

ГЛОБАЛЬНАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ В АНИЗОТРОПНО ПРОВОДЯЩЕЙ МАНТИИ

В.В. Плоткин

*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,
630090, Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 3, Россия*

Рассматриваются возможные проявления в геомагнитных данных фазового перехода магнезиовюстита в нижней мантии из полупроводникового состояния в металлическое, связанные с эффектами анизотропии электропроводности.

Теоретически выявлены особенности глобальной электромагнитной индукции с анизотропной электропроводностью в нижней мантии. При индукционном возбуждении Земли внешним источником и при анизотропии электропроводности в заглубленном сферическом слое поле на земной поверхности представлено двумя модами — магнитной и электрической. Методом возмущения получены уравнения, описывающие поля обеих мод и связь между ними в слабоанизотропной среде.

Показано, что информацию о тензоре электропроводности анизотропного слоя можно получить с помощью как совместного, так и отдельного анализа характеристик обеих мод. Оценки элементов тензора электропроводности, относящихся к тангенциальным компонентам электромагнитного поля, могут быть сделаны по данным лишь одной магнитной моды, регистрируемой в настоящее время мировой сетью. Для получения полных данных о тензоре помимо трехкомпонентной регистрации геомагнитных вариаций необходима также регистрация на мировой сети вариаций горизонтальных компонент электрического поля.

Магнезиовюстит, нижняя мантия, анизотропия электропроводности, глобальная электромагнитная индукция, трехкомпонентная регистрация геомагнитных вариаций, мировая сеть, вариации горизонтальных компонент электрического поля.

GEOMAGNETIC INDUCTION RESPONSES OF ANISOTROPIC CONDUCTING MANTLE

V.V. Plotkin

Phase change of dielectric magnesiowüstite in the lower mantle may leave signatures in geomagnetic records of the globally distributed array of observatories. The related features appear in EM induction responses of lower mantle, which are studied theoretically. The surface EM field corresponding to a response of the earth with conductivity anisotropy in a mantle spherical layer is presented as the sum of the magnetic and electric modes. Equations for the fields of both modes and their relationship in a weakly anisotropic earth are obtained by the perturbation method. The two field modes are analyzed jointly and separately to characterize the conductivity tensor of the anisotropic lower mantle. The tensor elements corresponding to the tangential components of the field can be estimated from the magnetic mode alone recorded currently by the global network of geomagnetic observatories. For the tensor data to be complete, observatory data on lateral variations of the electric field are required in addition to three-component geomagnetic records.

Magnesiowüstite, lower mantle, conductivity anisotropy, induction, three-component records of geomagnetic variations, observatories, horizontal components of electric field

ВВЕДЕНИЕ

Вариации геомагнитного поля от внешних источников позволяют судить о распределении электропроводности в Земле вплоть до мантийных глубин ~2000—2500 км [Ротанова, Пушкин, 1982]. По данным о бухтообразных (длительностью до нескольких часов) и суточных вариациях распределение электропроводности прослеживается до глубин ~500—700 км. По данным индукционных зондирований для периодов от 30 сут до 1 года в [Olsen, 1999] построено распределение электропроводности вплоть до ~2000 км. Установлен рост электропроводности с глубиной до величины ~2 См/м на ~800 км и приблизительное постоянство 3—10 См/м на 800—2000 км. По спутниковым данным об 11 магнитных бурях в [Velimsky et al., 2006] были получены оценки для электропроводности нижней мантии в единицы См/м. Использование циклических вариаций для индукционного зондирования существенно связано с учетом вековых вариаций и джерков, обусловленных внутренними источниками магнитного поля [Ducruix et al.,

1980]. Механизм и величина электропроводности в нижней мантии пока не ясны. Некоторые оценки электропроводности в нижней мантии до глубин ~3000 км приведены в работе [Honkura, Matsushima, 1998]. Они разбиваются на две группы с величинами ~1—3 и > 10 См/м.

Результаты лабораторных экспериментов с минералами при давлениях и температурах, характерных для нижней мантии, использовались в работе [Xu et al., 2000] для расчетов электропроводности на глубинах от 200 до 2900 км. Для нижней мантии от 800 до 2900 км учитывался вклад магнезиовюстита. Зависимость кажущегося сопротивления от периода по расчетным данным хорошо совпадает с аналогичной зависимостью, наблюдаемой в геофизическом эксперименте. При расчетах кажущегося сопротивления электропроводность ядра принималась ~5·10⁵ См/м.

В последнее время продолжают исследования фазовых переходов минералов при давлениях и температурах, близких к условиям в нижней мантии. В статье [Овчинников, 2011] предсказан возможный переход магнезиовюстита из полупроводникового состояния в металлическое при давлении ~60—80 ГПа и температуре ~1900—2100 °С. В работе [Ovchinnikov et al., 2012] оценивалось связанное с этим увеличение электропроводности в нижней мантии на глубинах 1400—1900 км. В.В. Плоткин с соавторами [2013] представили теоретические оценки возможного эффекта в величинах кажущегося сопротивления Земли на временных периодах от месяца до десятилетий. Выявить предсказанный эффект по оценкам кажущегося сопротивления оказалось затруднительно, и в работе [Плоткин и др., 2014] была проведена инверсия частотных зависимостей вариаций геомагнитного поля на тех же временных периодах. Процедура инверсии проверялась в численных экспериментах с синтетическими данными в диапазоне от 50 сут до 33 лет. При известных границах сферических слоев тестовая модель восстанавливалась по данным для нескольких сферических гармоник низких степеней. Результаты инверсии реальных данных мировой сети (среднемесячных значений геомагнитного поля с 1920 по 2009 г.) указывают на возможное существование слоя с повышенными значениями электропроводности в нижней мантии.

С другой стороны, фазовый переход магнезиовюстита в нижней мантии связан с физическими эффектами в кристаллической решетке. Это означает также возможное существование анизотропии электропроводности в нижней мантии. Поэтому представляет интерес вопрос, можно ли с помощью геофизических методов обнаружить эффекты анизотропии электропроводности в нижней мантии. В данной работе с этой целью изучается глобальная электромагнитная индукция в Земле с анизотропной электропроводностью.

УРАВНЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ В АНИЗОТРОПНО ПРОВОДЯЩЕЙ МАНТИИ

Исследуя глобальную электромагнитную индукцию, удобно представить поле в виде суммы электрической и магнитной мод [Плоткин, 2004]. В сферически-симметричной и изотропной среде моды оказываются независимыми. Анизотропия и отклонения среды от сферической симметрии приводят к необходимости учесть взаимосвязь электрической и магнитной мод. С этой целью в сферических координатах можно воспользоваться следующим представлением для тангенциальных компонент электрического $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и магнитного $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ полей, а также тока $\mathbf{J} = \hat{\sigma}\mathbf{E}$, возбуждаемого в анизотропно проводящей среде с тензором электропроводности $\hat{\sigma}$:

$$\begin{aligned} E_{\vartheta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial E^{(1)}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial \varphi}, & E_{\varphi} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial E^{(1)}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial \vartheta}, \\ H_{\vartheta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \varphi}, & H_{\varphi} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \vartheta}, \\ J_{\vartheta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial J^{(1)}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial J^{(0)}}{\partial \varphi}, & J_{\varphi} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial J^{(1)}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial J^{(0)}}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь r , ϑ , φ — сферические координаты точки в системе координат с началом в центре Земли, введены скалярные потенциалы электрического $E^{(1)}$ и магнитного $H^{(0)}$ полей, тока $J^{(1)}$ для электрической моды и аналогичные потенциалы электрического $E^{(0)}$ и магнитного $H^{(1)}$ полей и тока $J^{(0)}$ для магнитной моды. Как можно убедиться прямыми вычислениями, такое представление обеспечивает выполнение соотношений, не приводящих к смешиванию мод после выполнения операторов rot [Плоткин, 2005] (например, для компонент электрического поля):

$$\begin{aligned}
(\operatorname{rot} \mathbf{E})_r &= -\frac{1}{r^2} \Delta_\Omega E^{(0)}, \quad \Delta_\Omega = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\
(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E})_r &= \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega \left(\frac{\partial E^{(1)}}{\partial r} - E_r \right), \\
(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E})_r &= \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega \left(\frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega E^{(0)} \right).
\end{aligned} \tag{2}$$

