

ЛИТЕРАТУРА

1. Mojola O. O., Young A. D. An experimental investigation of the turbulent boundary layer along a corner // AGARD — CP — 93. — 1971.
2. Корнилов В. И., Харитонов А. М. Взаимодействие турбулентных пограничных слоев в прямом двугранном угле // ПМТФ. — 1978. — № 3.
3. Корнилов В. И., Харитонов А. М. Взаимодействие пограничных слоев при продольном обтекании прямого двугранного угла. — Новосибирск, 1978. — (Препринт/ИТПМ СО АН СССР; № 11).
4. Kornilov V. I., Kharitonov A. M. Investigation of the structure of turbulent flows in streamwise asymmetric corner configurations // Experiments in Fluids. — 1984. — V. 2.
5. Корнилов В. И. Взаимодействие пограничных слоев в области сопряжения аэродинамических поверхностей: Автореф. дис.... канд. техн. наук. — Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1979.
6. Фагт И. Д. Экспериментальные методы исследования трехмерных турбулентных пограничных слоев // Трехмерные турбулентные пограничные слои/Под ред. Х. Фернхольца, Е. Краузе. — М.: Мир, 1985.
7. Hoffmeister M. Zur Anwendung einer einfachen Hitzdrahtsonde auf dreidimensionale turbulente Strömungsfelder // Maschinenbautechnik. — 1970. — Bd 19. N. 8.
8. Багаев Г. И., Голов В. К., Медведев Г. В., Поляков И. Ф. Аэродинамическая труба малых скоростей Т-324 с пониженной степенью турбулентности // Аэрофизические исследования. — Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1972.
9. Косорыгин В. С. Методика изготовления миниатюрных термоанемометрических датчиков // Докл. III Всесоюз. шк. по методам аэрофизических исследований. — Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982. — Т. 2.
10. Хоффмайстер М. Применение термоанемометрической техники к осредненным трехмерным турбулентным потокам // Успехи механики. — 1978. — Т. 1, вып. 1/2.
11. Klebanoff P. S. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient // NASA. — 1955. — Report 1247.

Поступила 24/III 1986 г.

УДК 532.542.2

ЭФФЕКТИВНАЯ ДИФфуЗИЯ ДИНАМИЧЕСКИ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В УЗКИХ ТРАНШЕЯХ

А. И. Мошинский

(Ленинград)

Уравнение диффузии при наличии конвективного слагаемого, в котором компоненты скорости — сложные функции пространственных координат, редко удается решить аналитически. В случае диффузии в каналах в [1] предложен метод сведения основного уравнения к более простому виду, содержащему коэффициент эффективной диффузии (дисперсии). В дальнейшем это направление интенсивно развивалось (см., например, [2—4], где предложены другие подходы к проблеме). В данной работе получено аналогичное уравнение эффективной диффузии в узких кавернах при условии, что известна функция тока в каверне, через которую будет выражен коэффициент дисперсии. Вычисление функции тока — отдельная задача. Далее применяем полученные зависимости к проблеме извлечения вещества из узких траншей (щелей), при наличии границы каверны, через которую возможен обмен веществом с основным потоком.

При обтекании траншеи потоком маловязкой жидкости, как известно, схема течения М. А. Лаврентьева [5] лучше согласуется с опытом, чем другие модели, например модель потенциального обтекания и схема Кирхгофа. Модель течения основана на теореме [6, 7] о постоянстве завихренности в замкнутых областях. Однако при переменном значении коэффициента вязкости μ завихренность может и не быть постоянной [8]. Мы, считая, что известно распределение завихренности, получили общее выражение для функции тока в узкой каверне, ограниченной координатными линиями ортогональной системы координат. В качестве примера подробно разобран случай извлечения вещества из глубокой щели.

Предложено интегральное преобразование, с помощью которого можно решать определенный круг задач дисперсии вещества в кавернах.

1. Вывод уравнения эффективной диффузии и начального условия к нему. Будем полагать, что протяженность каверны в направлении X_1 много больше, чем в X_2 . Границы каверны считаем совпадающими с координатными линиями плоскости X_1 , X_2 . Ограничимся рассмотрением плоской задачи. Пусть известна функция тока Ψ в каверне, причем ее значение на границах каверны равно нулю. Тогда компоненты скорости жид-

кости в траншее определяются формулами

$$(1.1) \quad v_1 = H_2^{-1} \partial \Psi / \partial X_2, \quad v_2 = -H_1^{-1} \partial \Psi / \partial X_1,$$

где $H_{1,2}(X_1, X_2)$ — коэффициенты Ламэ. Уравнение диффузии примеси в траншее имеет вид

$$(1.2) \quad \varepsilon^2 H_1 H_2 \frac{\partial c}{\partial t} + \varepsilon W(\psi, c) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial c}{\partial x_2} \right) + \varepsilon^2 n \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial c}{\partial x_1} \right),$$

$$W(\psi, c) = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial c}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial c}{\partial x_2},$$

