УДК 532.5

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СПИРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

С. Н. Аристов, Д. В. Князев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь
E-mails: asn@icmm.ru, dvk5@yandex.ru

Получены стационарные решения уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости, описывающие регулярные и локализованные в пространстве спирально-симметричные вихревые образования. Показано, что в зависимости от соотношения между параметрами, задающими величины кинетического момента и энергии потока, найденное трехмерное решение может либо вовсе не существовать, либо быть представленным в виде линейной суперпозиции конечного числа мод. Описание широкого класса спирально-симметричных двумерных течений сведено к квадратуре.

Ключевые слова: спирально-симметричные течения, точные решения.

Исследование вихревых образований в приближении идеальной жидкости проводится, как правило, в предположении о потенциальности течения [1]. Большое значение имеют также решения уравнений Эйлера с отличной от нуля завихренностью, поскольку они позволяют детально описать структуру отдельных вихрей и характер их локализации в пространстве. Исследование пространственно локализованных регулярных вихрей выходит за рамки классической гидродинамики. Отметим, в частности, известную аналогию между уравнениями движения идеальной жидкости и системой, описывающей равновесие идеально проводящей среды (в том числе плазмы). Указанная аналогия позволяет отождествлять вихревые структуры с локализованными токовыми конфигурациями [2]. В этом случае физически содержательными оказываются именно непотенциальные решения, лишенные сингулярностей и характеризующиеся ярко выраженной локализацией в пространстве.

В настоящей работе строятся стационарные решения уравнений Эйлера, описывающие регулярные спирально-симметричные локализованные вихри. Результаты теоретических и экспериментальных исследований [3] указывают на возможность адекватного описания таких структур в рамках модели идеальной жидкости.

1. Семейство винтовых линий — пространственных спиралей, навитых на цилиндр, задается системой уравнений

$$r = \mathrm{const}, \qquad \xi = kz + \lambda\varphi = \mathrm{const}, \tag{1}$$

где r, φ, z — цилиндрические координаты; k, λ — заданные действительные числа.

Движения жидкости, гидродинамические поля которых зависят от пространственных переменных r, ξ, в работе [4] названы течениями со спиральной симметрией, а в работе [3] течениями с винтовой симметрией. Для таких течений условие несжимаемости позволяет ввести аналог функции тока:

$$v_r = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial\xi}, \qquad \lambda v_\varphi + krv_z = -\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{2}$$

Здесь v_r, v_φ, v_z — компоненты скорости в цилиндрической системе координат.

Как известно, спирально-симметричные стационарные течения несжимаемой жидкости описываются уравнением для функции тока [5]

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{r}{\lambda^2+k^2r^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big)=\frac{dB(\psi)}{d\psi}-\frac{L(\psi)}{\lambda^2+k^2r^2}\Big(\frac{dL(\psi)}{d\psi}-\frac{2k\lambda}{\lambda^2+k^2r^2}\Big), \tag{3}$$

содержащим в правой части два интеграла движения, зависящих только от ψ:

$$B(\psi)=p+(v_r^2+v_\varphi^2+v_z^2)/2, \qquad L(\psi)=krv_\varphi-\lambda v_z. \tag{4}$$

Постоянство функции Бернулли B вдоль ψ выражает закон сохранения энергии идеальной жидкости. Второй интеграл (4) имеет смысл закона сохранения момента импульса $\sqrt{\lambda^2+k^2r^2}\,v_\tau=L(\psi)$, вычисленного по компоненте скорости v_τ, касательной к винтовой линии (1). В осесимметричном пределе ($\lambda=0$, $k=1$) функция $L(\psi)$ переходит в закон сохранения циркуляции rv_φ, а уравнение (3) — в известное уравнение [6], называемое в физике плазмы уравнением Грэда — Шафранова [7]. Вид зависимостей $B(\psi)$, $L(\psi)$ определяется постановкой конкретной задачи. Во всяком случае, он должен согласовываться с заданными граничными условиями.