Используя исходные уравнения Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \mathbf{H}$, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$ для полей $\sim e^{i\omega t}$ (μ_0 — магнитная проницаемость, ω — угловая частота) и их следствия в виде

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + i\omega\mu_0 \mathbf{J} = 0, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + i\omega\mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{J} = 0,$$

нетрудно теперь получить следующую систему уравнений для потенциалов мод электромагнитного поля в проводящей среде при самых общих предположениях о характеристиках анизотропии и неоднородности:

$$\frac{1}{r^2} \Delta_\Omega \left[\frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega E^{(0)} \right] - i\omega\mu_0 \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega J^{(0)} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{r^2} \Delta_\Omega \left(\frac{\partial E^{(1)}}{\partial r} - E_r \right) + i\omega\mu_0 J_r = 0, \tag{4}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 J_r) + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega J^{(1)} = 0.$$

Выполняются также следующие соотношения между потенциалами магнитного и электрического полей [Плоткин, 2004]:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{r^2} \Delta_\Omega H^{(0)} = J_r, \quad E_r - \frac{\partial E^{(1)}}{\partial r} = -i\omega\mu_0 H^{(0)}, \\
\frac{1}{r^2} \Delta_\Omega E^{(0)} = i\omega\mu_0 H_r, \quad \frac{\partial E^{(0)}}{\partial r} = -i\omega\mu_0 H^{(1)}.
\end{aligned} \tag{5}$$

В последнее уравнение (4) потенциал $J^{(0)}$ тока магнитной моды не входит, поскольку исключается угловой частью оператора div . В (3) не входит потенциал $J^{(1)}$ тока электрической моды в силу первого из соотношений (2), записанного для тока. Уравнение (3) определяет поля магнитной моды, а (4) — электрической. Связь между модами в уравнениях (3), (4) обусловлена только свойствами токовых потенциалов. Для них выполняются следующие соотношения, проверяемые подстановкой выражений J_ϑ и J_φ из (1):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta J_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (J_\varphi) = \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega J^{(1)}, \\
\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta J_\varphi) - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (J_\vartheta) = -\frac{1}{r^2} \Delta_\Omega J^{(0)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Соотношения (6) для тангенциальных компонент тока \mathbf{J} (и аналогичные для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H}) позволяют определять потенциалы электрической $J^{(1)}$ и магнитной $J^{(0)}$ мод на сфере любого радиуса, если на ней известны угловые распределения упомянутых компонент.

В сферически-слоистой изотропной среде моды и уравнения (3) и (4) независимы, так как $\mathbf{J} = \sigma(r)\mathbf{E}$, и из (1) получается $J^{(0)} = \sigma(r)E^{(0)}$ и $J^{(1)} = \sigma(r)E^{(1)}$. В латерально неоднородной среде уравнения (3) и (4) оказываются связанными [Плоткин, 2004].

В анизотропной среде имеем:

$$\begin{aligned}
J_r &= \sigma_{rr} E_r + \sigma_{r\vartheta} E_\vartheta + \sigma_{r\varphi} E_\varphi, \\
J_\vartheta &= \sigma_{\vartheta r} E_r + \sigma_{\vartheta\vartheta} E_\vartheta + \sigma_{\vartheta\varphi} E_\varphi, \\
J_\varphi &= \sigma_{\varphi r} E_r + \sigma_{\varphi\vartheta} E_\vartheta + \sigma_{\varphi\varphi} E_\varphi.
\end{aligned} \tag{7}$$

Поскольку далее основное внимание будет уделено изучению эффектов анизотропии, предположим для упрощения, что латеральная (угловая) зависимость всех компонент тензора $\hat{\sigma}$ отсутствует (однако радиальная зависимость не исключается). Учитывая это и соотношения (1), подставим (7) в (6). Тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} J^{(0)} &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial E^{(0)}}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{\sigma_{\vartheta\varphi} + \sigma_{\varphi\vartheta}}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial \vartheta \partial \varphi} + \\ &+ \frac{1}{r^2} \left[\frac{\sigma_{\vartheta\varphi}}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial \varphi^2} - \frac{\sigma_{\varphi\vartheta}}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial E^{(1)}}{\partial \vartheta} \right) \right] + \frac{\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial \vartheta \partial \varphi} + \\ &+ \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\sigma_{\vartheta r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \sigma_{\varphi r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta E_r) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} J^{(1)} &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial E^{(1)}}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{\sigma_{\vartheta\varphi} + \sigma_{\varphi\vartheta}}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial \vartheta \partial \varphi} + \\ &+ \frac{1}{r^2} \left[\frac{\sigma_{\varphi\vartheta}}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial \varphi^2} - \frac{\sigma_{\vartheta\varphi}}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial E^{(0)}}{\partial \vartheta} \right) \right] + \frac{\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial \vartheta \partial \varphi} + \\ &+ \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\sigma_{\varphi r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} + \sigma_{\vartheta r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta E_r) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Для трансверсально изотропной среды, когда $\sigma_{rr} = \sigma_0$, $\sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\perp}$, а все остальные компоненты тензора $\hat{\sigma}$ равны нулю, уравнения (3) и (4) соответствуют двум независимым модам. Кроме того, при индукционном возбуждении поля электрической моды $E^{(1)}$ и E_r равны нулю, а поле магнитной моды $E^{(0)}$ зависит лишь от поперечной электропроводности $\sigma_{\perp}(r)$:

$$\frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} E^{(0)} - i\omega\mu_0\sigma_{\perp} E^{(0)} = 0.$$

Рассмотрим далее случай малых отклонений от трансверсально изотропной среды. Предположим, что $\sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{\perp} + \delta\sigma_{\vartheta\vartheta}$, $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\perp} + \delta\sigma_{\varphi\varphi}$ и введенные поправки, а также все остальные недиагональные компоненты тензора $\hat{\sigma}$ малы. Учитывая тогда, что поля электрической моды малы, применим метод возмущений. С учетом лишь малых членов первого порядка в (3), (4) и (9), система (3), (4) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} E^{(0)} - i\omega\mu_0\sigma_{\perp} E^{(0)} \right] - \\ - \frac{i\omega\mu_0}{r^2} \left[\frac{\delta\sigma_{\varphi\varphi}}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial E^{(0)}}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\delta\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial \varphi^2} - \frac{\sigma_{\vartheta\varphi} + \sigma_{\varphi\vartheta}}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial \vartheta \partial \varphi} \right] = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \left(\frac{\partial E^{(1)}}{\partial r} - E_r \right) + i\omega\mu_0\sigma_0 E_r + \frac{i\omega\mu_0}{r} \left(\frac{\sigma_{r\vartheta}}{\sin \vartheta} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial \varphi} - \sigma_{r\varphi} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial \vartheta} \right) = 0, \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_0 E_r) + \frac{\sigma_{\perp}}{r^2} \Delta_{\Omega} E^{(1)} + \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\sigma_{r\vartheta}}{\sin \vartheta} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial \varphi} - \sigma_{r\varphi} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial \vartheta} \right) \right] + \frac{\delta\sigma_{\vartheta\vartheta} - \delta\sigma_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial \vartheta \partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Полученные уравнения полностью определяют магнитную (10) и электрическую (11) моды электромагнитного поля глобальной индукции с учетом эффектов анизотропии электропроводности.