а безразмерные параметры и координаты связаны с размерными соотношениями

$$x_1 = \frac{X_1}{l_1}, \quad x_2 = \frac{X_2}{l_2}, \quad \psi = \frac{\Psi}{\Psi_0}, \quad t = \frac{\tau \Psi_0^2}{D l_1^2}, \quad \varepsilon = \frac{\Psi_0 l_2}{D l_1}, \quad n = \frac{D^2}{\Psi_0^2}.$$

Здесь c — концентрация вещества; l_1, l_2 — размеры каверны в направлении осей X_1 и X_2 ; τ — размерное время; Ψ_0 — характерный масштаб функции тока; D — коэффициент молекулярной диффузии. Если считать величину n порядка единицы или выше, тогда условие «узости» каверны будет выражаться неравенством $l_1 \gg l_2$ или $\varepsilon \ll 1$. Выбор масштаба времени нам подсказала процедура последовательных приближений Тейлора [1] для аналогичной задачи в канале, когда принималось, что в первом приближении нестационарным слагаемым пренебрегается, а учитывается оно во втором приближении. Можно показать, что в случае течения в канале предлагаемая ниже процедура приводит в первом приближении к уравнению дисперсии Тейлора, если исходить из соответствующего уравнения диффузии, аналогичного (1.2). Полагаем, что стенки каверны непроницаемы для примеси, т. е. существуют граничные условия

$$(1.3) \quad \partial c / \partial x_i |_{x_i=0;1} = 0,$$

а в начальный момент времени имеем

$$(1.4) \quad c|_{t=0} = g(x_1, x_2).$$

Условие на границе $x_1 = 0$, связывающее каверну с внешним потоком, и на дне каверны $x_1 = 1$ конкретизировать не будем. Естественно решать задачу (1.2)–(1.4) методом малых возмущений [9, 10] в виде ряда

$$(1.5) \quad c = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots,$$

подставив который в уравнение (1.2) и сгруппировав слагаемые одинакового порядка по ε , получим

$$(1.6) \quad \partial[(H_1/H_2) \partial c_0 / \partial x_2] / \partial x_2 = 0;$$

$$(1.7) \quad \partial[(H_1/H_2) \partial c_1 / \partial x_2] / \partial x_2 = W(\psi, c_0);$$

$$(1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial c_i}{\partial x_2} \right) = \bar{W}(\psi, c_{i-1}) + H_1 H_2 \frac{\partial c_{i-2}}{\partial t} - n \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial c_{i-2}}{\partial x_1} \right), \quad i = 2, 3, \dots$$

Отметим, что в уравнениях (1.6)–(1.8) отсутствуют производные от искомым функций по времени (при $i \geq 2$ в уравнения входят производные по времени от функций, которые должны быть определены ранее последовательным интегрированием уравнений с меньшими номерами). Это делает задачу сингулярно-возмущенной [9, 10] и требует построения некоторых характеристик внутреннего решения.

Интеграл уравнения (1.6), удовлетворяющий условиям (1.3), имеет вид $c_0 = F(x_1, t)$. Тогда (1.7) упрощается и его первым интегралом будет

$$(1.9) \quad \partial c_1 / \partial x_2 = (\psi H_2 / H_1) \partial F / \partial x_1,$$

где использовано равенство нулю функции тока на стенках $x_2 = 0; 1$. Теперь проинтегрируем по x_2 в пределах $(0, 1)$ выражение (1.8) при $i = 2$. Получим после некоторых выкладок уравнение

$$(1.10) \quad m(x_1) \partial F / \partial t = \partial \{ [D_1(x_1) + D_2(x_1)] \partial F / \partial x_1 \} / \partial x_1$$

для определения функции $F = c_0$. Здесь

$$(1.11) \quad m(x_1) = \int_0^1 H_1 H_2 dx_2, \quad D_1(x_1) = \int_0^1 \psi^2 \frac{H_2}{H_1} dx_2, \quad D_2(x_1) = n \int_0^1 \frac{H_2}{H_1} dx_2.$$

Для простоты предположим, что всюду в области $x_1, x_2 \in [0; 1]$ $0 < \delta \leq H_1, H_2 \leq N < \infty$, так что все интегралы (1.11) сходятся. Аналогичным образом находим из (1.9) и (1.8) при $i = 3$

$$(1.12) \quad c_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1} \int_0^{x_2} \psi \frac{H_2}{H_1} dx_2 + G(x_1, t),$$

где функция G определяется уравнением

$$(1.13) \quad m(x_1) \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[(D_1 + D_2) \frac{\partial G}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[D_3(x_1) \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \right] + \\ + n \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \int_0^1 \frac{H_2}{H_1} \lambda dx_2 + n \frac{\partial F}{\partial x_1} \int_0^1 \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} dx_2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial t} \int_0^1 H_1 H_2 \lambda dx_2, \\ \lambda(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \psi \frac{H_2}{H_1} dx_2, \quad \eta(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \frac{H_2}{H_1} \psi^2 dx_2, \quad D_3(x_1) = \int_0^1 \left(\lambda \frac{\partial \eta}{\partial x_2} - \eta \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \right) dx_2,$$

т. е. (1.10), но с ненулевым источниковым слагаемым, выраженным через функцию F .

