

УДК 532.529:536.24

ПРИСТЕНОЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В РАСЧЕТАХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

К.Н. ВОЛКОВ

Университет Суррея, Гилфорд, Великобритания

Рассматриваются вопросы, связанные с постановкой и численной реализацией граничных условий на стенке при расчете турбулентных течений на неструктурированных сетках. Предлагается способ реализации слабых граничных условий, предполагающих ненулевое значение касательной скорости на стенке, при дискретизации осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса по методу контрольного объема. Возможности разработанного подхода демонстрируются на примере расчета течения в межлопаточном канале низкоскоростного компрессора. Показывается влияние пристеночного шага сетки на точность расчетов, в частности, распределение давления вблизи задней кромки профиля, и исследуется сеточная зависимость решения при использовании метода пристеночных функций и слабых граничных условий.

ВВЕДЕНИЕ

Для решения задач газовой динамики и теплообмена, связанных с оптимизацией лопаток и проточной части газовых турбин и компрессоров, требуется детальная информация о структуре течения и локальных характеристиках потока. Для гибкого описания областей сложной геометрической конфигурации, характерных для таких приложений, развиваются численные методы расчета сжимаемых турбулентных течений на неструктурированных сетках. При использовании неструктурированных сеток отпадает необходимость применения многоблочных сеток в многосвязных областях, а также появляется возможность добавления новых узлов без перестройки всей сетки, что требуется, например, для точного расчета пограничных слоев, скачков уплотнения, вихревых структур.

В отличие от хорошо разработанных технологий метода конечных элементов, конечно-объемные технологии на неструктурированных сетках характеризуются отсутствием единых принципов, позволяющих провести дискретизацию конвективных и диффузионных потоков, источниковых членов, а также учет граничных условий [1]. Достаточно часто способы дискретизации, имеющие различные характеристики, объединяются.

В инженерных приложениях для расчета турбулентных течений широко используются модели, основанные на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса. Вопросы их замыкания решаются на различном уровне сложности, а модели турбулентности классифицируются по числу дифференциальных уравнений, вводимых в дополнение к уравнениям изменения количества движения и теплопереноса.

Среди дифференциальных моделей турбулентности распространение на практике получили модель Спаларта–Аллмараса [2] и k - ϵ модель [3], а также различные их модификации.

Уравнения модели Спаларта–Аллмараса и $k-\varepsilon$ модели в формулировках [2, 3] пригодны для описания высокорейнольдсовых течений (вдали от стенки). Для моделирования течений в пристеночной области традиционно применяется несколько подходов — метод пристеночных функций ($y^+ \sim 10$), модели турбулентности с малыми числами Рейнольдса ($y^+ < 1$) и двухслойная $k-\varepsilon/k-l$ модель ($y^+ \sim 1$).

В методе пристеночных функций вязкий подслой и переходная область пограничного слоя не разрешаются, а описываются полуэмпирическими формулами (пристеночными функциями). Улучшение точности достигается при помощи решения упрощенных уравнений пограничного слоя в пристеночном контрольном объеме [4] (время счета увеличивается приблизительно на 30 %). Точный расчет характеристик турбулентности и напряжения трения на стенке требует сгущения узлов сетки около стенки. Увеличение сеточного разрешения около стенки (до $y^+ \sim 10$) обычно приводит к более высокой точности.

Стремление расширить границы применимости $k-\varepsilon$ -модели вплоть до стенки, включая вязкий подслой (при условии необходимого разрешения сетки в пограничном слое), привело к созданию ее версий с малыми числами Рейнольдса, различающихся формой записи источниковых членов, граничными условиями на стенке, а также демпфирующими функциями [5]. Несмотря на многочисленные расчеты и тестирование, применение моделей турбулентности с малыми числами Рейнольдса для решения широкого круга задач представляется затруднительным.

Двухслойная модель представляет собой компромиссный вариант между моделями турбулентности с высокими и малыми числами Рейнольдса. Пристеночная область разделяется на две подобласти – внутреннюю и внешнюю, граница между которыми зависит от локального числа Рейнольдса. Во внешней области используются уравнения модели [3], а во внутренней области — $k-l$ модель [6].

Расчеты турбулентных течений на неструктурированных сетках демонстрируют существенную зависимость решения от шага сетки вблизи стенки.

Для нормальной скорости на стенке, как правило, используется граничное условие непротекания $v_n = 0$, а для касательной — условие прилипания $v_\tau = 0$ (жесткие граничные условия). Несмотря на то, что постановка условия скольжения на стенке $v_\tau \neq 0$ (слабые граничные условия) противоречит физической реальности (разреженные течения не рассматриваются), такой подход используется в вычислительной практике, но в основном при дискретизации уравнений Навье–Стокса по методу конечных элементов [7], позволяя избежать применения пристеночных функций и связанных с ними проблем. При постановке слабых граничных условий влияние стенки на поток учитывается в виде сеточных напряжений сдвига и дополнительной сеточной генерации турбулентности за счет отличия профиля касательной скорости от логарифмического распределения около стенки. Касательная скорость на стенке получается из величины сдвиговых напряжений и учитывается при расчете невязки, обусловленной дискретизацией невязких и вязких потоков.

В настоящей работе проводится сравнение различных способов постановки и реализации граничных условий на стенке при расчете турбулентных течений на неструктурированных сетках. Предлагается способ реализации слабых граничных условий при дискретизации осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса по методу контрольного объема. Возможности разработанного подхода демонстрируются на примере расчета течения в межлопаточном канале низкоскоростного компрессора. Показывается влияние пристеночного шага сетки на точность расчетов, в частности, распределение давления вблизи задней кромки профиля, и исследуется сеточная зависимость решения при использовании метода пристеночных функций и слабых граничных условий.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В декартовой системе координат (x, y, z) нестационарное течение вязкого сжимаемого газа описывается уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) дополняется уравнением состояния совершенного газа

$$p = (\gamma - 1)\rho \left[e - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \right].$$

Вектор консервативных переменных \mathbf{Q} и вектора потоков \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} имеют следующий вид:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p - \tau_{xx} \\ \rho u v - \tau_{xy} \\ \rho u w - \tau_{xz} \\ (\rho e + p)u - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} + q_x \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v u - \tau_{yx} \\ \rho v v + p - \tau_{yy} \\ \rho v w - \tau_{yz} \\ (\rho e + p)v - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} + q_y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w u - \tau_{zx} \\ \rho w v - \tau_{zy} \\ \rho w w + p - \tau_{zz} \\ (\rho e + p)w - u\tau_{zx} - v\tau_{zy} - w\tau_{zz} + q_z \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора вязких напряжений и составляющие вектора теплового потока находятся из соотношений:

$$\tau_{ij} = \mu_e \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad q_i = -\lambda_e \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Здесь t — время, ρ — плотность, u, v, w — составляющие скорости в координатных направлениях x, y, z соответственно, p — давление, e — полная энергия единицы массы, T — температура, γ — отношение удельных теплоемкостей.