Представим далее искомые потенциалы в виде разложений по сферическим функциям, удовлетворяющим уравнениям

$$\Delta_{\Omega} Y_n^m(\vartheta, \varphi) + n(n+1)Y_n^m(\vartheta, \varphi) = 0,$$

и используем сквозную нумерацию этих функций из [Плоткин и др., 2007а]:

$$E^{(0)} = \sum_k e_k^{(0)}(r) Y_k(\vartheta, \varphi), \quad E^{(1)} = \sum_k e_k^{(1)}(r) Y_k(\vartheta, \varphi), \quad E_r = \sum_k e_k(r) Y_k(\vartheta, \varphi). \quad (12)$$

Из (10) и (11) следует, что также необходимы следующие разложения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_n}{\partial \varphi} &= \sum_k a_{nk} Y_k(\vartheta, \varphi), \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta Y_n) = \sum_k b_{nk} Y_k(\vartheta, \varphi), \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \vartheta \partial \varphi} &= \sum_k c_{nk} Y_k(\vartheta, \varphi), \quad \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} = \sum_k d_{nk} Y_k(\vartheta, \varphi), \\ \frac{\partial Y_n}{\partial \vartheta} &= \sum_k g_{nk} Y_k(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом (12), (13) система (10), (11) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 e_m^{(0)}}{dr^2} - \left(k_{\perp}^2 + \frac{m'(m'+1)}{r^2} \right) e_m^{(0)} &= \\ = \frac{i\omega\mu_0}{m'(m'+1)} \sum_n e_n^{(0)} \left[d_{mn} \delta\sigma_{\vartheta\vartheta} + b_{mn} \delta\sigma_{\varphi\varphi} - c_{mn} (\sigma_{\vartheta\varphi} + \sigma_{\varphi\vartheta}) \right], \\ \frac{d e_m^{(1)}}{dr} - \left(1 + \frac{k_0^2 r^2}{m'(m'+1)} \right) e_m^{(1)} &= \frac{i\omega\mu_0 r}{m'(m'+1)} \sum_n e_n^{(0)} (a_{mn} \sigma_{r\vartheta} - g_{mn} \sigma_{r\varphi}), \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \sigma_0 e_m) - \frac{m'(m'+1)}{r^2} \sigma_{\perp} e_m^{(1)} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r \sum_n e_n^{(0)} (a_{mn} \sigma_{r\vartheta} - g_{mn} \sigma_{r\varphi}) \right] &+ \\ + \frac{1}{r^2} \sum_n e_n^{(0)} \left[c_{mn} (\delta\sigma_{\vartheta\vartheta} - \delta\sigma_{\varphi\varphi}) + d_{mn} \sigma_{\varphi\vartheta} - b_{mn} \sigma_{\vartheta\varphi} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $k_0^2 = i\omega\mu_0\sigma_0$, $k_{\perp}^2 = i\omega\mu_0\sigma_{\perp}$, коэффициенты m' зависят от индекса m в используемой здесь сквозной нумерации сферических гармоник.

В анизотропной среде связь уравнений (14), (15) обусловлена малыми отклонениями тензора электропроводности от случая трансверсально изотропной среды. Уравнения нулевого приближения мод независимы друг от друга:

$$\frac{d^2 e_m^{(0)}}{dr^2} - \left(k_{\perp}^2 + \frac{m'(m'+1)}{r^2} \right) e_m^{(0)} = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 e_m^{(1)}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{m'(m'+1)}{k_0^2 r^2 + m'(m'+1)} \frac{d e_m^{(1)}}{dr} - \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_0} \left(k_0^2 + \frac{m'(m'+1)}{r^2} \right) e_m^{(1)} &= 0, \\ e_m &= \frac{m'(m'+1)}{k_0^2 r^2 + m'(m'+1)} \frac{d e_m^{(1)}}{dr}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из-за малой проводимости атмосферы считаем, что внешними источниками в Земле возбуждается лишь индукционное поле $e_m^{(0)}$:

$$e_m^{(0)}(r) = e_{m0}^{(0)} \sqrt{\frac{r}{R}} \frac{I_{m'+1/2}(k_{\perp} r)}{I_{m'+1/2}(k_{\perp} R)}. \quad (18)$$

Напомним, что уравнение (16) справедливо для однородной Земли и в (18) R — радиус Земли, $I_{m'+1/2}(k_{\perp} r)$ — функция Бесселя мнимого аргумента первого рода с полуцелым индексом, $e_{m0}^{(0)}$ — граничное значение потенциала на поверхности Земли, которое можно определить по данным, регистрируемым мировой сетью геомагнитных обсерваторий [Плоткин и др., 2007а,б].

Гальваническая (электрическая) мода, представленная в (17) потенциалами $e_m^{(1)}$ и e_m , в рассматриваемом случае не возбуждается. Она возникает в анизотропной среде в следующем приближении как вынужденное решение (17) при ненулевой правой части, появляющейся за счет членов с $e_m^{(0)}$ в (15). На границе с непроводящей атмосферой радиальный ток обращается в нуль (заметим, что радиальная компонента e_m на границе с атмосферой в анизотропном случае вовсе не обязательно обращается в нуль).

Как видно из первых двух уравнений (5) для электрической моды, это означает равенство нулю на поверхности Земли тороидальной части $H^{(0)}$ суммарного магнитного поля мод, и поэтому граничные значения для электрической моды при $z = 0$ имеют вид

$$e_m = \frac{de_m^{(1)}}{dr}. \quad (19)$$

Отметим, что на такой границе даже в случае равенства нулю радиальной компоненты поля e_m и, следовательно, производной $\frac{de_m^{(1)}}{dr}$ сам потенциал $e_m^{(1)}$ вследствие анизотропии (или латеральной неоднородности) среды может отличаться от нуля и вносить свой вклад в тангенциальные компоненты суммарного электрического поля мод на поверхности Земли. В настоящее время на мировой сети геомагнитных станций вариации тангенциальных компонент электрического поля не регистрируются, и определить распределение потенциала $e_m^{(1)}$ на поверхности Земли пока невозможно. Поэтому прежде чем проводить анализ вклада анизотропии в значения компонент электрического поля на земной поверхности, исследуем влияние анизотропии на вариации компонент магнитного поля и поведение магнитной моды.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МАГНИТНОЙ МОДЫ ПОЛЯ

Рассмотрим вынужденное решение уравнения (14) для магнитной моды, подставляя в его правую часть нулевое приближение (18). Методом вариации постоянных получим:

$$\begin{aligned} \bar{e}_m^{(0)}(r) = & \sqrt{r} K_{m'+1/2}(k_{\perp} r) \int_{R_1}^r \sqrt{\xi} f_m(\xi) I_{m'+1/2}(k_{\perp} \xi) d\xi - \\ & - \sqrt{r} I_{m'+1/2}(k_{\perp} r) \int_{R_1}^r \sqrt{\xi} f_m(\xi) K_{m'+1/2}(k_{\perp} \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (20)$$