Если не удастся описать границу каверны координатной линией некоторой ортогональной системы координат, но выполняется неравенство $l_{\pm}(x_1) \ll 1$, где $x_2 = l_{\pm}(x_1)$ — соотношения, определяющие границы каверны, а координаты x_1 и x_2 в данном случае декартовы, то вместо (1.10) можно тем же способом получить

$$l(x_1) \partial F / \partial t = \partial [l(x_1) D_4(x_1) \partial F / \partial x_1] / \partial x_1,$$

где функция $D_4(x_1)$ определяется формулой

$$D_4(x_1) = n + \int_{l_-}^{l_+} \psi^2 dx_2, \quad l = l_+ + l_-.$$

Начальное условие для (1.10) находим при помощи сращивания с внутренним решением, для чего деформируем время $T = t/\varepsilon^2$. Уравнение нулевого порядка по ε во внутренних переменных имеет вид

$$(1.14) \quad H_1 H_2 \partial C_0 / \partial T = \partial [(H_1 / H_2) \partial C_0 / \partial x_2] / \partial x_2$$

(C — внутренняя концентрация). Проинтегрировав по x_2 в пределах $(0, 1)$ выражение (1.14) и используя дополнительные условия (1.3), (1.4), найдем

$$(1.15) \quad \frac{\partial}{\partial T} \int_0^1 H_1 H_2 C_0 dx_2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \int_0^1 H_1 H_2 C_0 dx_2 = \int_0^1 H_1 H_2 g(x_1, x_2) dx_2.$$

Используя принцип предельного сращивания [9]

$$(1.16) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} C_0 = \lim_{t \rightarrow 0} c_0 = F|_{t=0}$$

в равенстве (1.15), получим искомое начальное условие

$$(1.17) \quad F|_{t=0} = \frac{1}{m(x_1)} \int_0^1 H_1 H_2 g(x_1, x_2) dx_2 = \langle g \rangle.$$

Начальное условие для (1.13) найдем следующим образом. Выполним преобразование Лапласа по переменной T уравнения $H_1 H_2 \partial C_1 / \partial T + W[\psi, C_0] = \partial[(H_1/H_2) \partial C_1 / \partial x_2] / \partial x_2$ для функции первого приближения по ε внутреннего решения и проинтегрируем полученное соотношение по x_2 в пределах $(0, 1)$. С учетом граничных условий (1.3) и условий $\psi|_{x_2=0;1} = 0$

$$(1.18) \quad p \int_0^1 H_1 H_2 C_1^* dx_2 = \frac{d}{dx_1} \int_0^1 \psi \frac{\partial C_1^*}{\partial x_2} dx_2,$$

где звездочкой сверху обозначены преобразованные по Лапласу величины; p — переменная преобразования Лапласа. Предполагая в дальнейшем применить предельное равенство [11]

$$(1.19) \quad \lim_{p \rightarrow 0} p f^* = \lim_{T \rightarrow \infty} f,$$

используем только асимптотическую при $p \rightarrow 0$ информацию для функции $\partial C_0^* / \partial x_2$, которую получим из преобразованного по Лапласу уравнения (1.14). Сращивание с внешним решением и условие (1.17) показывают, что главным слагаемым асимптотического разложения C_0^* при $p \rightarrow 0$ будет $p^{-1} \langle g \rangle$, однако это слагаемое не зависит от x_2 и поэтому не вносит вклада в правую часть (1.18). Следующее слагаемое R порядка единицы по p . Для него имеем выражение

$$(1.20) \quad \frac{\partial R}{\partial x_2} = \frac{H_2}{H_1} \int_0^{x_2} H_1 H_2 [\langle g \rangle - g] dx_2.$$

Дальнейшие слагаемые в асимптотическом разложении C_0^* при $p \rightarrow 0$ более высокого порядка малости по p , а значит, их вклад в предел интеграла (1.18) при $p \rightarrow 0$ равен нулю. Разложение внешнего решения во внутренних переменных $c(T\varepsilon^2) = c_0|_{t=0} + \varepsilon c_1|_{t=0} + \varepsilon^2 [c_2|_{t=0} + T \partial c_0 / \partial t|_{t=0}] + \dots$ показывает, что для функций c_1 и C_1 также можно применить принцип предельного сращивания (1.16). Перейдя в (1.18) к пределу $p \rightarrow 0$, получим, используя (1.19) и формулы (1.12), (1.20), искомое начальное условие для функции G в (1.13):

$$(1.21) \quad G|_{t=0} = \frac{1}{m(x_1)} \frac{d}{dx_1} \left\{ \int_0^1 \lambda H_1 H_2 [g - \langle g \rangle] dx_2 - \langle g \rangle \int_0^1 H_1 H_2 \lambda dx_2 \right\}.$$

Таким образом, для функций c_0 и c_1 первых двух приближений сформулированы уравнения (1.10), (1.13) и соответствующие начальные условия (1.17), (1.21). Следует заметить, что изложенная процедура легко обобщается на случай наличия источников вещества как в объеме каверны, так и на ее стенках, если источники малоинтенсивные (порядка ε^2).