Наличие у течений с винтовой симметрией двух законов сохранения (4) позволяет выразить все составляющие поля скорости через функцию тока и ее производные (вторые уравнения (2) и (4) можно рассматривать как систему уравнений относительно v_φ, v_z):

$$v_r=\frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial\xi},\quad v_\varphi=\frac{1}{\lambda^2+k^2r^2}\Big(krL(\psi)-\lambda\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big),\quad v_z=\frac{-1}{\lambda^2+k^2r^2}\Big(\lambda L(\psi)+kr\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big). \tag{5}$$

Уравнение (3), записанное в виде

$$\frac{1}{x}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{4x}{1+x}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big)=\frac{dB_*(\psi)}{d\psi}-\frac{L_*(\psi)}{1+x}\Big(\frac{dL_*(\psi)}{d\psi}-\frac{2}{1+x}\Big), \tag{6}$$

не содержит явно постоянные λ и k. Здесь

$$x=\Big(\frac{kr}{\lambda}\Big)^2,\quad \eta=\frac{\xi}{\lambda},\quad B_*=\frac{\lambda^4}{k^2}\,B,\quad L_*=\frac{\lambda}{k}\,L. \tag{7}$$

2. Рассмотрим спирально-симметричное установившееся течение идеальной жидкости с 2π-периодическим по азимутальному углу φ и исчезающим на бесконечности полем скорости

$$\boldsymbol{v}(x,\eta)=\boldsymbol{v}(x,\eta+2\pi), \qquad \boldsymbol{v}(\infty,\eta)=0. \tag{8}$$

Остальные граничные условия указаны ниже с учетом требования регулярности гидродинамических полей во всей области движения.

В силу (5) краевым условиям (8) удовлетворяют функции L и B простейшего вида

$$L_*(\psi)=\alpha\psi, \qquad B_*(\psi)=\gamma+(\beta\psi)^2/2, \tag{9}$$

где α, β, γ — заданные константы. Случай $\beta=0$, соответствующий потенциальным движениям жидкости или течениям типа течения Бельтрами, изучался в [3]. Выбирая законы сохранения спирально-симметричного течения в форме (9), можно линеаризовать уравнение (6):

$$\frac{1}{x}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{4x}{1+x}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big)=\Big(\beta^2-\frac{\alpha^2}{1+x}+\frac{2\alpha}{(1+x)^2}\Big)\psi. \tag{10}$$

Это позволяет искать частные решения (10) с разделяющимися переменными

$$\psi=\Psi_m(x)\sin{(m\eta+\Omega_m)}. \tag{11}$$

Здесь Ω_m — заданный фазовый сдвиг. В силу условия периодичности (8) постоянная разделения переменных m является целым числом, играющим роль собственного значения в спектральной задаче относительно амплитуд Ψ_m

$$\begin{gathered}\frac{4x}{1+x}\,\Psi_m'' + \frac{4}{(1+x)^2}\,\Psi_m' = \Big(\beta^2 + \frac{m^2}{x} - \frac{\alpha^2}{1+x} + \frac{2\alpha}{(1+x)^2}\Big)\Psi_m,\\ x=0\colon\quad \Psi_m = \Psi_m' = 0, \qquad x=\infty\colon\quad \Psi_m = 0\end{gathered} \tag{12}$$

с граничными условиями, следующими из (8) и требования регулярности решения. В (12) штрих обозначает дифференцирование по переменной x. Заметим, что значению $m = 0$ соответствует осесимметричное решение с нулевой радиальной составляющей скорости. Следовательно, для этого собственного числа граничные условия (12) в точке $x = 0$, означающие отсутствие на оси z источников или стоков массы, излишни и могут быть заменены какими-либо условиями нормировки.

Нетривиальные решения системы (12) будем искать в виде, обеспечивающем выполнение граничных условий

$$\Psi_m(x) = x^{m/2} P_m(x) \exp\left(-\beta x/2\right), \qquad m \geqslant 0, \quad \beta > 0. \tag{13}$$

Для функции $P_m(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$\begin{aligned}4x(1+x)P_m'' &+ 4[1 - (x+1)(\beta x - m)]P_m' +\\ &+ [((m+\beta)^2 - \alpha^2)x + (m+\beta+1)^2 - (\alpha-1)^2]P_m = 0,\end{aligned}$$