Уравнение (1) пригодно для описания как ламинарных, так и турбулентных течений. При моделировании турбулентных течений уравнение (1) дополняется

уравнениями модели турбулентности. При этом эффективная вязкость μ_e вычисляется как сумма молекулярной μ и турбулентной μ_t вязкости, а эффективная теплопроводность λ_e выражается через вязкость и число Прандтля

$$\mu_e = \mu + \mu_t, \quad \lambda_e = c_p \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right),$$

где c_p — теплоемкость при постоянном давлении. Для получения значения молекулярной вязкости в зависимости от температуры используется закон Сазерленда

$$\frac{\mu}{\mu_*} = \left(\frac{T}{T_*} \right)^{3/2} \frac{T_* + S_0}{T + S_0},$$

где $\mu_* = 1,68 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с), $T_* = 273$ К и $S_0 = 110,5$ К для воздуха. Молекулярная теплопроводность связывается с числом Прандтля (для воздуха $Pr = 0,72$). Турбулентному числу Прандтля присваивается постоянное значение (для воздуха $Pr_t = 0,9$).

2. МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Для замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, записанных в виде (1), используются модель Спаларта–Аллмараса, k – ε модель и двухслойная k – ε/k – l модель.

2.1. Модель Спаларта–Аллмараса

Модель Спаларта–Аллмараса предполагает решение уравнения [2]

$$\frac{\partial \rho \tilde{v}}{\partial t} + (\rho \mathbf{v} \nabla) \tilde{v} = \frac{1}{\sigma} \left\{ \nabla [(\mu + \rho \tilde{v}) \nabla \tilde{v}] + c_{b2} \rho \nabla \tilde{v} \nabla (\rho \tilde{v}) \right\} + S_{\tilde{v}}. \quad (2)$$

Источниковый член в уравнении (2) учитывает порождение и диссипацию турбулентной вязкости

$$S_{\tilde{v}} = c_{b1} \tilde{S} \tilde{v} - \left(c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\tilde{v}}{d} \right)^2,$$

где d — расстояние до стенки. Рабочая переменная \tilde{v} связана с турбулентной вязкостью $\nu_t = f_{v1} \tilde{v}$. Член производства турбулентности моделируется соотношением

$$\tilde{S} = S f_{v3} + \frac{\tilde{v}}{\kappa^2 d^2} f_{v2},$$

в котором S вычисляется на основе величины завихренности

$$S = (2\Omega_{ij}\Omega_{ij})^2, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Для обеспечения корректного поведения рабочей переменной в логарифмическом слое ($\tilde{v} = \kappa u_\tau$) вводится демпфирующая функция

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{v}}{v}.$$

Функции f_{v2} и f_{v3} имеют следующий вид:

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad f_{v3} = 1.$$

Функция f_w играет роль во внешней области пограничного слоя

$$f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad g = r + c_{w2} (r^6 - r), \quad r = \frac{\check{v}}{\kappa^2 d^2 \check{S}}.$$

Функция g выступает в качестве ограничителя, предотвращая завышенные значения f_w . При этом $r = 1$ и $f_w = 1$ в логарифмическом слое, уменьшаясь во внешней области. Постоянным модели присваиваются значения $c_{b1} = 0,1355$, $c_{b2} = 0,622$, $\sigma = 2/3$, $c_{v1} = 7,1$, $c_{w1} = c_{b1}/\kappa^2 + (1 + c_{b2})/\sigma$, $c_{w2} = 0,3$, $c_{w3} = 2,0$, $\kappa = 0,41$.

2.2. Диссипативная модель

Уравнения k - ε модели имеют вид [3]:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + (\rho \mathbf{v} \nabla) k = \nabla \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + P - \rho \varepsilon, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + (\rho \mathbf{v} \nabla) \varepsilon = \nabla \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon 1} P - c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon). \quad (4)$$

Член производства турбулентности находится из соотношения

$$P = \mu_t (2S_{ij} S_{ij})^2, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Турбулентная вязкость вычисляется по формуле Колмогорова–Прандтля $\mu_t = c_\mu \rho k^2 / \varepsilon$. Постоянным модели присваиваются значения $c_\mu = 0,09$, $\sigma_k = 1,0$, $\sigma_\varepsilon = 1,3$, $c_{\varepsilon 1} = 1,44$, $c_{\varepsilon 2} = 1,92$.

2.3. Двухслойная модель

Пристеночная область разделяется на две подобласти — внутреннюю и внешнюю, граница между которыми зависит от локального числа Рейнольдса $Re_y = \rho k^{1/2} y / \mu$, где y — расстояние от геометрического центра контрольного объема до стенки. При $Re_y > Re_{y*}$ используются уравнения (3) и (4), а турбулентная вязкость вычисляется по формуле Колмогорова–Прандтля. При $Re_y < Re_{y*}$ используется k - l модель [6], в которой кинетическая энергия турбулентности определяется из уравнения (3), уравнение (4) заменяется соотношением $\varepsilon = k^{3/2} / l_\varepsilon$, а турбулентная вязкость находится по формуле $\mu_t = c_\mu l_\mu \rho k^{1/2}$. Принимается, что $Re_{y*} = 180$.

Линейные масштабы l_μ и l_ε пропорциональны характерному масштабу турбулентных вихрей вблизи стенки $l_y = \kappa y$ и находятся из соотношений:

$$l_\mu = c_l y \left[1 - \exp \left(- \frac{Re_y}{A_\mu} \right) \right], \quad l_\varepsilon = c_l y \left[1 - \exp \left(- \frac{Re_y}{A_\varepsilon} \right) \right],$$

где $A_\mu = 50 \dots 70$, $A_\varepsilon = 2c_l$, $c_l = \kappa c_\mu^{-3/4}$ при $\kappa = 0,41$.

В качестве граничного условия на стенке для кинетической энергии турбулентности принимается условие $\partial k/\partial y = 0$. Граничного условия для диссипативной функции на стенке не требуется.

Резкий переход между подобластями приводит к проблемам, связанным со сходимостью решения. Для обеспечения плавного перехода вводится функция λ_ε такая, что $\lambda_\varepsilon = 0$ около стенки и $\lambda_\varepsilon = 1$ вдали от нее. Используется линейная зависимость $\lambda_\varepsilon = (220 - \text{Re}_y/40)$ при $180 \leq \text{Re}_y \leq 220$ или функция из работы [8]

$$\lambda_\varepsilon = \frac{1}{2} \left[1 + \text{th} \left(\frac{\text{Re}_y - \text{Re}_{y^*}}{A} \right) \right].$$

Постоянная A контролирует плавность перехода от одной модели к другой в пределах нескольких расчетных ячеек и определяется исходя из того, чтобы значение λ_ε составляло около 1 % от значения вдали от стенки при данном диапазоне изменения числа Рейнольдса ΔRe_y , поэтому $A = \Delta \text{Re}_y / \text{th}(0,98)$. На практике $\Delta \text{Re}_y = (0,05 \dots 0,2) \text{Re}_{y^*}$, в связи с чем $A = 1 \dots 10$.

Применение функции перехода позволяет избежать явного разделения расчетной области на подобласти. Турбулентная вязкость вычисляется по формуле $\mu_t = \lambda_\varepsilon \mu_{t1} + (1 - \lambda_\varepsilon) \mu_{t2}$, где μ_{t1} и μ_{t2} соответствуют внешней и внутренней областям пограничного слоя. Выражение для источникового члена в уравнении для диссипативной функции имеет вид

$$S_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \left[\frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon 1} P - c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon) \right] + (1 - \lambda_\varepsilon) \left[\alpha \left(\frac{k^{3/2}}{l_\varepsilon} - \rho \varepsilon \right) \right],$$

которое во внешней области сводится к (4), а во внутренней области приводит к уравнению

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\alpha \left(\varepsilon - \frac{k^{3/2}}{l_\varepsilon} \right),$$

имеющему решение

$$\varepsilon(t) = \frac{k^{3/2}}{l_\varepsilon} - \varepsilon(0) \exp(-\alpha t).$$

Постоянная $\alpha \sim 1$ контролирует разницу между ε и $k^{3/2}/l_\varepsilon$.

