раскрытом состоянии сосредоточенными силами P , приложенными на расстоянии l от ее устья.

Рассмотрим зависимость «длины» трещины l от параметра P внешней нагрузки. Эта зависимость дается в неявном виде соотношением (3), которое в данном случае

приобретает вид

$$\int_0^{\infty} S(x) \rho_0 \left(\frac{\pi x}{2h} \right) dx = P \rho_0 \left(\frac{\pi l}{2h} \right) \quad (13)$$

Напомним, что ρ_0 зависит также и от y_0/h как от параметра. Имея в виду, что $S(x)$ отлична от нуля [2] лишь при малых x , а также поведение $\rho_0(\xi)$ при малых ξ и определение [2] модуля сцепления M , соотношение (13) можно записать в виде

$$A(y_0/h) M \sqrt{h} = P \rho_0(\pi l/2h, y_0/h) \quad (14)$$

Уравнение (14) дает искомую зависимость между P и l . Его следует решать графически (фиг. 3). На этой фигуре кривая соответствует правой части (14), а прямая — левой части. Из фиг. 3 видно, что каждой нагрузке соответствуют две длины: l_1 и l_2 , первая из которых соответствует устойчивой трещине, а вторая — неустойчивой [2].

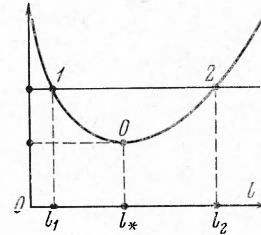
Предположим, что рассматривается следующий эксперимент: сначала в полосе создается разрез, а затем к берегам этого разреза на расстоянии l от его устья прикладывается сосредоточенная нагрузка, бесконечно медленно возрастающая от нуля. Тогда процесс будет происходить следующим образом: если $l < l_*$ (на фиг. 3 имеем $l = l_1$), то сначала трещина не будет распространяться, пока нагрузка не достигнет величины, соответствующей длине l_1 (точка 1). При дальнейшем возрастании нагрузки длина трещины будет возрастать до значения l_* , при котором произойдет разрушение. Если же $l > l_*$ (на фиг. 3 имеем $l = l_2$), то при возрастании нагрузки длина трещины возрастать не будет, а при достижении нагрузки значения, соответствующего длине l_2 , произойдет разрушение.

Критическая длина l_* определяется из условия

$$\rho_0'(\pi l_*/2h) = 0 \quad (15)$$

т. е. $l_* = C(y_0/h) h$. Как и следовало ожидать, критическая длина при данном y_0/h пропорциональна толщине полосы. Что касается разрушающей нагрузки P_* , то она определяется из соотношения, следующего из (14)

$$P_* = \frac{A(y_0/h)}{\rho_0(\pi l_*/2h, y_0/h)} M \sqrt{h} \quad (16)$$



Фиг. 3

Такая зависимость разрушающей нагрузки от размеров полосы была указана в [2] из соображений размерности.

Отметим, что абсцисса и ордината точки 0 на фиг. 3 соответствуют критической длине и критической нагрузке.

Если нагрузка не сосредоточенная, а приложена на некоторой конечной длине, малой, по сравнению с $h - y_0$, то качественные особенности процесса распространения трещины в полосе останутся теми же самыми.

Для выяснения вида зависимости разрушающей нагрузки от y_0/h рассмотрим равновесие совокупности винтовых дислокаций, схема расположения которых также изображена на фиг. 1. Подобная задача представляет и самостоятельный интерес, так как эту совокупность можно трактовать физически как двойник [8] специального вида или как трещину продольного сдвига [9].

Рассуждая так же, как и выше, можно составить уравнение равновесия винтовых дислокаций, которое в случае изотропной среды будет иметь вид

$$\int_0^{\infty} \rho(x') \left\{ 2 \operatorname{cth} \frac{\pi(x' - x)}{4h} - \operatorname{th} \frac{\pi}{4h} [(x' - x) + 2iy_0] - \operatorname{th} \frac{\pi}{4h} [(x' - x) - 2iy_0] \right\} dx' = \frac{2\pi}{\mu b} [S(x) + \sigma_{yz}^e(x)] \quad (17)$$

где μ — модуль сдвига.