достаточно потребовать ограниченности при $x = 0$ и медленного по сравнению с экспоненциальным роста на бесконечности. Этим условиям удовлетворяют полиномиальные решения степени n с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами

$$\begin{gathered}P_m(x) = \sum_{i=0}^{n} A_{m,i} x^i, \qquad A_{m,-1} = 0, \quad A_{m,0} = 1,\\ A_{m,i+1} = \frac{(m+\beta+1)^2 - (\alpha-1)^2 - 4i(m+i-\beta-1)}{4(i+1)(m+i+1)}\,A_{m,i} - \frac{\beta(n-i+1)}{(i+1)(m+i+1)}\,A_{m,i-1},\end{gathered} \tag{14}$$

существующие при условии, согласно которому неотрицательные целые числа m и n связаны соотношением

$$n = [\alpha^2 - (m+\beta)^2]/(4\beta). \tag{15}$$

Очевидно, что равенство (15) может быть удовлетворено не для любого набора заданных параметров α и β, характеризующих степень “накачки” среды энергией и кинетическим моментом. Даже при “подходящих” значениях этих параметров величины m и n, являющиеся неотрицательными целыми числами, могут находиться лишь в ограниченном диапазоне значений. Таким образом, спектр решений вида (13) системы (12) ограничен и дискретен, что нетипично для гидродинамических задач. Линейная комбинация решений (11), (13), принадлежащих этому спектру, также является решением исходного уравнения (10).

Не выясняя общие условия разрешимости (15), рассмотрим два случая, когда эти условия выполняются. Предварительно решение (15) целесообразно записать в более симметричном виде

$$n = [a(ba+2) - m(bm+2)]/4, \qquad \beta = 1/b, \qquad \alpha = a + 1/b. \tag{16}$$

В первом случае будем полагать, что $a = 2a_*$ и $m = 2m_*$ — четные числа $(0 \leqslant m \leqslant a)$. Тогда соотношение (16) принимает вид

$$n = b(a_*^2 - m_*^2) + a_* - m_*.$$

Следовательно, для того чтобы n являлось неотрицательным целым числом, достаточно, чтобы b было неотрицательным целым либо рациональным числом одного из следующих трех типов ($a_* \neq m_*$):

$$b_*/(a_*^2 - m_*^2), \qquad b_*/(a_* + m_*), \qquad b_*/(a_* - m_*)$$

(b_* — любое натуральное число). Например, если $a = 10$, $b = 1$, то конечный спектр пар $\{m; n\}$ состоит из шести элементов: $\{0; 30\}$, $\{2; 28\}$,$\{4; 24\}$, $\{6; 18\}$, $\{8; 10\}$, $\{10; 0\}$.

Во втором случае будем считать, что $a = 2a_* - 1$ и $m = 2m_* - 1$ — нечетные числа ($0 \leqslant m \leqslant a$). Тогда из (16) получаем

$$n = (a_* - m_*)[b(a_* + m_* - 1) + 1].$$

Следовательно, для того чтобы n являлось неотрицательным целым числом, достаточно, чтобы b было неотрицательным целым либо рациональным числом одного из следующих двух типов ($a_* \neq m_*$):

$$b_*/(a_* - m_*), \qquad b_*/(a_* + m_* - 1)$$

(b_* — любое натуральное число). Пусть, например, $b = 9$, $a = 1$. Тогда конечный спектр пар $\{m; n\}$ состоит из пяти элементов: $\{1; 24\}$, $\{3; 21\}$, $\{5; 16\}$, $\{7; 9\}$, $\{9; 0\}$.

Осесимметричный аналог найденных выше решений изучался в работах [8, 9], в которых показано, что в этом случае многочлены (14) переходят в полиномы Лагерра. Родственные вращательно-симметричные решения найдены в работе [10] методами группового анализа дифференциальных уравнений.

3. С помощью уравнения (6) и выражений для составляющих скорости (5) рассмотрим широкий класс установившихся спирально-симметричных течений с равной нулю осевой компонентой скорости v_z. Такие течения можно назвать слоистыми, так как каждая жидкая частица движется в некоторой плоскости, перпендикулярной оси z. Слои смещены относительно друг друга и не перемешиваются.