В качестве начального приближения используется решение на грубой сетке, полученное на основе k - ε модели с пристеночными функциями. Находится распределение y^+ вдоль стенки. При необходимости осуществляется дробление сетки для получения более мелких значений y^+ . Решаются уравнения двухслойной модели, и снова оценивается распределение пристеночной координаты. Процесс повторяется до получения сетки, для которой $y^+ \sim 1$.

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Дискретизация уравнения (1) и уравнений модели турбулентности проводится при помощи метода контрольного объема [1]. Используется контрольный объем, центрированный относительно узла сетки. Несмотря на то, что такой требует примерно в 6 раз большего объема памяти по сравнению со случаем, когда контрольный объем совпадает с ячейкой, а также более мелкого шага сетки около стенки, он позволяет получить более точные результаты [1].

К особенностям реализации метода контрольного объема следует отнести возможность работы как на структурированных, так и на неструктурированных сетках, использование разностных схем высокого порядка по времени и пространственным координатам, выбор для дискретизации законов сохранения среднемерного контрольного объема, применение соотношений для расчета градиента и псевдолапласиана, позволяющих получить более точные результаты на сильно растянутых сетках в пограничном слое, а также запись соотношений для расчета потоков через грани внутренних и граничных контрольных объемов в одинаковой форме.

Для дискретизации по времени используется метод Рунге–Кутты пятого порядка. Для дискретизации невязких потоков применяется схема MUSCL, а для дискретизации вязких потоков — конечно-разностные формулы 2-го порядка.

Система разностных уравнений решается многосеточным методом на основе схемы полной аппроксимации. Последовательность вложенных сеток строится при помощи метода схлопывающихся граней [1].

Расчеты проводятся в декартовых координатах (x, y, z) . Однако для задания граничных условий и обработки результатов численного моделирования используется также цилиндрическая система координат (x, r, θ) . Проведение расчетов в безразмерных переменных позволяет объединить невязки, обусловленные дискретизацией уравнений неразрывности, изменения количества движения и энергии, а также невязки, возникающие в результате дискретизации уравнений модели турбулентности.

В начальный момент времени считается, что газ покоится. В качестве рабочей среды принимается воздух (теплофизические свойства — справочные).

Вычислительная процедура реализована в виде компьютерного кода на языках программирования Fortran 77 и C/C++, а для ее распараллеливания применяется интерфейс межпроцессорного взаимодействия MPI.

4. МЕТОД ПРИСТЕНОЧНЫХ ФУНКЦИЙ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ

Пристеночные функции представляют собой набор полуэмпирических формул, которые связывают искомые функции в пристеночных ячейках сетки с соответствующими величинами на стенке.

В турбулентном пограничном слое обычно выделяется несколько характерных подобластей (рис. 1), используется расстояние от стенки $y^+ = yu_\tau/v$ и скорость потока $u^+ = u/u_\tau$, выраженные в пристеночных единицах, где $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$.

Области закона следа и перемежаемости объединяются во внешнюю область, которая занимает порядка 80 % от толщины всего слоя. Внешний слой является областью полностью развитого турбулентного течения, свойства которого зависят от предыстории потока.

Вязкий подслой, переходная область и область логарифмического профиля скорости составляют внутреннюю область (область закона стенки). На плоской пластине она занимает примерно 20 % от толщины пограничного слоя и в ней генерируется до 80 % энергии турбулентности. В вязком подслое поток является практически ламинарным, и вязкие напряжения доминируют над турбулентными. В переходном слое вязкие и турбулентные напряжения имеют одинаковый порядок.

Во внутренней области профиль скорости сравнительно слабо зависит от числа Рейнольдса, продольного градиента давления и других внешних условий, что служит основой для построения универсальных соотношений (пристеночных функций), связывающих параметры течения с расстоянием от стенки. Наряду с универсальностью профиля скорости во внутренней области, метод пристеночных функций опирается на использование гипотезы о локальном равновесии энергии

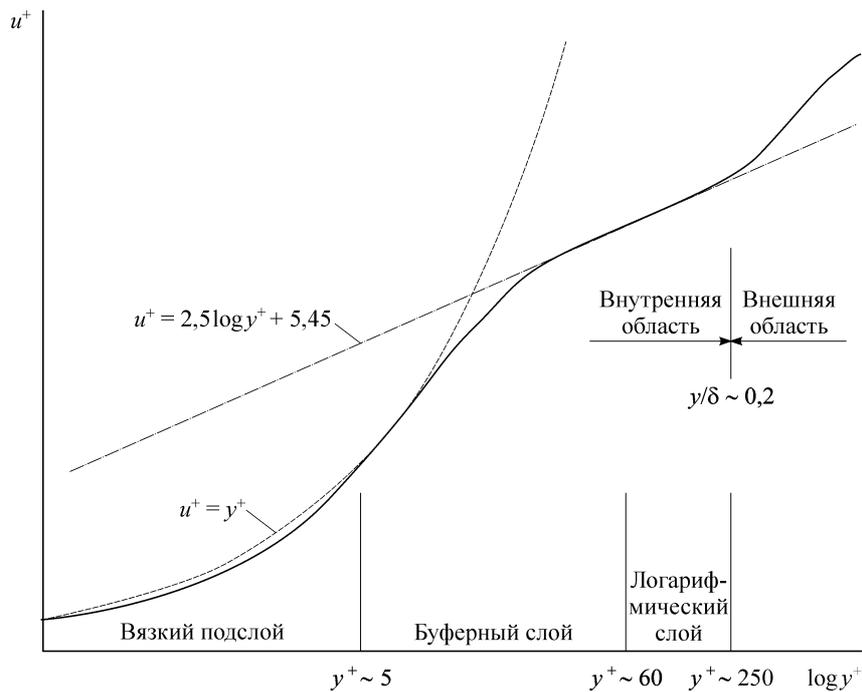


Рис. 1. Структура турбулентного пограничного слоя.

турбулентных пульсаций и свойство локальной изотропности диссипирующих вихрей.

В вязком подслое вязкие напряжения доминируют над реинольдсовыми, и имеет место линейная зависимость скорости от расстояния до стенки $u^+ = y^+$ (при $0 \leq y^+ < 11$).

В логарифмическом слое реинольдсовы напряжения намного превышают вязкие напряжения, а профиль скорости описывается логарифмическим законом $u^+ = (1/\kappa) \ln(Ey^+)$ (при $11 \leq y^+ < 0,2\delta$, где δ — толщина пограничного слоя). Для гладкой стенки $E = 8,8$.