где R_1 — радиус нижней границы сферического анизотропного слоя, $I_{m'+1/2}(k_{\perp} r)$ и $K_{m'+1/2}(k_{\perp} r)$ — функции Бесселя мнимого аргумента первого и второго рода соответственно и $f_m(r)$ есть правая часть (14)

$$\begin{aligned} f_m(r) = & \frac{i\omega\mu_0}{m'(m'+1)} \sum_n e_{n0}^{(0)} \sqrt{\frac{r}{R}} \frac{I_{n'+1/2}(k_{\perp} r)}{I_{n'+1/2}(k_{\perp} R)} \times \\ & \times [d_{mn} \delta\sigma_{\vartheta\vartheta} + b_{mn} \delta\sigma_{\varphi\varphi} - c_{mn} (\sigma_{\vartheta\varphi} + \sigma_{\varphi\vartheta})]. \end{aligned} \quad (21)$$

Будем считать, что анизотропным является заглубленный сферический слой при $R_1 \leq r \leq R_2$. В присутствии верхнего изотропного слоя решение для магнитной моды записывается в виде:

$$\begin{aligned} e_m^{(0)}(r) = & C \sqrt{\frac{r}{R}} \frac{I_{m'+1/2}(k_{\perp} r)}{I_{m'+1/2}(k_{\perp} R)} + D \sqrt{\frac{r}{R}} \frac{K_{m'+1/2}(k_{\perp} r)}{K_{m'+1/2}(k_{\perp} R)}, \quad R_2 \leq r \leq R, \\ e_m^{(0)}(r) = & A \sqrt{\frac{r}{R}} \frac{I_{m'+1/2}(k_{\perp} r)}{I_{m'+1/2}(k_{\perp} R)} + \bar{e}_m^{(0)}(r), \quad R_1 \leq r \leq R_2, \\ e_m^{(0)}(r) = & A \sqrt{\frac{r}{R}} \frac{I_{m'+1/2}(k_{\perp} r)}{I_{m'+1/2}(k_{\perp} R)}, \quad r \leq R_1. \end{aligned} \quad (22)$$

Решение (22) ограничено при $r \rightarrow 0$ и непрерывно вместе с производной при $r = R_1$ на нижней границе анизотропного слоя. Константы в (22) находятся из условий сшивок на верхней границе этого слоя при $r = R_2$ и граничного условия на поверхности Земли при $r = R$. Если на земной поверхности потенциал имеет граничное значение $e_m^{(0)}(R) = e_{m0}^{(0)}$, то из (22) для радиальной производной потенциала на поверхности получается выражение

$$\begin{aligned} \frac{de_{m0}^{(0)}}{dr} = & \frac{de_m^{(0)}(r)}{dr} \Big|_{r=R} = e_{m0}^{(0)} \left[\frac{1}{2R} + \frac{dI_{m'+1/2}(k_{\perp} R)/dr}{I_{m'+1/2}(k_{\perp} R)} \right] - \\ & - \frac{\int_{R_1}^{R_2} \sqrt{\xi} f_m(\xi) I_{m'+1/2}(k_{\perp} \xi) d\xi}{\sqrt{R} I_{m'+1/2}(k_{\perp} R)} \end{aligned} \quad (23)$$

с $f_m(\xi)$ из (21). Оно понадобится для применения метода согласования компонент [Плоткин, 2005], поскольку связывает друг с другом величины потенциала $e_m^{(0)}$ и его радиальной производной $\frac{de_m^{(0)}}{dr}$ на земной поверхности. Отметим, что в нулевом приближении (без последнего члена в (23)) эта связь определяется лишь величиной электропроводности σ_{\perp} в тангенциальных направлениях. Величина $\frac{de_m^{(0)}}{dr}$ не зависит от радиального волнового числа k_0 и радиальной электропроводности σ_0 . Это объясняется отсутствием в магнитной моде радиальной компоненты электрического поля. Из сказанного ясно, что только по магнитной моде в предположении малых отклонений от трансверсально изотропной среды определить величину σ_0 не представляется возможным. С этой целью необходимо изучить возбуждение электрической моды электромагнитного поля, обусловленное анизотропией электропроводности в заглубленном сферическом слое.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МОДЫ ПОЛЯ

Рассмотрим возбуждение поля электрической моды. Для этого учтем в уравнении (17) члены первого приближения:

$$\begin{aligned}
 e_m = & \frac{m'(m'+1)}{k_0^2 r^2 + m'(m'+1)} \frac{de_m^{(1)}}{dr} - \frac{i\omega\mu_0 r}{k_0^2 r^2 + m'(m'+1)} \sum_n e_n^{(0)} (a_{mn} \sigma_{r\vartheta} - g_{mn} \sigma_{r\varphi}), \\
 \frac{d^2 e_m^{(1)}}{dr^2} + & \frac{2}{r} \frac{m'(m'+1)}{k_0^2 r^2 + m'(m'+1)} \frac{de_m^{(1)}}{dr} - \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_0} \left(k_0^2 + \frac{m'(m'+1)}{r^2} \right) e_m^{(1)} + \\
 & + \left(k_0^2 + \frac{m'(m'+1)}{r^2} \right) \frac{d}{dr} \frac{r \sum_n e_n^{(0)} (a_{mn} \sigma_{r\vartheta} - g_{mn} \sigma_{r\varphi})}{\sigma_0 (k_0^2 r^2 + m'(m'+1))} + \\
 & + \frac{(k_0^2 r^2 + m'(m'+1))}{r^2 \sigma_0 m'(m'+1)} \sum_n e_n^{(0)} [c_{mn} (\delta\sigma_{\vartheta\vartheta} - \delta\sigma_{\varphi\varphi}) + d_{mn} \sigma_{\varphi\vartheta} - b_{mn} \sigma_{\vartheta\varphi}] = 0.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Принимая во внимание (19), из первого уравнения в (24) получим граничное условие для электрической моды на поверхности Земли $r = R$:

$$e_{m0} = e_m |_{r=R} = \frac{de_m^{(1)}}{dr} |_{r=R} = - \frac{\sum_n e_n^{(0)} (a_{mn} \sigma_{r\vartheta} - g_{mn} \sigma_{r\varphi})}{\sigma_0 R}. \tag{25}$$

Отсюда видно, что в анизотропном случае появляется отличная от нуля радиальная (вертикальная) компонента электрического поля внутри Земли вблизи ее поверхности. В изотропной Земле, граничащей с непроводящей атмосферой, она равна нулю, поскольку $J_r = \sigma E_r = 0$. Поэтому это свойство могло бы являться достоверным признаком присутствия анизотропии электропроводности внутри Земли, если среда была бы анизотропной вплоть до самой поверхности (в пренебрежении латеральной неоднородностью).