2. Вычисление функции тока и коэффициента эффективной диффузии. Уравнением для функции тока в каверне будет

$$(2.1) \quad \partial[(H_1/H_2) \partial \psi / \partial x_2] / \partial x_2 + \varepsilon^2 n \partial[(H_2/H_1) \partial \psi / \partial x_1] / \partial x_1 = -H_1 H_2 \omega$$

при граничных условиях

$$(2.2) \quad \psi|_{x_2=0;1} = 0, \quad \psi|_{x_1=0;1} = 0$$

($\omega = \Omega(X_1, X_2) l_2^2 / \Psi_0$ — безразмерная завихренность). Устремляя в (2.1) величину ε к нулю, получим уравнение внешней задачи, решение которого

го, удовлетворяющее первым условиям (2.2), запишется в виде

$$(2.3) \quad \psi_+(x_1, x_2) = \left[\int_0^{x_2} \frac{H_2}{H_1} dx_2 \right] \left[\int_0^1 \frac{H_2}{H_1} dx_2 \right] \int_0^1 \frac{H}{H_1} dx_2 \int_0^{x_2} H_1 H_2 \omega(x_1, \xi) d\xi - \\ - \int_0^{x_2} \frac{H_2}{H_1} d\lambda \int_0^\lambda H_1 H_2 \omega(x_1, \xi) d\xi,$$

где индексы плюс и минус отмечают внешнее и внутреннее решения. Внутреннее уравнение получается из (2.1) переходом к внутренней переменной $x_3 = x_1/\varepsilon n^{1/2}$ с последующим предельным переходом $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$(2.4) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left[r(x_2) \frac{\partial \psi_-}{\partial x_2} \right] + \frac{1}{r(x_2)} \frac{\partial^2 \psi_-}{\partial x_3^2} = -H_1 H_2 \omega|_{x_1=0}$$

($r(x_2) = H_1/H_2|_{x_1=0}$). Введем новую переменную x_4 и новую функцию ω_1 по формулам

$$(2.5) \quad \omega_1(x_4) = H_1^2 \omega|_{x_1=0}, \quad x_4 = \int_0^{x_2} dx/r(x).$$

Функция $x_4(x_2)$ имеет обратную в силу монотонности, так как $r > 0$, чем мы и воспользовались, выразив ω_1 через x_4 . Теперь уравнение для ψ_- запишем как

$$(2.6) \quad \partial^2 \psi_- / \partial x_4^2 + \partial^2 \psi_- / \partial x_3^2 = -\omega_1(x_4), \quad x_4 \in (0, \alpha), \quad x_3 \in (0, \infty)$$

($\alpha = x_4(1) = D_2(0)/n$), а граничные условия

$$(2.7) \quad \psi_-|_{x_4=0; \alpha} = 0, \quad \psi_-|_{x_3=0} = 0, \quad \psi_-|_{x_3 \rightarrow \infty} \rightarrow \psi_+[x_2(x_4), 0] = \psi_*(x_4).$$

Заметим, что функция $\psi_*(x_4)$ удовлетворяет уравнению (2.6), поэтому оно легко сводится к однородному и решение его, полученное методом Фурье, имеет вид

$$(2.8) \quad \psi_- = \psi_*(x_4) - \frac{2\alpha}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi k x_3}{\alpha}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi k x_4}{\alpha}\right)}{k^2} \int_0^\alpha \omega_1(\xi) \sin\left(\frac{\pi k \xi}{\alpha}\right) d\xi.$$

Общая часть внутреннего и внешнего решений равна $\psi_*(x_4)$, поэтому равномерно пригодное разложение нулевого порядка по ε для функции ψ следующее:

$$(2.9) \quad \psi = \psi_+(x_1, x_2) - \frac{2\alpha}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\pi k x_3}{\alpha}\right)}{k^2} \sin\left(\frac{\pi k x_4}{\alpha}\right) \int_0^\alpha \omega_1(\xi) \sin\left(\frac{\pi k \xi}{\alpha}\right) d\xi.$$

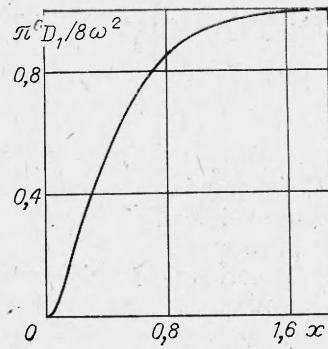
Заметим, что аналогично можно построить внутреннее решение и вблизи границы $x_1 = 1$, при этом к (2.9) присоединится еще одна сумма, с точностью до обозначений совпадающая с уже найденной.