Распределение сдвиговых напряжений полагается однородным в пределах пристеночного контрольного объема. Сдвиговые напряжения на стенке вычисляются по формуле $\tau_w = \mu_e \Delta u / \Delta y$, где Δu и Δy — разности скоростей и координат между стенкой и пристеночным узлом. Учитывая, что $\mu_e = \mu \text{Re} / u^{+2}$, где $\text{Re} = \rho \Delta u \Delta y / \mu = u^+ y^+$, получим $\tau_w = \rho \Delta u^2 / u^{+2}$. При использовании k - ϵ модели сдвиговые напряжения и число Рейнольдса выражаются через кинетическую энергию турбулентности

$$\tau_w = \frac{\rho c_\mu^{1/4} k^{1/2} \Delta u}{(1/\kappa) \ln(E \text{Re})}, \quad \text{Re} = \frac{\rho c_\mu^{1/4} k^{1/2} \Delta y}{\mu}.$$

При $\text{Re} \leq 140$ распределение скорости описывается соотношением

$$0 = u^+ + \left[\exp(\kappa u^+) - 1 - \kappa u^+ - \frac{1}{2}(\kappa u^+)^2 - \frac{1}{6}(\kappa u^+)^3 \right] \exp(-\kappa B) - \frac{\text{Re}}{u^+}. \quad (5)$$

Для решения нелинейного уравнения (5) применяется метод Ньютона. Итерации начинаются с $u^+ = \text{Re}^{1/2}$ (в ламинарном подслое $u^+ = y^+$).

При $Re > 140$ скорость u^+ находится из логарифмического распределения, которое записывается в виде

$$y^+ = u^+ + \left[\exp(\kappa u^+) - \kappa u^+ - \frac{1}{2}(\kappa u^+)^2 - \frac{1}{6}(\kappa u^+)^3 \right] \exp(-\kappa B), \quad (6)$$

где $B = 5,3$. При помощи взятия натурального логарифма от (6) получим соотношение

$$0 = u^+ - B - \frac{1}{\kappa} \ln \left\{ \exp(-\kappa B) \left[1 + \kappa u^+ + \frac{1}{2}(\kappa u^+)^2 + \frac{1}{6}(\kappa u^+)^3 \right] + \frac{Re}{u^+} - u^+ \right\}. \quad (7)$$

Для решения уравнения (7) применяется метод Ньютона. В качестве начального приближения используется распределение $u^+ = B + (1/\kappa) \ln Re$. Соотношение (7) дает более быструю сходимость метода Ньютона, чем (6).

5. СЛАБЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Слабые граничные условия реализуются через расчет касательной скорости на стенке, которая добавляется в невязку, обусловленную дискретизацией невязких потоков через грани пристеночного контрольного объема.

Напряжение сдвига на стенке полагается однородным в пределах контрольного объема и рассчитывается по формуле $\tau_w = \mu_e \Delta q S / \Delta y$, где Δy — расстояние от пристеночного узла до стенки, Δq — разность касательных скоростей между пристеночным узлом и стенкой, S — площадь грани, μ_e — эффективная вязкость.

Касательные скорости на стенке находятся из соотношений:

$$u_{\tau 1} = u_{\tau 2} - \tau_x \frac{\Delta y}{\mu_e}, \quad v_{\tau 1} = v_{\tau 2} - \tau_y \frac{\Delta y}{\mu_e}, \quad w_{\tau 1} = w_{\tau 2} - \tau_z \frac{\Delta y}{\mu_e},$$

где

$$\tau_x = \tau_w \frac{u_{\tau 2} - u_{\tau 1}}{\Delta q}, \quad \tau_y = \tau_w \frac{v_{\tau 2} - v_{\tau 1}}{\Delta q}, \quad \tau_z = \tau_w \frac{w_{\tau 2} - w_{\tau 1}}{\Delta q}.$$

Составляющие касательной скорости $\{u_\tau, v_\tau, w_\tau\}$ в локальной системе координат связаны с декартовыми составляющими скорости $\{u, v, w\}$ при помощи соотношений $u_\tau = -u - v_n n_x$, $v_\tau = v - v_n n_y$, $w_\tau = w - v_n n_z$, где $v_n = u n_x + v n_y + w n_z$ представляет собой скорость по нормали к грани контрольного объема.

С точки зрения программной реализации расчет касательной скорости включается в процедуру дискретизации невязких потоков, требуя сравнительно небольших модификаций кода [1], основанного на методе пристеночных функций.

Другой подход к реализации слабых граничных условий на стенке состоит в том, что логарифмический профиль скорости продолжается вплоть до стенки (вязкий подслой не разрешается, как и в методе пристеночных функций). Касательная скорость на стенке получается при помощи осреднения по логарифмическому распределению скорости в пристеночном контрольном объеме.

Различные подходы к формулировке граничных условий для скорости на стенке поясняет рис. 2. На рис. 2, *a* показаны внутренний и граничный контрольные объемы, используемые для дискретизации уравнений сохранения, а на рис. 2, *b* — линейный и логарифмический профили скорости в пограничном слое (штриховка соответствует области, используемой для осреднения по логарифмическому профилю скорости).

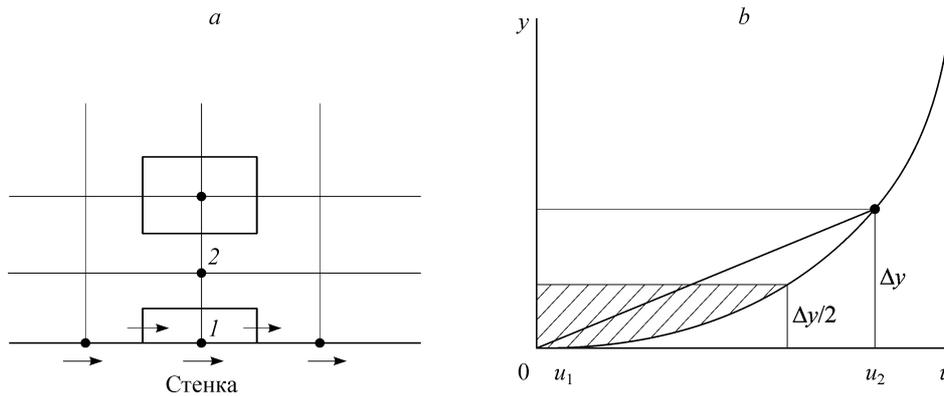


Рис. 2. Внутренний и граничный контрольные объемы (а) и профиль скорости в пограничном слое (b).

Касательная скорость на стенке находится из соотношений:

$$u_{\tau 1}^* = u_b \frac{u_{\tau 2} - u_{\tau 1}}{\Delta q}, \quad v_{\tau 1}^* = u_b \frac{v_{\tau 2} - v_{\tau 1}}{\Delta q}, \quad w_{\tau 1}^* = u_b \frac{w_{\tau 2} - w_{\tau 1}}{\Delta q}.$$

Полученные значения используются для расчета невязки, обусловленной дискретизацией невязких потоков. Скорость потока в пограничном слое $u_b = \mu u_b^+ / \rho \Delta y$, выраженная в пристеночных единицах, рассчитывается с использованием закона стенки (5), что дает

$$u_b^+ = u^+ y^+ - \frac{1}{2} u^{+2} + \frac{1}{\kappa} (u^+ - y^+) + \frac{1}{24\kappa E} (\kappa u^+)^4,$$

где $y^+ = Re/u^+$. Соотношение (8) получается при помощи интегрирования распределения (5) в пределах пристеночного контрольного объема с последующим использованием соотношения (6) для упрощения. Решение нелинейного уравнения, определяющего u^+ , производится при помощи метода Ньютона.