Однако вклад электрической моды в тангенциальные (горизонтальные) компоненты электрического поля на земной поверхности отличен от нуля даже в случае заглубленного анизотропного слоя. Для оценки этого вклада рассмотрим вынужденное решение второго уравнения в (24) для потенциала $e_m^{(1)}$. Для упрощения будем далее учитывать лишь влияние скин-эффекта, считая, что $k_0^2 r^2 \gg m'(m'+1)$. Тогда второе уравнение в (24) для электрической моды с точностью до первых членов малости приобретает вид:

$$\frac{d^2 e_m^{(1)}}{dr^2} - \left(k_{\perp}^2 + \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_0} \frac{m'(m'+1)}{r^2} \right) e_m^{(1)} = -f_{1m}(r), \tag{26}$$

$$f_{1m}(r) = - \frac{1}{\sigma_0 r^2} \sum_n e_n^{(0)} \sqrt{\frac{r}{R}} \frac{I_{n'+1/2}(k_{\perp} r)}{I_{n'+1/2}(k_{\perp} R)} (a_{mn} \sigma_{r\vartheta} - g_{mn} \sigma_{r\varphi}) +$$

$$+ \frac{k_0^2}{\sigma_0 m'(m'+1)} \sum_n e_{n0}^{(0)} \sqrt{\frac{r}{R}} \frac{I_{n'+1/2}(k_\perp r)}{I_{n'+1/2}(k_\perp R)} \times \\ \times [c_{mn} (\delta\sigma_{\vartheta\vartheta} - \delta\sigma_{\varphi\varphi}) + d_{mn} \sigma_{\varphi\vartheta} - b_{mn} \sigma_{\vartheta\varphi}].$$

Решение однородного уравнения (26) представляется как

$$e_m^{(1)}(r) = C \sqrt{\frac{r}{R}} \frac{I_\nu(k_\perp r)}{I_\nu(k_\perp R)} + D \sqrt{\frac{r}{R}} \frac{K_\nu(k_\perp r)}{K_\nu(k_\perp R)}, \quad (27)$$

где $\nu = \sqrt{\frac{\sigma_\perp}{\sigma_0} m'(m'+1) + \frac{1}{4}}$, а $I_\nu(k_\perp r)$ и $K_\nu(k_\perp r)$ — функции Бесселя мнимого аргумента первого и второго рода соответственно. Вынужденное решение этого уравнения получаем методом вариации постоянных:

$$\bar{e}_m^{(1)}(r) = \sqrt{r} K_\nu(k_\perp r) \int_{R_1}^r \sqrt{\xi} f_{1m}(\xi) I_\nu(k_\perp \xi) d\xi - \sqrt{r} I_\nu(k_\perp r) \int_{R_1}^r \sqrt{\xi} f_{1m}(\xi) K_\nu(k_\perp \xi) d\xi. \quad (28)$$

Общее решение (26) дается суммой (27) и (28). Входящие в общее решение константы могут быть определены из граничных условий. Будем считать, что анизотропным является сферический слой при $R_1 \leq r \leq R_2$. Из условий сшивок при $r = R_1$ и $r = R_2$, условия ограниченности решения при $r \rightarrow 0$ и граничного условия (25) при $r = R$ в случае изотропного поверхностного слоя $e_m = 0$ для потенциала возбуждаемой электрической моды $e_m^{(1)}(R)$ на поверхности Земли получим:

$$e_{m0}^{(1)} = e_m^{(1)}(r)|_{r=R} = \frac{\int_{R_1}^{R_2} \sqrt{\xi} f_{1m}(\xi) \frac{I_\nu(k_\perp \xi)}{I_\nu(k_\perp R)} d\xi}{\frac{1}{2R} + \frac{dI_\nu(k_\perp R)/dr}{I_\nu(k_\perp R)}}, \quad (29)$$

где $\nu = \sqrt{\frac{\sigma_\perp}{\sigma_0} m'(m'+1) + \frac{1}{4}}$ и $f_{1m}(\xi)$ приведено в (26). Отметим, что в (29) входит и радиальная электропроводность анизотропного слоя σ_0 , которой определяется индекс ν функций Бесселя. Но для использования (29) при решении обратной задачи — восстановлении параметров анизотропии электропроводности — необходимо иметь величины $e_{m0}^{(1)}$. Они могут быть определены только с помощью регистрации данных о глобальном распределении тангенциальных (горизонтальных) компонент электрического поля. К сожалению, на мировой сети обсерваторий регистрация таких данных не производится.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА — СХЕМЫ РЕШЕНИЯ, ОЦЕНКИ И ТЕСТЫ

В настоящее время пока можно воспользоваться имеющимися данными глобальной регистрации вариаций компонент геомагнитного поля на мировой сети обсерваторий. При исследовании циклических и многолетних геомагнитных вариаций внешнего происхождения необходим учет вековых вариаций и джерков, обусловленных внутренними источниками магнитного поля. Предполагается воспользоваться доступными моделями вековых вариаций геомагнитного поля и сначала вычесть из регистрируемых данных часть, обусловленную внутренними источниками.

Полученные экспериментальные данные о вариациях компонент магнитного поля внешнего происхождения на пунктах мировой сети необходимо аппроксимировать на всю земную поверхность. С помощью найденных распределений можно определить потенциал $E^{(0)}$ по радиальной компоненте H_r , а по горизонтальным компонентам H_ϑ и H_φ — его радиальную производную $\frac{\partial E^{(0)}}{\partial r}$ из соотношений [Плоткин и др., 2007а,б]:

$$\frac{1}{R^2} \Delta_\Omega E^{(0)} = i\omega \mu_0 H_r, \quad \frac{\partial E^{(0)}}{\partial r} = -i\omega \mu_0 H^{(1)}, \quad (30) \\ \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta H_\vartheta) + \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (H_\varphi) = \frac{1}{R^2} \Delta_\Omega H^{(1)}.$$

Используя разложения этих величин по сферическим гармоникам типа (12), из (30) найдем соответствующие экспериментальные значения амплитуд $e_{m0}^{(0)}$ и $\frac{de_{m0}^{(0)}}{dr}$. Решение обратной задачи проведем с помощью согласования этих величин друг с другом, используя выражение (23) в процессе поиска искомых характеристик анизотропии электропроводности методами оптимизации.

Применяя метод возмущений, сначала можно найти кажущуюся электропроводность σ_{\perp} в нулевом приближении без учета малых членов в (23) $\sim f_m(\xi)$, а в следующем приближении осуществить подбор параметров анизотропии электропроводности мантии $\delta\sigma_{\vartheta\vartheta}$, $\delta\sigma_{\varphi\varphi}$ и $\sigma_{\vartheta\varphi}$. Эти параметры входят в (23) и (21) совместно с коэффициентами «зацепления» b_{mn} , c_{mn} и d_{mn} сферических гармоник в разложениях (13). Для конкретности на рис. 1 звездочками (вдоль оси абсцисс) отображены номера n не равных нулю коэффициентов b_{mn} , c_{mn} и d_{mn} для каждой из m -й рассматриваемой сферической гармоники, номер m указан вдоль оси ординат. При расчетах использовалась упомянутая ранее сквозная нумерация сферических гармоник, расположенных в следующем порядке (присоединенные полиномы Лежандра $P_m^m(\cos\vartheta)$ в нормировке Шмидта):

P_0	P_1^0	$P_1^1 \cos(\varphi)$	$P_1^1 \sin(\varphi)$	P_2^0	$P_2^1 \cos(\varphi)$	$P_2^1 \sin(\varphi)$	$P_2^2 \cos(2\varphi)$...
1	2	3	4	5	6	7	8	m
0	1	1	1	2	2	2	2	m'

Коэффициенты m и m' , используемые в (23) и других таких же формулах, для каждой из сферических гармоник в первой строке приведены соответственно в двух нижних строках таблицы (таким образом, m' совпадает с нижним индексом присоединенного полинома Лежандра). Здесь при расчетах считалось, что максимальное значение $m' = 7$ и набор состоит из 64 сферических функций.

В качестве примера на рис. 2 приведены несколько карт изолиний для функций в левых частях (13) и результатов их представления рядами с коэффициентами b_{mn} , c_{mn} и d_{mn} в правых частях (13).