Вычисление коэффициента D_1 при помощи формулы (2.9) произведем для случая глубокой щели в декартовых координатах. Будем считать также, что $\omega = \text{const}$. Тогда $H_1 = H_2 = 1$, $x_4 = x_2$, $\alpha = 1$, и после подстановки функции $\psi_+ = \omega x_2(1 - x_2)/2$ в (2.9), а найденной таким образом функции ψ в (1.11) для коэффициента D_1 получим

$$(2.10) \quad D_1 = \frac{8\omega^2}{\pi^6} \sum_{k=0}^{\infty} \{1 - \exp[-(2k+1)\pi x_3]\}^2 / (2k+1)^6.$$

Ряд (2.10) сходится очень быстро и практически для вычислений можно

использовать одно слагаемое суммы. График функции D_1 представлен на рисунке.



Одним из основных приложений полученных формул является исследование диффузионных процессов в кавернах, обтекаемых по схеме [5]. В этом случае обычно задается скорость потока v вдали от каверны, а ω — искомая величина. Для вычисления ω предлагаются различные [12 — 14] алгоритмы. Однако, используя узость каверны, можно предложить приближенную формулу, связывающую v и ω , приравняв v значение скорости в точке $x_2 = 0,5$, $x_3 = 0$. Для декартовых координат найдем из (2.9) (v направлена против оси x_2) выражение

$$(2.11) \quad v = \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right|_{x_3=0; x_2=0,5} = 0,37\omega$$

для безразмерной величины вектора скорости.

3. Пример. Рассмотрим процесс выравнивания концентраций в каверне и внешнем потоке, приняв, что на границе щели концентрация примеси равна нулю. Это будет при достаточно больших скоростях основного потока. Для краткости обозначим декартовы координаты обычным образом: x и y . При больших скоростях типичен случай $n \ll 1$, которым и ограничимся. Как показывают расчеты и картины течения в кавернах [5, 12], линия тока, разграничивающая области вихревого и потенциального течений по схеме [5], достаточно близка к линии $y = 0$, поэтому для простоты считаем ее прямой $y = 0$. То же замечание для узких каверн можно сделать и в общем случае.

Уравнение эффективной диффузии запишется в виде

$$(3.1) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \partial \{ [n + D_1(y)] \frac{\partial c}{\partial y} \} / \partial y.$$

Начальную концентрацию примеси в щели возьмем равной единице, так что дополнительными условиями для уравнения (3.1) будут

$$(3.2) \quad c|_{t=0} = 1, \quad c|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y}|_{y=1} = 0.$$

В силу малости n решение задачи (3.1), (3.2) естественно искать методом возмущений. При условиях (3.2) решение внешней задачи (вдали от границ $y = 0$ и 1) и внутренней вблизи линии $y = 1$ постоянно и равно единице. Основной интерес представляет локальное решение вблизи линии $y = 0$, для которого коэффициент D_1 в (3.1) определяется формулой (2.10). Заметим, что функция $D_1(y)$ имеет при $y = 0$ нуль второго порядка. Это подсказывает вид внутренней переменной: $x = y(k/n)^{1/2}$ ($k = D_1''(0)/2 = \omega^2/6$). Уравнение внутренней задачи принимает форму

$$(3.3) \quad \frac{\partial c}{\partial \zeta} = \partial [(1 + x^2) \frac{\partial c}{\partial x}] / \partial x$$

при дополнительных условиях

$$c_{\zeta=0} = 1, \quad c_{x=0} = 0, \quad c_{x \rightarrow \infty} \text{ — огр.}, \quad \zeta = kt.$$

Применение преобразования Лапласа по переменной ζ с сохранением обозначений п. 1 приводит к задаче

$$(3.4) \quad d[(x^2 + 1)dc^*/dx]/dx = pc^* - 1;$$

$$(3.5) \quad c^*|_{x=0} = 0, \quad c^*, \quad dc^*/dx|_{x \rightarrow \infty} \text{ — огр.}$$

с решением

$$(3.6) \quad c^*(p, x) = 1/p - Q_\nu(ix)/pQ_\nu(+0i), \quad \nu = -0,5 + \sqrt{0,25 + p}$$

($Q_\nu(x)$ — сферическая функция второго рода). Особые точки функции

$c^*(p, x)$ — полюс $p = 0$ и точка ветвления $p = -0,25$. Интеграл Римана — Меллина

$$c(\zeta, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L c^* \exp(p\zeta) dp$$

(интегрирование проводится по прямой $\operatorname{Re} p = \beta > 0$) в силу асимптотической формулы [15] для функции $Q_\nu(x)$ и леммы Жордана можно свести к вычету в точке $p = 0$ и к интегралам по берегам разреза, соединяющего точки $p = \infty$ и $-0,25$ вдоль отрицательной части вещественной оси плоскости p . Аналогичный разрез в плоскости x ($-\infty, 1$) использован для выделения однозначной ветви функции $Q_\nu(x)$, так что символ $Q_\nu(+0i)$ следует понимать как значение функции $Q_\nu(x)$ на верхнем берегу разреза. Используя известные [15] формулы для $Q_\nu(+0i)$, формулы, связывающие функции Лежандра первого и второго рода, и значение вычета функции $\exp(p\zeta)c^*(p, x)$ в точке $p = 0$, имеем