С точки зрения программной реализации двух подходов к постановке слабых граничных условий, отличие заключается в способе расчета касательной скорости на стенке — по явным формулам в исходном и с использованием логарифмического профиля скорости в модифицированном подходе.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим течение в межлопаточном канале низкоскоростного компрессора. Исследуем сеточную зависимость решения и влияние пристеночного шага сетки на точность расчетов при использовании метода пристеночных функций и слабых граничных условий.

Расчетная область, показанная на рис. 3, ограничена входным и выходным сечениями межлопаточного канала, поверхностью профиля, стенками канала и периодическими границами.

Во входном сечении задаются радиальные профили полного давления $p_0(r)$, полной температуры $T_0(r)$, углов $\alpha(r)$ и $\beta(r)$, определяющих направление течения (рис. 4, а–d), а также характеристики турбулентности ($\bar{v}_\infty = 1,76 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ или $k_\infty = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$, $\varepsilon_\infty = 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}^3$). На выходной границе задается радиальное распределение статического давления $p(r)$ (рис. 4, e). На поверхности профиля выставляются граничные условия прилипания и непротекания или слабые граничные условия,

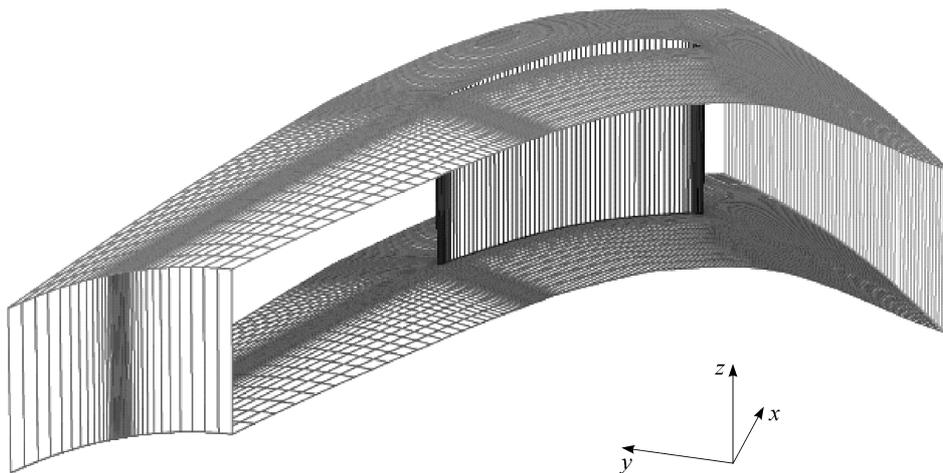


Рис. 3. Геометрия расчетной области.

а на стенках межлопаточного канала — условия скольжения (невязкие стенки). Поверхность профиля считается теплоизолированной. В окружном направлении используются периодические граничные условия (повторения течения).

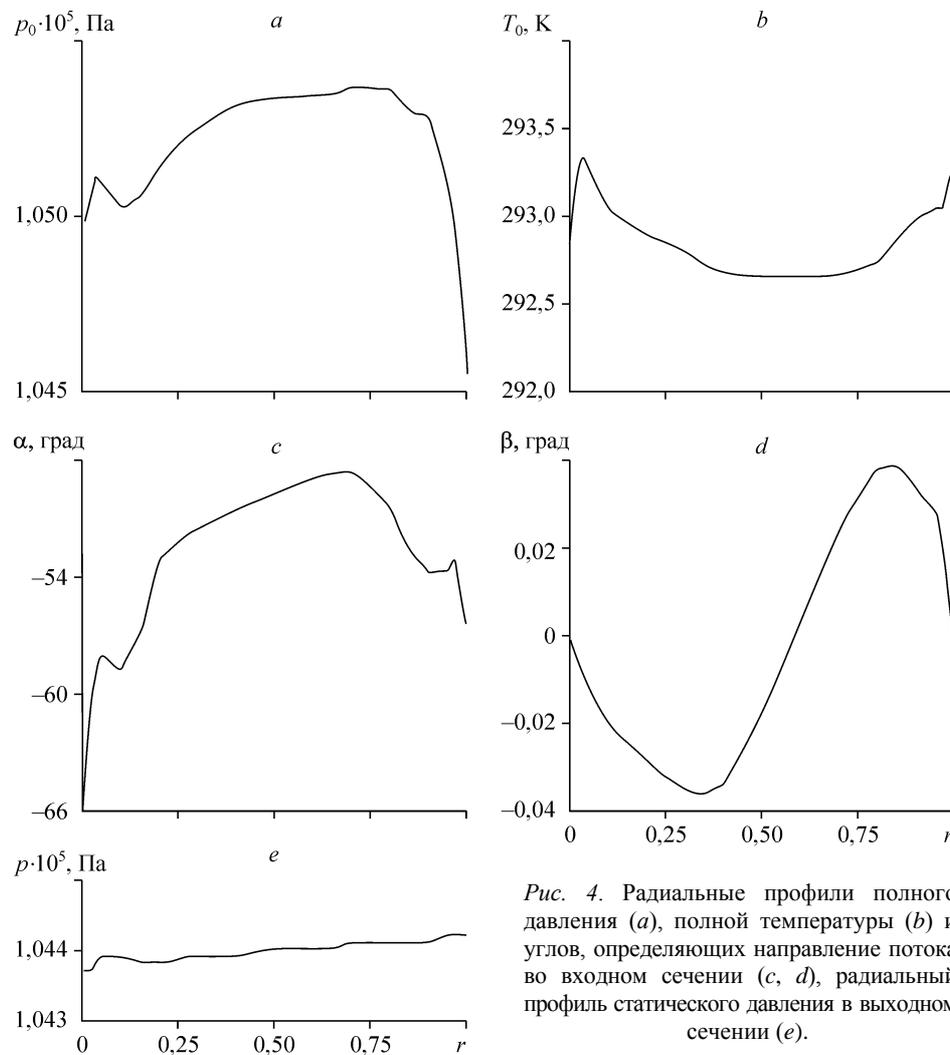


Рис. 4. Радиальные профили полного давления (а), полной температуры (b) и углов, определяющих направление потока во входном сечении (c, d), радиальный профиль статического давления в выходном сечении (e).

Расчеты проводятся на двух сетках с областью O-типа около профиля, характеризуемых приблизительно одинаковым количеством ячеек, но различными шагами сетки вблизи стенки (и, следовательно, различными значениями y^+). Фрагменты расчетных сеток и распределения универсальной координаты y^+ показаны на рис. 5 (координата s отсчитывается вдоль поверхности профиля).

Сетки 1 и 2 содержат по 16302 и 15518 ячеек, причем 7872 и 7480 ячеек располагаются на границе. На входной и выходной границе размещаются по 64 и 44 ячейки. Периодические границы содержат по 127 ячеек. Стенки межлопаточного канала содержат 7872 ячейки для сетки 1 и 7480 ячеек для сетки 2 (кривые 1 и 2 на рис. 5, *c*). На поверхности профиля в обоих случаях располагается 196 ячеек. Величина y^+ изменяется от 0,2 до 2 для сетки 1 и от 0,8 до 24 для сетки 2. Сетка 1 имеет приблизительно равномерное распределение y^+ на подветренной и надветренной поверхностях профиля (при этом $y^+ \sim 1$, что находится ниже границы, обычно используемой в расчетах на основе метода пристеночных функций). Для достижения сходимости ($res \sim 10^{-16}$) делается 5000 многосеточных циклов (используется V-цикл и 4 уровня сетки). Пристеночный шаг, реализующийся на сетке 1, позволяет использовать двухслойную модель.