Учет анизотропии в этом случае сводится к умножению y_0 и h на постоянную, зависящую от упругих модулей среды. Ядро уравнения (17) может быть получено из формул работы [4]. Соответствующее (17) однородное уравнение можно также решить методом Винера — Хофа, в результате чего получим

$$\rho_0(\xi) = \frac{\alpha\beta}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\alpha^{-\alpha u} \beta^{-\beta u} \Gamma(\alpha u) \Gamma(\beta u)}{\Gamma(u)} e^{u\xi} du \quad (18)$$

$$\xi = \pi x / 2h, \quad \gamma > 0, \quad \alpha = 1/2(1 - y_0/h), \quad \beta = 1/2(1 + y_0/h), \quad \alpha + \beta = 1$$

Выясним некоторые свойства функции $\rho_0(\xi)$.
Представление (18) позволяет изучить поведение $\rho_0(\xi)$ при больших и малых ξ .
Согласно известным теоремам (см., например, [10]),

$$\rho_0(\infty) = \lim_{u \rightarrow 0} uF(u), \quad \rho_0(0) = \lim_{u \rightarrow \infty} uF(u) \quad (19)$$

Здесь $F(u)$ — преобразование Лапласа функции $\rho_0(\xi)$. В рассматриваемом случае

$$F(u) = \alpha\beta \frac{\alpha^{-\alpha u} \beta^{-\beta u} \Gamma(\alpha u) \Gamma(\beta u)}{\Gamma(u)}$$

В (19) предполагается, что пределы, стоящие справа, существуют.
Применяя первую формулу (19), получим, что $\rho_0(\infty) = 1$.

Те же соображения, что и выше, показывают, что $\rho_0(\xi) \sim 1/\sqrt{\xi}$ при $\xi \rightarrow 0$, поэтому вторую формулу (19) непосредственно применять нельзя. Ее можно, однако, применить к разности между $\rho_0(\xi)$ и какой-либо функции, которая при $\xi \rightarrow 0$ ведет себя как $\text{const}/\sqrt{\xi}$. В качестве последней удобно выбрать функцию $A/\sqrt{1-e^{-2\xi}}$. Преобразование Лапласа этой функции имеет вид

$$F_1(u) = \frac{A \sqrt{\pi} \Gamma(1/2 u)}{\Gamma(1/2 u + 1/2)}$$

Применяя вторую формулу (19) к разности

$$\rho_0(\xi) - A/\sqrt{1-e^{-2\xi}}$$

и требуя, чтобы эта разность обращалась в нуль при $\xi \rightarrow 0$, найдем постоянную A . Таким образом, A находится из условия

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u \left[\alpha\beta \frac{\alpha^{-\alpha u} \beta^{-\beta u} \Gamma(\alpha u) \Gamma(\beta u)}{\Gamma(u)} - \frac{A \sqrt{\pi} \Gamma(1/2 u)}{\Gamma(1/2 u + 1/2)} \right] = 0$$

Раскрывая предел, найдем

$$A = 2 \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{1 - y_0^2/h^2} \quad (20)$$

При рассмотрении равновесия совокупности винтовых дислокаций оказывается возможным доказать знакоположительность и даже монотонность $\rho_0(\xi)$ чисто математически, не прибегая к физической интерпретации этой функции.

С этой целью заметим, что равенство (18) можно переписать так:

$$\rho_0(\xi) = \frac{\alpha\beta}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} B(\alpha u, \beta u) e^{u[\xi - \alpha \ln \alpha - \beta \ln \beta]} du$$

Здесь $B(p, q)$ — бета-функция Эйлера. Используя известное интегральное представление бета-функции, можно записать далее

$$\begin{aligned} \rho_0(\xi) &= \frac{\alpha\beta}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left[\int_0^1 t^{\alpha u-1} (1-t)^{\beta u-1} dt \right] e^{u[\xi - \alpha \ln \alpha - \beta \ln \beta]} du = \\ &= \frac{\alpha\beta}{2\pi i} \int_0^1 \frac{dt}{t(1-t)} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp \left[u \left(\xi + \alpha \ln \frac{t}{\alpha} + \beta \ln \frac{1-t}{\beta} \right) \right] du = \\ &= \alpha\beta \int_0^1 \frac{dt}{t(1-t)} \delta \left(\xi + \alpha \ln \frac{t}{\alpha} + \beta \ln \frac{1-t}{\beta} \right) \end{aligned}$$