$$(3.7) \quad c = \frac{2 \operatorname{arctg} x}{\pi} - 4 \sqrt{\pi} \exp \left\{ -\frac{\zeta}{4} \right\} \int_0^\infty \frac{r \operatorname{th}(\pi r) \exp(-\zeta r^2) G_1(x, r) dr}{\operatorname{ch}(\pi r) (r^2 + 1/4) |\Gamma(1/4 + ir/2)|^2}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, а функции $G_j(x, r)$ определяются формулами

$$(3.8) \quad G_j(x, r) = \frac{P_{ir-1/2}(ix) + (-1)^j P_{ir-1/2}(-ix)}{-2(-i)^j} \quad j = 1, 2,$$

$P_\nu(x)$ — функция Лежандра первого рода. Основным интерес представляет поток вещества из каверны, который находится из выражения

$$(3.9) \quad q = \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{2}{\pi} + 8\pi \exp \left\{ -\frac{\zeta}{4} \right\} \int_0^\infty \frac{r \operatorname{th}(\pi r) \exp(-\zeta r^2) dr}{\operatorname{ch}(\pi r) (r^2 + 1/4) |\Gamma(1/4 + ir/2)|^4}.$$

При дифференцировании интеграла (3.7) поменяли порядок дифференцирования и интегрирования, что обосновано в силу абсолютной сходимости интеграла и его производных по x , которая существует при $\zeta \geq \delta > 0$. Использовано также равенство $P'_\nu(0) = -2 \sqrt{\pi} / \Gamma(-\nu/2) \times \Gamma(1/2 + \nu/2)$. Интеграл в (3.9) сходится быстро при больших временах. Применяя метод Лапласа [11], легко получаем асимптотическую при $\zeta \rightarrow \infty$ формулу для безразмерного потока вещества

$$(3.10) \quad q \sim \frac{2}{\pi} + \frac{8\pi^{5/2}}{\Gamma^4(1/4)} \frac{\exp(-\zeta/4)}{\zeta \sqrt{\zeta}} = 0,6366 + 0,8099 \frac{\exp(-\zeta/4)}{\zeta \sqrt{\zeta}}$$

показывающую скорость приближения q к стационарному значению $2/\pi$. Можно видеть также, что при $\zeta \rightarrow 0$ $q \sim 1/\sqrt{\pi \zeta}$.

Решение (3.7) является равномерно пригодным решением нулевого порядка по n уравнения (3.1). Оно носит погранслойный характер и описывает начальную стадию извлечения вещества из щели, пока можно пренебречь «обеднением» каверны, т. е. считать внешнее решение равным единице. Интерес представляет выяснить поведение средней концентрации вещества в каверне при больших временах. Для этого проинтегрируем по y (3.1) в пределах $(0, 1)$ и перейдем к размерным координатам:

$$(3.11) \quad d\langle c \rangle / d\tau = -q\Psi_0 / l_1^2, \quad \langle c \rangle = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} c dx_1.$$

Отсюда видно, что характерным временем изменения средней концентрации $\langle c \rangle$ будет $T_2 = l_1^2 / \Psi_0$. В то же время характерный масштаб времени для уравнения (3.3) и его решения (3.7) $T_1 = D l_1^2 / \Psi_0^2$. Введем еще «диффузионное» время $T_3 = l_1^2 / D$. Между введенными масштабами и принятым

неравенством $n \ll 1$ существуют соотношения

$$T_2/T_3 = (T_1/T_3)^{1/2} = D/\Psi_0 = n^{1/2} \ll 1,$$

которые устанавливают иерархию масштабов: $T_1 \ll T_2 \ll T_3$. Отсюда видим, что, во-первых, решение (3.7) применимо при достаточно малых временах ($\tau \ll T_2$), пока можно пренебречь изменением концентрации вдали от границы обмена, и, во-вторых, наличие циркуляционного течения в каверне значительно сокращает характерное время изменения $\langle c \rangle$, которое при отсутствии течения имеет порядок T_3 . Соотношения (3.7), (3.9) показывают, что только в узкой полоске $x_1 = l_1 O(n^{1/2}) \ll l_1$ решение задачи существенно изменяется, т. е. почти во всем объеме каверны $c = 1$. Если бы в начальном условии (3.2) вместо единицы взять некоторую другую постоянную, то в формуле (3.9) и других эта постоянная присутствовала бы как множитель, который обозначим c_∞ . В силу вышесказанного средняя концентрация с большой точностью совпадет с c_∞ . Поскольку в масштабе T_1 средняя концентрация меняется очень медленно, то замена c_∞ на $\langle c \rangle$ в соотношениях (3.7), (3.9) приведет к тому, что уравнение (3.3) будет удовлетворено практически точно. С такой же точностью можно определить эволюцию $\langle c \rangle$, подставив в (3.11) величину q , выраженную через $\langle c \rangle$ согласно последнему замечанию. Таким образом, приходим к

$$(3.12) \quad d\langle c \rangle/d\tau = -\kappa \langle c \rangle, \quad \kappa = 2\Psi_0/\pi l_1^2.$$

Переход в (3.11) к асимптотическому выражению для потока вещества допустим при временах порядка T_2 , для которых справедливо (3.12). При этом κ может трактоваться как коэффициент обмена между основным потоком и застойной каверной.