Результаты, относящиеся к сходимости численного решения, приведены на рис. 6 (по оси абсцисс откладывается число многосеточных итераций n , а по оси ординат — невязка res , возникающая в результате дискретизации уравнений Навье–Стокса и уравнений модели турбулентности). Кривые 1 и 2 показывают результаты расчетов на сетке 1, кривые 3 и 4 — результаты на сетке 2 при использовании

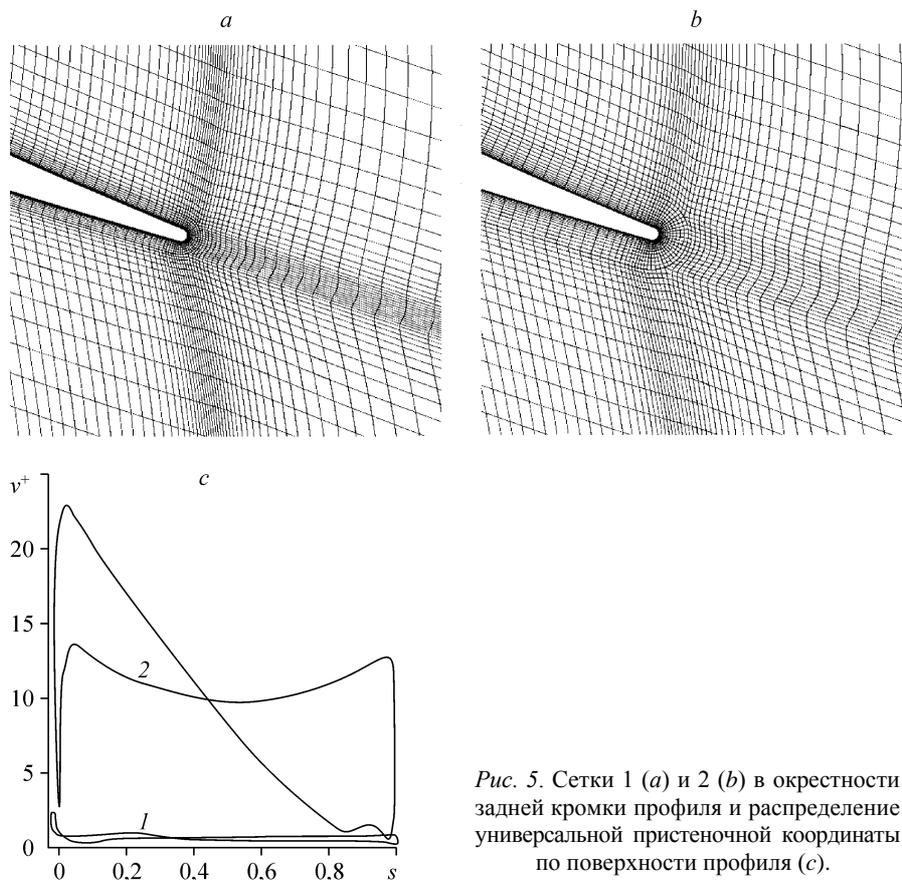


Рис. 5. Сетки 1 (a) и 2 (b) в окрестности задней кромки профиля и распределение универсальной пристеночной координаты по поверхности профиля (c).

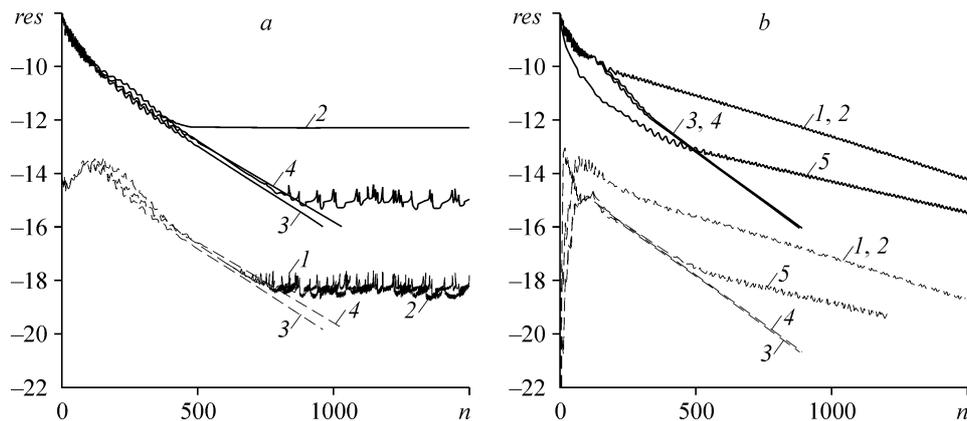


Рис. 6. Изменение невязки в зависимости от числа итераций при использовании модели Спаларта–Аллмараса (а) и k - ϵ модели (б).

методов пристеночных функций и слабых граничных условий (некоторые линии сливаются), а кривая 5 — результаты, полученные на основе двухслойной модели на сетке 1. Сплошные линии соответствуют невязке, полученной в результате дискретизации уравнения неразрывности, уравнений изменения количества движения и уравнения изменения энергии, а штрихпунктирные линии — невязке, обусловленной дискретизацией уравнений модели турбулентности.

Модель Спаларта–Аллмараса не позволяет достичь заданного уровня невязки за 5000 итераций на сетке 1 как при использовании пристеночных функций, так и слабых граничных условий. Для k - ϵ модели сходимость на сетке 1 достигается за 2059 и 2073 итераций соответственно. Наиболее быстрая сходимость имеет место при использовании k - ϵ модели на сетке 2 — число итераций составляет 881 для метода пристеночных функций и 888 для слабых граничных условий. Модель Спаларта–Аллмараса требует несколько большего числа итераций — 961 и 1030 соответственно. Для достижения сходимости на основе двухслойной модели требуется 1677 итераций (используется сетка 1).

Потери полного давления находятся из соотношения

$$L = \frac{P_{01} - P_{02}}{P_{01}} \quad \text{при} \quad P_{01} = \frac{1}{S_1} \oint_{S_1} p_0 ds, \quad P_{02} = \frac{1}{S_2} \oint_{S_2} p_0 ds.$$

Индексы 1 и 2 соответствуют входному и выходному сечениям расчетной области.

Удельный массовый расход рассчитывается по формуле

$$m = \oint_S \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds,$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль, S — площадь границы.

Изменения потерь полного давления и удельного массового расхода в выходном сечении канала в зависимости от числа итераций показаны на рис. 7 и 8 для различных моделей турбулентности и подходов к постановке граничных условий на профиле (условные обозначения те же, что и на рис. 6).

Данные, соответствующие установившемуся решению задачи, обобщены в табл. 1. Следует отметить существенную разницу в потерях полного давления, полученных на основе модели Спаларта–Аллмараса и k - ϵ модели с пристеночными функциями.