Отметим, что рис. 1 фактически отображает ненулевые элементы матриц первого приближения в матричном представлении (23):

$$\frac{de_0^{(0)}}{dr} = \left[(Z_{mn}) - \frac{\delta\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\sigma_{\perp}} (D_{mn}) - \frac{\delta\sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma_{\perp}} (B_{mn}) + \frac{\delta\sigma_{\vartheta\varphi} + \delta\sigma_{\varphi\vartheta}}{\sigma_{\perp}} (C_{mn}) \right] \frac{e_0^{(0)}}{R}, \quad (31)$$

где $e_0^{(0)}$, $\frac{de_0^{(0)}}{dr}$ — вектор-столбцы амплитуд сферических гармоник потенциала и его радиальной производной на земной поверхности, (Z_{mn}) — безразмерная диагональная матрица нулевого приближения с элементами на главной диагонали

$$Z_{mn} = \frac{1}{2} + \xi_0 \frac{dI_{m'+1/2}(\xi_0)/d\xi_0}{I_{m'+1/2}(\xi_0)}, \quad (32)$$

и безразмерные матрицы (B_{mn}) , (C_{mn}) и (D_{mn}) , имеющие те же ненулевые позиции, что и на рис. 1, со следующими элементами

$$B_{mn} = \frac{b_{mn}}{m'(m'+1)} I_{mn}, \quad C_{mn} = \frac{c_{mn}}{m'(m'+1)} I_{mn}, \quad D_{mn} = \frac{d_{mn}}{m'(m'+1)} I_{mn}, \quad (33)$$

$$I_{mn} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{I_{m'+1/2}(\xi)}{I_{m'+1/2}(\xi_0)} \frac{I_{n'+1/2}(\xi)}{I_{n'+1/2}(\xi_0)} \xi d\xi, \quad \xi_0 = k_{\perp} R, \quad \xi_{1,2} = k_{\perp} R_{1,2}.$$

Представления о величинах элементов матриц (32), (33) дают построчные графики модулей их элементов в зависимости от номера столбцов n (рис. 3, а). Используются следующие значения параметров: частота для 11-й циклической вариации $\omega = 1.81 \cdot 10^{-8}$ рад/с, $\sigma_{\perp} = 1$ См/м, $R_0 = 6370$ км, $R_1 = 4370$ км, $R_2 = 4870$ км.

Изменения модулей диагональных элементов матрицы $|Z_{mn} - (m' + 1)|$ в зависимости от величины электропроводности σ_{\perp} показаны на рис. 3, б. Асимптотические значения этих графиков слева и справа

следующие. Поскольку при $\sigma_{\perp} \rightarrow 0$ для функции Бесселя справедливо соотношение $I_{m'+1/2}(k_{\perp} R) \approx \left(\frac{k_{\perp} R}{2} \right)^{m'+1/2}$, то элементы матрицы $Z_{mn} \approx m' + 1$. Это случай геометрического затухания поля, поскольку

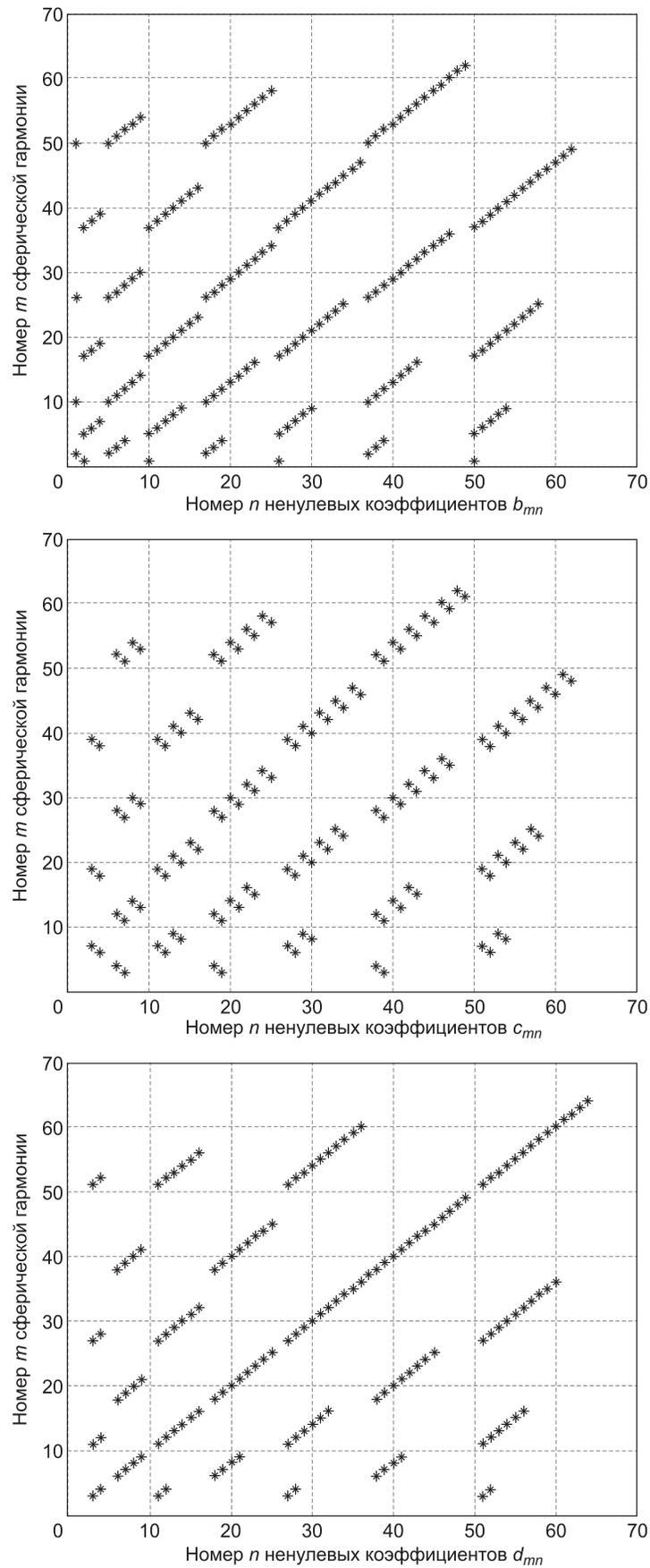


Рис. 1. Номера n ненулевых коэффициентов b_{mn} , c_{mn} и d_{mn} в разложениях операторов (13) от m -й сферической гармоники.