Используем теперь известное соотношение

$$\delta(\psi(t)) = \sum_k \frac{\delta(t-t_k)}{|\psi'(t_k)|}$$

Здесь t_k — корни уравнения $\psi(t) = 0$.
Легко показать, что уравнение

$$\xi + \alpha \ln \frac{t}{\alpha} + \beta \ln \frac{1-t}{\beta} = 0$$

имеет внутри интервала (0.1) два корня, которые обозначим через $t_1(\xi)$ и $t_2(\xi)$, причем $t_1(\xi) \leq \alpha$, $t_2(\xi) \geq \alpha$ и $dt_1/d\xi < 0$, $dt_2/d\xi > 0$. В этих обозначениях

$$\rho_0(\xi) = \alpha\beta \left(\frac{1}{|\alpha - t_1(\xi)|} + \frac{1}{|\alpha - t_2(\xi)|} \right)$$

Это представление с учетом приведенных выше свойств функций $t_1(\xi)$ и $t_2(\xi)$ показывает, что $\rho_0(\xi)$ положительна и монотонно убывает. Отметим, что в частном случае, когда двойник (трещина продольного сдвига) проходит точно в середине полосы, удается вычислить интеграл (18) в элементарных функциях. В этом случае

$$\rho_0(\xi) = 1 / \sqrt{1 - e^{-2\xi}}$$

Рассмотрим снова конкретный пример внешней нагрузки: $\sigma_{yz}^e(x) = P\delta(x-l)$. Составляя условие ортогональности, аналогичное (3), получим (учитывая (20) и поведение $\rho_0(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$) следующее уравнение, определяющее зависимость l от P

$$\sqrt{1 - y_0^2/h^2} M \sqrt{h} = P\rho_0(\pi l/2h) \quad (21)$$

Графическое решение уравнения (21) представлено на фиг. 4, где кривая соответствует правой части (21), а прямая — левой части. Из рассмотрения фиг. 4 можно сделать некоторые заключения относительно процесса распространения двойника при увеличении P . А именно, при увеличении нагрузки длина двойника будет постепенно возрастать, и при достижении нагрузкой некоторой величины двойник проходит через всю полосу. Соответствующую нагрузку $P = P_*$ можно условно назвать разрушающей. Отличие описанной картины от распространения трещины нормального разрыва заключается в том, что, как видно из фиг. 4, здесь не имеет смысла говорить о критической длине: длина двойника возрастает постепенно, становясь бесконечной в пределе при $P \rightarrow P_*$. Что касается разрушающей нагрузки, то она равна

$$P_* = \sqrt{1 - y_0^2/h^2} M \sqrt{h} \quad (22)$$

Тем самым определена зависимость P_* от y_0/h . Как видно из (22), при увеличении y_0 от нуля до h разрушающая нагрузка убывает от максимального значения $M\sqrt{h}$ до нуля. Если $h \rightarrow \infty$ и $y_0 \rightarrow \infty$, но при этом $h - y_0 = a$, где a не меняется, то

$$P_* \rightarrow M \sqrt{2a}$$

Следует сказать, что модули сцепления для двойника и трещины, вообще говоря, различны.

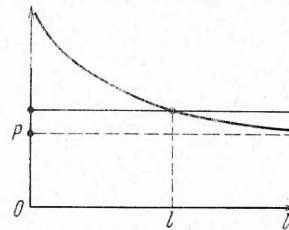
Зависимость разрушающей нагрузки от расстояния между трещиной и границей полосы, по-видимому, будет аналогична (22) и в рассмотренном выше случае трещины нормального разрыва.

Автор благодарит Г. И. Баренблатта и А. М. Косевича за весьма полезные советы и Л. А. Пастура — за помощь в работе.

Поступила 2 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. Физматгиз, 1965.
2. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
4. Фельдман Э. П. Прямолинейная дислокация в анизотропной полосе. ПМТФ 1966, № 3.
5. Винер Н., Пэлл Р. Преобразование Фурье в комплексной области. Изд-во, «Наука», 1964.
6. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела, Гостехиздат, 1950.
7. Stroh A. N. Dislocations and cracks in anisotropic elasticity. Philos. Mag., 1958, vol. 3, No 30, p. 625.
8. Косевич А. М., Пастур Л. А. О дислокационной модели двойника. Физ. твердого тела, 1961, т. 3, № 4.
9. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О хрупких трещинах продольного сдвига. ПММ, 1961, т. 25, № 6, стр. 1110.
10. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.



Фиг. 4