Расчеты по двухслойной модели дают значение удельного массового расхода, достаточно хорошо согласующееся с другими моделями ($m = 0,7829$ кг/с, что дает погрешность в 6,5 % и 0,3 % относительно данных, полученных на основе модели

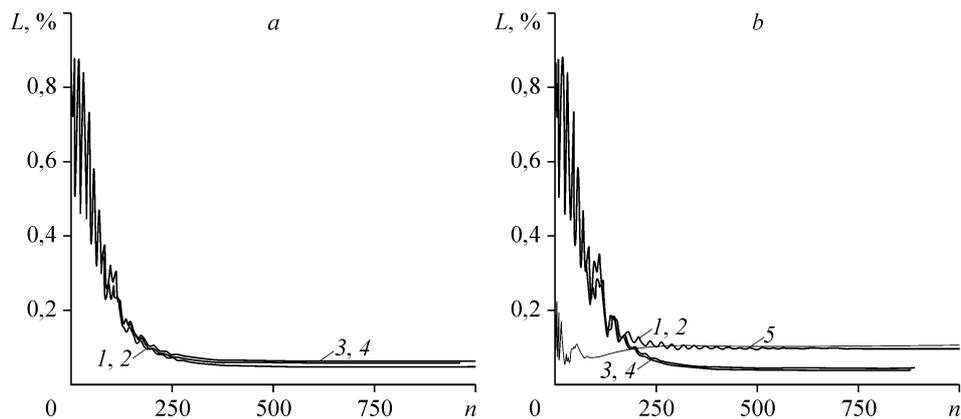


Рис. 7. Изменение потерь полного давления в зависимости от числа итераций при использовании модели Спаларта–Аллмараса (а) и $k-\epsilon$ модели (б).

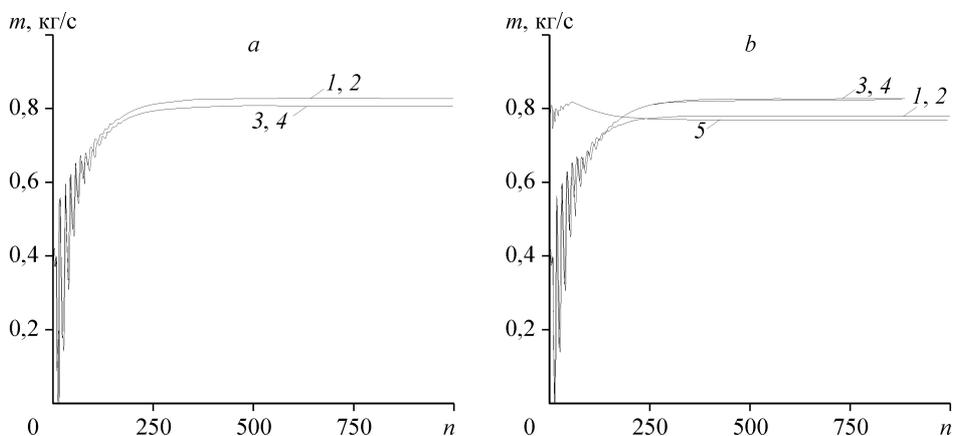


Рис. 8. Изменение удельного массового расхода в зависимости от числа итераций при использовании модели Спаларта–Аллмараса (а) и $k-\epsilon$ модели (б).

Спаларта–Аллмараса и $k-\epsilon$ модели с пристеночными функциями). Вместе с тем, данные по потерям полного давления в выходном сечении оказываются существенно завышенными ($L = 0,10303$ %, что дает погрешности 54,3 % и 6,5 %).

Распределения статического давления по поверхности профиля, приведенные на рис. 9, показывают существенное влияние пристеночного шага сетки и способа постановки граничных условий на результаты расчетов вблизи задней кромки профиля.

Пристеночные функции и слабые граничные условия дают приблизительно одинаковые результаты на сетке 1 (при $y^+ \sim 1$) как для модели Спаларта–Аллмараса, так и $k-\epsilon$ модели.

Таблица 1

Потери полного давления и удельный массовый расход в выходном сечении

Сетка	Метод пристеночного моделирования	SA модель		$k-\epsilon$ модель	
		L	m	L	m
1	Пристеночные функции	0,04712	0,8342	0,09710	0,7854
1	Слабые граничные условия	0,04715	0,8312	0,09715	0,7854
2	Пристеночные функции	0,05707	0,8130	0,03960	0,8305
2	Слабые граничные условия	0,06268	0,8123	0,04324	0,8315

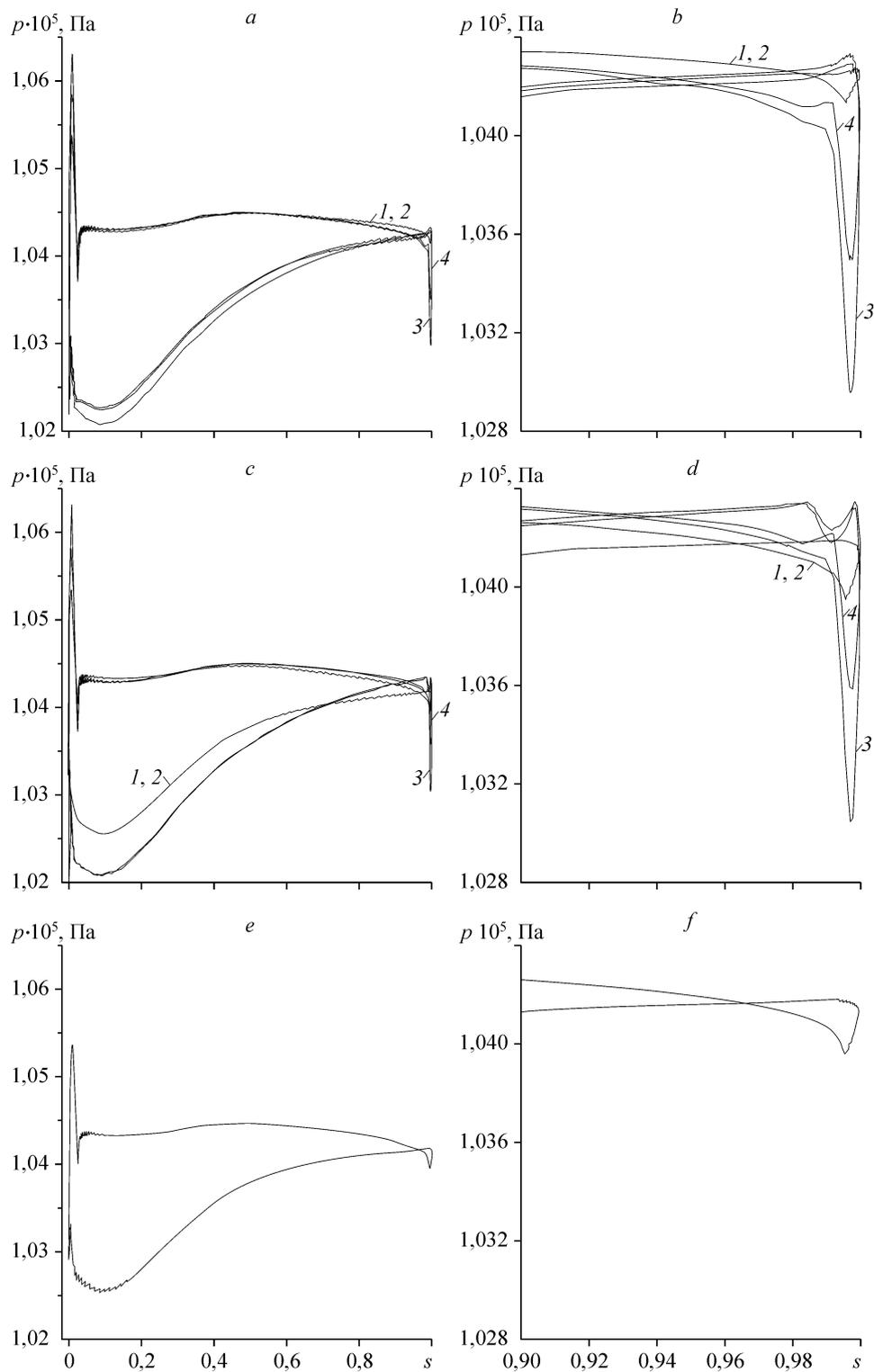


Рис. 9. Распределения по поверхности профиля (*a, c, e*) и вблизи его задней кромки (*b, d, f*) для модели Спаларта–Аллмараса (*a, b*), для $k-\epsilon$ модели (*c, d*), для двухслойной модели (*e, f*).