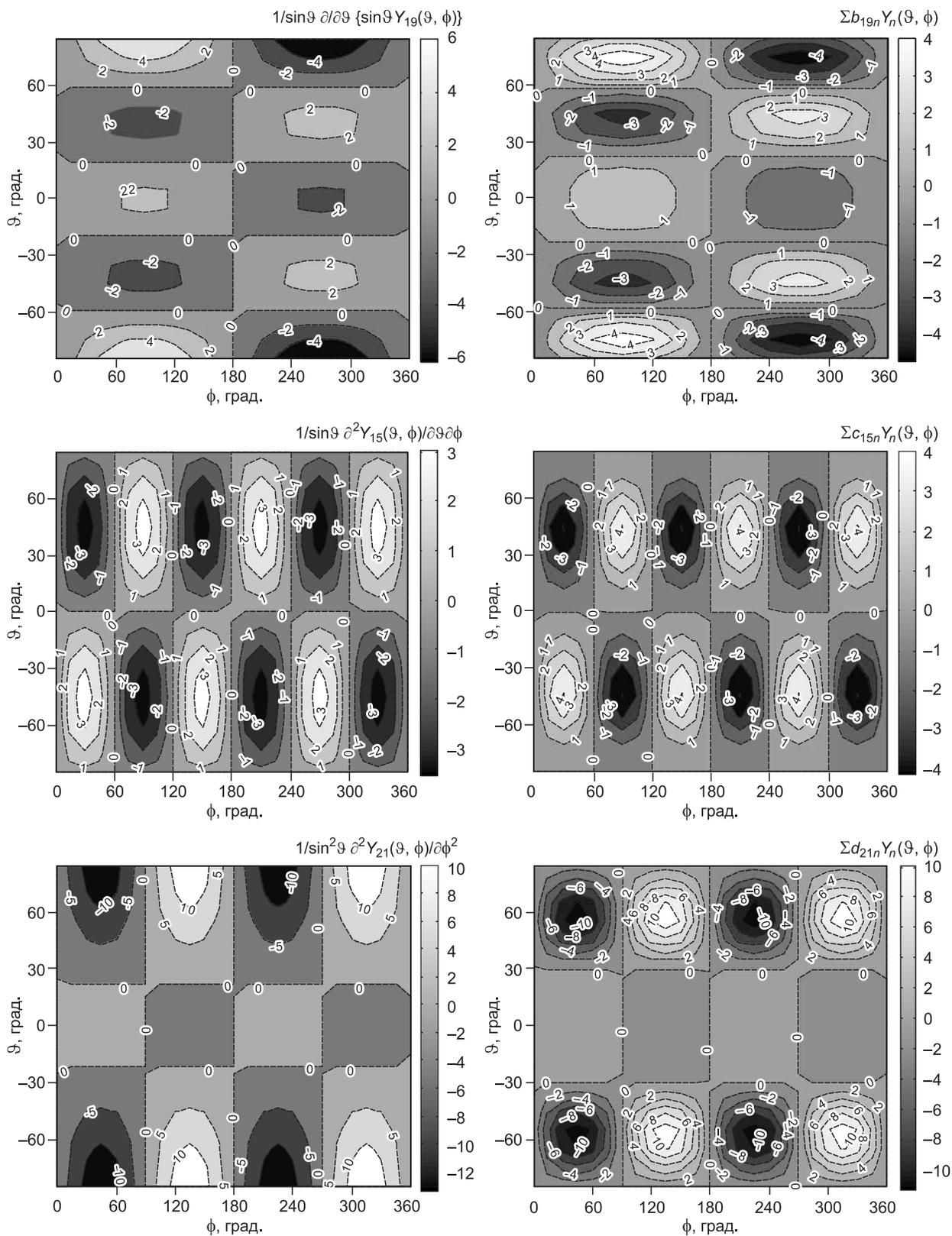
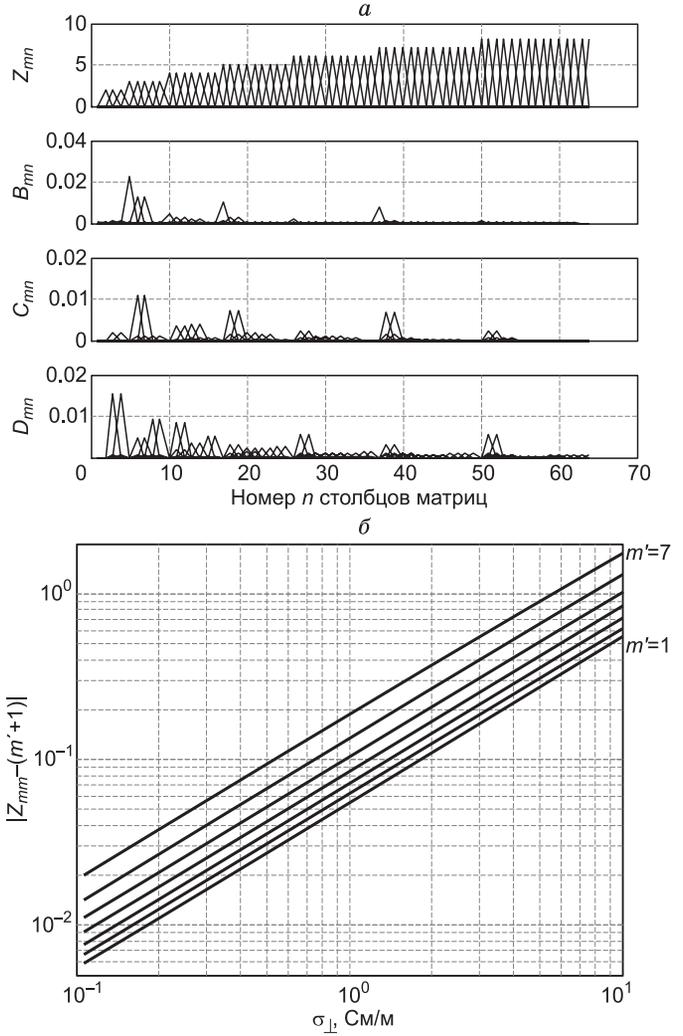


Рис. 2. Качество представления операторов (13) рядами сферических функций.

Функции — слева, представления рядами — справа.

Рис. 3. Модули элементов (*a*) в строках матриц Z_{mn} , B_{mn} , C_{mn} и D_{mn} в зависимости от номера столбца n для всех строк одновременно ($m = 2—60$); модули диагональных элементов (*b*) матрицы $|Z_{mm} - (m' + 1)|$ в зависимости от величины σ_{\perp} ($m = 2—60$).



для магнитной моды уравнение (16) нулевого приближения при малой электропроводности и внешнем источнике имеет решение $\sim r^{m'+1}$ и $\frac{d\mathbf{e}_0^{(0)}}{dr} = (m' + 1) \frac{\mathbf{e}_0^{(0)}}{R}$. В противоположном случае большой электропроводности $\sigma_{\perp} \rightarrow \infty$ и $\frac{d\mathbf{e}_0^{(0)}}{dr} = k_{\perp} \mathbf{e}_0^{(0)}$, и $Z_{mm} \approx k_{\perp}$.

Таким образом, решение обратной задачи заключается в вычислении с помощью (31) модельных амплитуд радиальной производной потенциала $\left(\frac{d\mathbf{e}_0^{(0)}}{dr}\right)_{\text{mod}}$ через входные экспериментальные значения самого потенциала $(\mathbf{e}_0^{(0)})_{\text{exp}}$ и параметры текущей модели электропроводности, а также минимизации функционала

$$\Phi(\delta\sigma_{\vartheta\vartheta}, \delta\sigma_{\varphi\varphi}, \delta\sigma_{\vartheta\varphi}) = \sum_m \left[\left(\frac{d\mathbf{e}_{m0}^{(0)}}{dr} \right)_{\text{mod}} - \left(\frac{d\mathbf{e}_{m0}^{(0)}}{dr} \right)_{\text{exp}} \right]^2 / \sum_m \left(\frac{d\mathbf{e}_{m0}^{(0)}}{dr} \right)_{\text{exp}}^2 + \Lambda$$

с регуляризирующей добавкой Λ с целью оптимального согласования экспериментальных и модельных значений радиальной производной $\frac{d\mathbf{e}_0^{(0)}}{dr}$.