Приравнивая к нулю правую часть выражения (5) для составляющей скорости v_z, с учетом (7) получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{L_*(\psi)}{2x}. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (6) и интегрируя один раз, находим

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \pm\sqrt{2xB_*(\psi) - L_*^2(\psi) + F(x)}. \tag{18}$$

Здесь $F(x)$ — произвольная определяемая ниже функция, возникающая в результате интегрирования.

Условием совместности выражений (17), (18) является уравнение

$$2B_* \frac{dL_*}{d\psi} - L_* \frac{dB_*}{d\psi} + 2B_* = -\Big(F' + \frac{F}{x} \frac{dL_*}{d\psi}\Big), \tag{19}$$

левая часть которого зависит только от ψ, а правая, содержащая функцию F и ее производную, зависит также от x.

Ограничимся рассмотрением случая $F(x) = F_0 x$ ($F_0 = \text{const}$). Из (19) нетрудно найти зависимость между сохраняющимися величинами B_* и L_*:

$$2B_*(\psi) = B_0 L_*^2(\psi) \exp\Big(2\int \frac{d\psi}{L_*(\psi)}\Big) - F_0 \qquad (B_0 = \text{const}). \tag{20}$$

Интегрируя (17) и (18) с учетом последнего равенства, получаем квадратуру

$$\int \frac{d\psi}{L_*(\psi)} = -\ln\left(\sqrt{B_0 x}\,\sin(\eta+\eta_0)\right) \qquad (\eta_0 = \text{const}). \tag{21}$$

Для произвольной функции $L_*(\psi)$ соотношения (20), (21) дают точное решение уравнений Эйлера, описывающее установившееся слоистое спирально-симметричное течение идеальной жидкости. Используя (20), (21), можно построить регулярное локализованное решение. Пусть, например, $L_*(\psi) = -2\psi\ln(\psi)$ и $B_0 > 0$. Тогда

$$\begin{gathered}
\psi = \exp\left(-B_0 x \sin^2(\eta+\eta_0)\right), \qquad B_* = 2B_0\psi^2\ln(1/\psi) - F_0/2, \\
v_r = -(B_0 k/\lambda^2)\sqrt{x}\,\sin(2(\eta+\eta_0))\exp\left(-B_0 x\sin^2(\eta+\eta_0)\right), \\
v_\varphi = (2B_0 k/\lambda^2)\sqrt{x}\,\sin^2(\eta+\eta_0)\exp\left(-B_0 x\sin^2(\eta+\eta_0)\right), \qquad v_z = 0.
\end{gathered} \tag{22}$$

Соотношения (22) являются примером точного решения уравнения (6) с нелинейной правой частью.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Фундаментальные** и прикладные проблемы теории вихрей / Под ред. А. В. Борисова, И. С. Мамаева, М. А. Соколовского. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.
2. **Фадеев В. М., Кварцхава И. Ф., Комаров Н. Н.** Самофокусировка локальных плазменных токов // Ядер. синтез. 1956. № 5. С. 202–209.
3. **Алексеенко С. В.** Введение в теорию концентрированных вихрей / С. В. Алексеенко, П. А. Куйбин, В. Л. Окулов. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 2003.
4. **Пухначев В. В.** Симметрии в уравнениях Навье — Стокса // Успехи механики. 2006. № 1. С. 6–76.
5. **Johnson J. L., Oberman C. R., Kulsrud R. M., Frieman E. A.** Some stable hydromagnetic equilibria // Phys. Fluids. 1958. V. 1, N 4. P. 281–296.
6. **Bragg S. L., Hawthorne W. R.** Some exact solutions of the flow through annular cascade actuator discs // J. Aeronaut. Sci. 1950. V. 17. P. 243–249.
7. **Ландау Л. Д.** Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Физматлит, 2005.
8. **Свиркунов П. Н.** Простая модель многоячейкового вихря // Тр. Ин-та эксперим. метеорологии. 1991. Вып. 54, № 151. С. 25–29.
9. **Bhattacharya S.** Exact analytical solutions for steady three-dimensional inviscid vortical flows // J. Fluid Mech. 2007. V. 590. P. 147–162.
10. **Мещерякова Е. Ю., Пухначев В. В.** Интегрируемые модели вращательно-симметричного движения идеальной несжимаемой жидкости // Докл. АН. 2007. Т. 412, № 2. С. 188–192.

Поступила в редакцию 21/IX 2009 г.