При использовании сетки 2 (сетка с большим пристеночным шагом) и метода пристеночных функций обращает на себя внимание петлеобразное распределение давления в окрестности задней кромки профиля (рис. 9, *a, b, c, d*), напоминающее по форме рыбий хвост (fish-tailing effect). Расчеты на основе $k-\varepsilon$ модели дают также немонотонное распределение давления на верхней поверхности профиля (дугообразное распределение, описываемое кривой 3 на рис. 9, *c, d*). Вместе с тем, экспериментальные данные, полученные в корпорации Rolls-Royce plc (Великобритания), свидетельствуют о монотонном распределении статического давления в окрестности задней кромки профиля.

Использование сетки 2 и слабых граничных условий не позволяют полностью устранить “эффект рыбьего хвоста” в распределении давления по поверхности профиля, но приводит к его снижению и делает возможным применение более грубой сетки около стенки, чем в случае метода пристеночных функций, снижая тем самым требования к вычислительным ресурсам.

Двухслойная модель позволяет улучшить результаты расчетов, полученные на основе $k-\varepsilon$ модели с пристеночными функциями. В то время как метод пристеночных функций дает немонотонное распределение давления вблизи задней кромки профиля (кривая 3 на рис. 9, *e, f*), двухслойная модель предсказывает распределение давления, согласующееся с расчетами на основе модели Спаларта–Аллмараса.

Угол поворота потока в выходном сечении определяется как угол в плоскости $x-\theta$ между вектором скорости и осью x

$$\beta = \arctg \frac{v_\theta}{v_x}.$$

Тангенциальная составляющая скорости находится из соотношения

$$v_\theta = \frac{v_z y - v_y z}{r},$$

где $r = (y^2 + z^2)^{1/2}$.

Осевая v_x и окружная v_θ скорости, а также угол поворота потока приведены в табл. 2. Расчеты предсказывают схожие значения локальных характеристик потока на сетке 1 независимо от способа пристеночного моделирования. Расчеты при постановке слабых граничных условий дают несколько меньшие значения скорости и угла поворота потока на сетке 2, чем расчеты на основе метода пристеночных функций (различия составляет 0,25 %). Наиболее важное значение играет пристеночное разрешение сетки, давая 0,2 % разницы в осевой скорости, 1,5 % разницы в окружной скорости и 2,1 % разницы в угле, определяющем направление потока, на сетках 1 и 2 с пристеночными функциями. Слабые граничные условия на сетках 1 и 2 дают разницу в 0,2, 1,3 и 1,8 % соответственно.

Результаты расчетов, полученные на основе двухслойной модели, демонстрируют существенное различие от других моделей в локальных характеристиках потока, давая максимальные значения тангенциальной скорости ($v_\theta = 18,15$ м/с) и угла поворота потока ($\beta = 27,72^\circ$) среди моделей турбулентности и подходов к постановке граничных условий на профиле. В то же время, величина осевой скорости ($v_x = 34,55$ м/с) хорошо согласуется с другими моделями.

Таблица 2

Составляющие скорости и угол поворота потока в выходном сечении

Сетка	Метод пристеночного моделирования	SA модель			$k-\varepsilon$ модель		
		v_x	v_θ	β	v_x	v_θ	β
1	Пристеночные функции	34,81	16,18	24,94	34,53	18,29	27,91
1	Слабые граничные условия	34,80	16,18	24,94	34,53	18,29	27,91
2	Пристеночные функции	35,03	17,89	27,05	35,16	17,11	25,94
2	Слабые граничные условия	34,81	17,55	26,75	34,61	16,58	25,60

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены способы реализации слабых граничных условий на стенке при дискретизации осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса по методу контрольного объема.

Слабые граничные условия обладают рядом преимуществ перед методом пристеночных функций, к которым можно отнести сравнительно простой подход к программной реализации при использовании различных моделей турбулентности, использование более грубой сетки в пристеночной области, смягчение сеточной зависимости решения при расчетах на неструктурированных сетках. При этом также отпадает необходимость реализации процедуры пристеночного моделирования для температуры. Слабые граничные условия могут использоваться в совокупности с методом пристеночных функций (например, слабые граничные условия используются на поверхности профиля, а метод пристеночных функций — на стенках межлопаточного канала).

Основной недостаток слабых граничных условий состоит в том, что они носят численный характер и лишены физической обоснованности. При этом следует отметить, что и пристеночные функции достаточно часто используются в ситуациях, в которых закон стенки недостаточно обоснован или неприменим (например, для расчета пограничных слоев, подверженных влиянию градиента давления, или в случае, когда значения пристеночной координаты y^+ находятся ниже рекомендованного значения).

Пристеночное разрешение сетки вблизи задней кромки профиля, метод сопряжения структурированной сетки O-типа в пограничном слое с сеткой во внешней области, а также способ постановки граничных условий оказывают важное влияние на качество результатов численного моделирования, в частности, на распределение давления по поверхности профиля вблизи его задней кромки, а следовательно, и на структуру течения в ближнем следе, распределение полного давления в выходном сечении межлопаточного канала и его потери.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Волков К.Н.** Применение метода контрольного объема для решения задач механики жидкости и газа на неструктурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. — 2005. — Т. 6, № 1. — С. 43–60.
2. **Spalart P.R., Allmaras S.R.** A one equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper. — 1992. — No. 92-0439.
3. **Launder B.E., Spalding D.B.** The numerical computation of turbulent flows // Computational Methods in Applied Mechanics Engin. — 1974. — Vol. 3. — P. 269–289.
4. **Bredberg J.** On the wall boundary condition for turbulence model // Chalmers University of Technology. Department of Thermo and Fluid Dynamics. Internal Report 00/4. — Sweden, Goteborg, 2000.
5. **Волков К.Н.** Сравнение низкорейнольдсовых моделей турбулентности с данными прямого численного моделирования течения в канале // Теплофизика и аэромеханика. — 2005. — Т. 12, № 3. — С. 365–378.
6. **Wolfshtein M.** The velocity and temperature distribution of one-dimensional flow with turbulence augmentation and pressure gradient // Inter. J. of Heat and Mass Transfer. — 1969. — Vol. 12, No. 3. — P. 301–318.
7. **Collis S.S.** Discontinuous Galerkin methods for turbulence simulation // Stanford University. Center for Turbulence Research. Technical Report. — USA, Stanford, 2002.
8. **Jongen T., Marx Y.P.** Design of an unconditionally stable, positive scheme for the k - ϵ and two-layer turbulence models // Computers and Fluids. — 1997. — Vol. 26, No. 5. — P. 469–485.

Статья поступила в редакцию 27 ноября 2006 г.