Уравнение (3.12) при начальном условии $\langle c \rangle|_{\tau=0} = 1$ легко интегрируется: $\langle c \rangle = \exp(-\kappa\tau)$. Выпишем также выражение для c

$$(3.13) \quad c_* = \langle c \rangle c,$$

пригодное во всем диапазоне времени, где c определяется формулой (3.7). При $\tau \gg T_1$ (3.13) принимает простой вид

$$(3.14) \quad c_* = (2/\pi) \exp(-\kappa\tau) \arctg(x_1 \omega / l_1 \sqrt{6n}).$$

4. Некоторые дополнения и обобщения. Так как при достаточно больших скоростях внешнего потока $Re = v l_1 / D \gg 1$, то, поскольку $\Psi \sim v l_1$, $D_1 \sim v^2 l_1^2 / D \gg D$ или $n \ll 1$. Поэтому уравнение (3.3) является типичным для каверн общей формы вблизи зоны склейки вихревого и потенциального потоков. Тогда имеет смысл определить коэффициент $k = D_1''(0)/2$, как было в п. 3, и для общего случая. Последовательность расчета такова: в (2.8) разлагаем функцию $\psi_\pm(x_1)$ в ряд Фурье, далее в формуле (1.11) для D_1 переходим к переменной x_1 . Затем, используя равенство Парсевалю, получаем выражение для $\bar{D}_1(x_1)$ в виде ряда, дважды проинтегрировав который и подставив $x_3 = 0$, находим сумму, которую при помощи разложения функции Грина для данной задачи можно привести к виду

$$(4.1) \quad k = \frac{D_1''(0)}{2} = \frac{4}{\alpha^2} \int_1^\alpha (\alpha - x) \omega_1(x) dx \int_0^\alpha y \omega_1(y) dy.$$

Отметим еще одну полезную формулу для k . Поскольку на линии склейки $x_1 = 0$, $\psi = 0$, а $v_2 \neq 0$, то из (1.4) $\psi \sim -H_1 v_2|_{x_1=0} x_1$. Подставляя это соотношение в формулу для $D_1(x_1)$, найдем искомую формулу

$$(4.2) \quad k = \int_0^1 H_1 H_2 v_2^2|_{x_1=0} dx_2 = m(0) \langle v_2^2 \rangle|_{x_1=0}.$$

Замечаем, что для нахождения параметров задачи в рассматриваемом предельном случае достаточно знать распределение v_2 и ω_1 вдоль границы

раздела $x_1 = 0$, а не во всей области течения, что является существенным упрощением. Если в формулу (4.2) подставить скорость v внешнего потока, а в (4.1) $\omega = \text{const}$, то, приравняв эти формулы, получим (координаты x_1, x_2 декартовы) соотношение $v \approx 0,41 \omega$, связывающее v и ω , достаточно близкое к (2.11).

Для основного в зоне склейки уравнения (3.3) можно ставить граничные условия первого, второго или третьего рода на границе $x = 0$. Эффективный метод решения возникающих при этом задач, кроме преобразования Лапласа, — применение специального интегрального преобразования, содержащего функции $G_j(x, r)$ (3.8). Используя методику [16], после некоторых преобразований получим

$$(4.3) \quad f(x) = 2 \int_0^{\infty} \frac{r \operatorname{th}(\pi r) \Phi(r, x) dr}{\{[h^2 + B^2(r)] \operatorname{ch}(\pi r) - 2hB(r)\}} \int_0^{\infty} f(\xi) \Phi(r, \xi) d\xi,$$

искомое интегральное преобразование, где $h \geq 0$ — постоянный параметр в граничном условии третьего рода $\partial\Phi/\partial x|_{x=0} = h\Phi$,

$$B(r) = \frac{2 \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} \left(ir - \frac{1}{2} \right) \right] \Gamma^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{ir}{2} \right)}{\Gamma^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{ir}{2} \right)}, \quad \Phi(r, x) = B(r) G_2(x, r) + h G_1(x, r).$$

Легко убедиться, что $B(r)$, а значит, и Φ вещественны на линии интегрирования. В частных случаях $h \rightarrow \infty$ и 0 , что соответствует переходу от граничного условия третьего рода к условиям первого и второго рода; (4.3) переходит в известные [17] разложения

$$f(x) = 2 \int_0^{\infty} \frac{r \operatorname{th}(\pi r)}{\operatorname{ch}(\pi r)} G_j(x, r) dr \int_0^{\infty} f(\xi) G_j(\xi, r) d\xi, \quad j = 1, 2.$$

Заметим, что часто используемый нами масштаб функции тока Ψ_0 (например, в (3.12)) можно выражать через другие параметры из размерных соотношений для k ((4.1) или (4.2)).