Следует добавить, что для электрической моды электромагнитного поля выражение (29) также можно записать в матричном представлении:

$$\mathbf{e}_0^{(1)} = (Z_{mn}^{\prime-1}) \left[-\frac{\delta\sigma_{r\vartheta}}{\sigma_0} (A_{mn}) + \frac{\delta\sigma_{r\varphi}}{\sigma_0} (G_{mn}) + \frac{\delta\sigma_{\varphi\vartheta}}{\sigma_{\perp}} (D'_{mn}) - \frac{\delta\sigma_{\vartheta\varphi}}{\sigma_{\perp}} (B'_{mn}) + \frac{\delta\sigma_{\vartheta\vartheta} - \delta\sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma_{\perp}} (C'_{mn}) \right] \mathbf{e}_0^{(0)}, \quad (34)$$

где $\mathbf{e}_0^{(0)}$, $\mathbf{e}_0^{(1)}$ — вектор-столбцы амплитуд сферических гармоник потенциалов магнитной и электрической мод на земной поверхности соответственно. Безразмерная диагональная матрица $(Z_{mn}^{\prime-1})$ на главной диагонали представлена элементами $\left(\frac{1}{2} + \xi_0 \frac{dI_{v(m)}(\xi_0)/d\xi_0}{I_{v(m)}(\xi_0)} \right)^{-1}$, безразмерные матрицы (A_{mn}) , (G_{mn}) , (D'_{mn}) , (C'_{mn}) и (B'_{mn}) имеют следующие элементы:

$$A_{mn} = a_{mn} I_{mn}'' , G_{mn} = g_{mn} I_{mn}'' , D_{mn}' = \frac{d_{mn}}{m'(m'+1)} I_{mn}' ,$$

$$C_{mn}' = \frac{c_{mn}}{m'(m'+1)} I_{mn}' , B_{mn}' = \frac{b_{mn}}{m'(m'+1)} I_{mn}' ,$$

$$I_{mn}' = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{I_{v(m)}(\xi)}{I_{v(m)}(\xi_0)} \frac{I_{n'+1/2}(\xi)}{I_{n'+1/2}(\xi_0)} \xi d\xi , I_{mn}'' = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{I_{v(m)}(\xi)}{I_{v(m)}(\xi_0)} \frac{I_{n'+1/2}(\xi)}{I_{n'+1/2}(\xi_0)} \frac{d\xi}{\xi} ,$$

$$v(m) = \sqrt{\frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_0} m'(m'+1) + \frac{1}{4}} , \xi_0 = k_{\perp} R , \xi_{1,2} = k_{\perp} R_{1,2} .$$

Если на пунктах мировой сети осуществлять регистрацию вариаций горизонтальных компонент электрического поля, то из уравнения

$$\frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta E_{\vartheta}) + \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (E_{\varphi}) = \frac{1}{R^2} \Delta_{\Omega} E^{(1)}$$

можно было бы дополнительно определять потенциал $E^{(1)}$ и величины $(\mathbf{e}_0^{(1)})_{\text{exp}}$. С помощью сравнения этих величин с их модельными значениями (34) и минимизации соответствующего целевого функционала, можно определить компоненты тензора электропроводности $\delta\sigma_{r\vartheta}$ и $\delta\sigma_{r\varphi}$, а также уточнить все компоненты тензора, найденные только по данным магнитной моды.

ВЫВОДЫ

Верификация гипотезы перехода магнезиовюстита в условиях нижней мантии из полупроводникового состояния в металлическое возможна с помощью анализа геомагнитных данных мировой сети по длиннопериодным вариациям, в частности, по циклическим (11-летним) вариациям. Они пригодны для изучения электропроводности на глубинах 1500—2000 км, на которых предсказан переход магнезиовюстита. Это подтверждается выявленными особенностями глобальной электромагнитной индукции с анизотропной электропроводностью в нижней мантии.

При индукционном возбуждении Земли внешним источником и при анизотропии электропроводности в заглубленном сферическом слое поле на ее поверхности представлено двумя модами — магнитной и электрической. Это следует из уравнений, полученных методом возмущений, описывающих поля обеих мод и связь между ними в слабоанизотропной среде.

Информацию о тензоре электропроводности анизотропной среды можно получить с помощью как совместного, так и раздельного анализа характеристик обеих мод. Оценки элементов тензора электропроводности, относящихся к тангенциальным компонентам электромагнитного поля, могут быть сделаны по данным лишь одной магнитной моды, регистрируемой в настоящее время мировой сетью. Для получения полных данных о тензоре помимо трехкомпонентной регистрации геомагнитных вариаций необходима также регистрация на мировой сети вариаций горизонтальных компонент электрического поля.

Обработка реальных данных геомагнитных наблюдений в настоящее время осуществляется, и ее результаты будут представлены в другой статье.

Работа выполнена при поддержке междисциплинарного интеграционного проекта № 96 СО РАН. Автор благодарен В.С. Могилатову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- Овчинников С.Г.** Металлизация и спиновый кроссовер при высоком давлении в магнезиовюстите ($\text{Mg}_{1-x}\text{Fe}_x\text{O}$) // Письма в ЖЭТФ, 2011, т. 94, № 3, с. 210—214.
- Плоткин В.В.** Электромагнитное поле в неоднородном шаре (трехмерный случай) // Геология и геофизика, 2004, т. 45 (9), с. 1154—1167.
- Плоткин В.В.** Метод согласования компонент для исследования латеральных неоднородностей по данным глобального МВЗ и МТЗ // Геология и геофизика, 2005, т. 46 (5), с. 568—578.
- Плоткин В.В., Белинская А.Ю., Гаврыш П.А.** О возможностях оценки латеральной неоднородности верхней мантии с помощью глобального магнитовариационного зондирования // Геология и геофизика, 2007а, т. 48 (7), с. 798—810.

Плоткин В.В., Белинская А.Ю., Гаврыш П.А., Губанов А.И. Применение нелокальных функций отклика при глобальном электромагнитном зондировании // Геология и геофизика, 2007б, т. 48 (11), с. 1241—1251.

Плоткин В.В., Дядьков П.Г., Овчинников С.Г. Возможный вклад фазового перехода магнезиовюстита в нижней мантии Земли в геомагнитные данные // Геология и геофизика, 2013, т. 54 (3), с. 345—356.

Плоткин В.В., Дядьков П.Г., Овчинников С.Г. Выявление фазового перехода магнезиовюстита в нижней мантии: инверсия геомагнитных данных // Геология и геофизика, 2014, т. 55 (9), с. 1436—1445.

Ротанова Н.М., Пушков А.Н. Глубинная электропроводность Земли. М., Наука, 1982, 296 с.

Ducruix J., Courtillot V., Le Mouel J.L. The late 1960s secular variation impulse, the 11 year magnetic variation and the electrical-conductivity of the deep mantle // Geophys. J. R. Astr. Soc., 1980, v. 61, № 1, p. 73—94.

Honkura Y., Matsushima M. Electromagnetic response of the mantle to long-period geomagnetic variations over the globe // Earth Planet. Space, 1998, v. 50, № 8, p. 651—662.

Olsen N. Long-period (30 days–1 year) electromagnetic sounding and the electrical conductivity of the lower mantle beneath Europe // Geophys. J. Int., 1999, v. 138, № 1, p. 179—187.

Ovchinnikov S.G., Ovchinnikova T.M., Dyad'kov P.G., Plotkin V.V., Litasov K.D. Metallic layer inside the Earth's lower mantle // JETP Lett., 2012, v. 96, № 2, p. 135—138.

Velinsky J., Martinec Z., Everett M.E. Electrical conductivity in the Earth's mantle inferred from CHAMP satellite measurements—I. Data processing and 1-D inversion // Geophys. J. Int., 2006, v. 166, № 2, p. 529—542.

Xu Y., Shankland T.J., Poe B.T. Laboratory-based electrical conductivity in the Earth's mantle // J. Geophys. Res., 2000, v. 105, № B12, p. 27865—27875.

*Рекомендована к печати 3 сентября 2013 г.
М.И. Эповым*

*Поступила в редакцию
11 апреля 2013 г.*