При рассмотрении примера в п. 3 для простоты использовали схему течения, когда ω постоянна во всей щели, в то время как в экспериментах наблюдается несколько зон с различной (постоянной) завихренностью (см. [5], где приведена фотография течения с двумя зонами и отмечено, что завихренности в зонах равны по величине и имеют противоположные знаки).

Формулы п. 2 для функции тока, которые используются для расчета коэффициента эффективной диффузии \bar{D}_1 , содержат произвольное распределение завихренности в щели, в частности кусочно-постоянное, так что сделанное замечание может быть легко учтено при расчетах, если известны границы зон и значения завихренности в них. Поскольку при рассматриваемых параметрах потока определяющее значение имеет локальное решение в зоне склейки вихревого и потенциального течений, отмеченное обстоятельство несущественно для получения основного погранслоного уравнения в этой зоне (3.3) и анализа его решения. Однако при переходе к большим временам (см. п. 3) при наличии нескольких вихревых зон целесообразно уравнение (3.12) заменить на систему N (по количеству зон) уравнений, которая получается из тех же соображений, что и (3.12), и имеет вид

$$(4.4) \quad \begin{aligned} d\langle c_1 \rangle / d\tau &= -\kappa_0 \langle c_1 \rangle + \kappa_1 (\langle c_2 \rangle - \langle c_1 \rangle), \\ d\langle c_j \rangle / d\tau &= \kappa_{j-1} (\langle c_{j-1} \rangle - \langle c_j \rangle) + \kappa_j (\langle c_{j+1} \rangle - \langle c_j \rangle), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, \\ d\langle c_N \rangle / d\tau &= \kappa_N (\langle c_{N-1} \rangle - \langle c_N \rangle), \end{aligned}$$

где считаем концентрацию примеси в основном потоке равной нулю и не учитываем возможного обмена веществом между дном каверны и по-

следней N -й зоной. Осреднение c_j произведено подобно (3.11) по всей j -й зоне. Система (4.4) дополняется естественными начальными условиями

$$(4.5) \quad \langle c_j \rangle |_{\tau=0} = c_j^0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

и легко решается стандартными методами. Физическая интерпретация задачи (4.4), (4.5) состоит в следующем. Первоначально заданное распределение концентрации примеси по траншее быстро выравнивается (в соответствующем масштабе, см. п. 3) в пределах циркуляционных зон за счет эффективной диффузии. Это и приводит к условиям (4.5). Далее эволюция системы определяется относительно слабым переносом вещества через границы зон, поскольку там коэффициент эффективной диффузии резко снижается и приближается к коэффициенту молекулярной диффузии. Этот обмен веществом между зонами и описывает система (4.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.— 1953.— V. 219, N 1137.
2. Aris R. On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.— 1956.— V. 235, N 1200.
3. Марон В. И. Перемешивание взаимно-растворимых жидкостей в турбулентном потоке в трубе // ПМТФ.— 1971.— № 5.
4. Дильман В. В., Кронберг А. Е. О продольной дисперсии при ламинарном движении жидкости в круглой трубе // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1984.— № 1.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели.— М.: Наука, 1977.
6. Batchelor G. K. On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number // J. Fluid Mech.— 1956.— V. 1, N 2.
7. Batchelor G. K. An introduction to fluid dynamics.— Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1970. Рус. пер. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости.— М.: Мир, 1973.
8. Шифрин Э. Г. К теореме Бэтчелора о циркуляционной области // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1976.— № 1.
9. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967.
10. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972.
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1973.
12. Гольдштик М. А. Вихревые потоки.— М.: Наука, 1981.
13. Шабат А. Б. О двух задачах на склеивание // ДАН СССР.— 1963.— Т. 150, № 6.
14. Чернышенко С. И. О приближенном способе определения завихренности в зоне отрыва при вязкости, стремящейся к нулю // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1982.— № 1.
15. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука, 1973.— Т. 1.
16. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики // Вопросы математической физики.— Л.: Наука, 1976.
17. Лебедев И. П., Скальская И. П. Об одном разложении произвольной функции в интеграл по сферическим функциям // ПММ.— 1966.— Т. 30, № 2.

Поступила 24/III 1986 г.

УДК 532.526.2 : 532.135

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ (качественное исследование)

Г. В. Жижин
(Ленинград)

1. В химических производствах широко используются течения различного рода пульс, суспензий, полимерных смесей и растворов, обладающих свойствами неньютоновских жидкостей, индекс течения n которых может принимать значения от нуля до нескольких единиц. Для расчета таких течений часто применяют уравнение автомодельного ламинарного пограничного слоя, решения которого чрезвычайно разнообразны и существенно зависят от величины индекса течения и граничных условий. В связи с этим представляет интерес классификация решений уравнения автомодельного ламинарного пограничного слоя неньютоновских жидкостей при изменении индекса течения n в принципе от нуля до бесконечности на основе качественного исследования дифференциальных уравнений. Впервые качественное изучение уравнения плоского